Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **22**(1-2) 184-*193(2006)*
[*http://fbe.erciyes.edu.tr/*](http://fbe.erciyes.edu.tr/)
ISSN 1012-2354

KÜRESEL SİMPLEKSLER VE POLAR SİMPLEKSLERİN TEPE AÇILARI

Atakan Tuğkan YAKUT*

Niğde Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, NİĞDE

ÖZET

Bu çalışma da, küresel simplexlerin, polar simplexlerin tepe açılarının sinüsü' nü ; Gramian ve determinantın özelliklerini kullanarak hesapladık ve bunların arasındaki bağıntıları verdik.

Anahtar kelimeler: Küresel simplex, Polar simplex, n-hedral açı, Tepe açısı.

VERTEX ANGLES OF SPHERİCAL AND POLAR SİMPLİCES

ABSTRACT

In this study, by using the properties of Gramian and determiant, we calculated sine of vertex angles of spherical and polar simplices and to gave its relations among.

Keywords: Spherical simplex, Polar simplex, n-hedral angle, Vertex angle.

***E-posta:** atakan7771@yahoo.com

1. GİRİŞ

n- boyutlu küresel geometride sinüs kuralı ilk kez 1877 de İtalyan matematikçi Enrico d'Ovidio tarafından keşfedilmiştir[1]. Bu keşifle birlikte n-boyutlu sinüs'e dual kavram olan n-boyutlu polar sinüs ün varlığı ortaya çıkmıştır. İsveçli matematikçi Folke Erikson 1978 de *"The law of sines for tedrahedra and n-simplices"* isimli makalesinde geniş bir şekilde ele almıştır[2]. Simpleksler ile Polar simpleksler ve polar simplekslerin tepe açıları ile esas simpleksin tepe açıları arasındaki bağıntılar ilk olarak bu çalışmada ele alınmıştır.

2. KÜRESEL SİMPLEXLER VE n-BOYUTLU SİNÜS

$S^n \subset R^{n+1}$ ve $S^n = \{x \in R^{n+1} \mid < x,x >= 1\}$ ile tanımlanan uzaya n-boyutlu küresel uzay denir[3]. $\overrightarrow{OP_i} = P_i$, i=1,2,...n+1 olmak üzere $P_1, P_2, ..., P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için $\overrightarrow{OP_i} = P_i$ vektörleri lineer bağımsız ve genel durumlu ise $\Omega_S =< P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} >$ bir konvekslik bölgesidir. Bu afin bağımsız (n+1) noktanın konvekslik bölgesine küresel simpleks denir. $\Omega_S =< P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} >$ ile gösterilir[4].

Teorem 2.1 $P_1, P_2, ..., P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için $\Omega_S =< P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} >$ küresel simpleksinin P_i tepesindeki n-hedral açının sinüsü ;

$$^{n}sin\,(P_i, P_1 P_2 \ldots \hat{P}_i \ldots P_{n+1}) = \frac{\left\| [P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}] \right\|^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left\| [P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_k, \ldots, P_{n+1}] \right\|} \quad \text{şeklindedir.}$$

İspat: $V^i_{P_j} = P_j - < P_i, P_j > P_i$, i,j =1,2,...,n+1 vektörleri P_i tepesinde ki P_j doğrultusundaki teğet vektörler olsun[4]. $\overrightarrow{N_i} = (-1)^{n+1-i}(V^i_{P_1} \times \ldots \times \hat{V}^i_{P_i} \times \ldots \times V^i_{P_{n+1}})$ ve $\overrightarrow{N_k} = (-1)^{n+1-k}(V^i_{P_1} \times \ldots \times \hat{V}^i_{P_k} \times \ldots \times P_i \times \ldots V^i_{P_{n+1}})$ vektörleri, $\overrightarrow{P_i}$ ve $\overrightarrow{V^i_{P_k}}$ (i, k =1,2,...,n+1) teğet vektörüne sahip ayrıtlara zıt (n-1)-yüzlerin normalleri olmak üzere,

$$P_i = \overrightarrow{e_i} = \frac{\overrightarrow{N_i}}{\left\| \overrightarrow{N_i} \right\|} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{e_k} = (-1)^{n+1-k} \frac{V^i_{P_1} \times \ldots \times \hat{V}^i_{P_k} \times \ldots \times P_i \times \ldots \times V^i_{P_{n+1}}}{\left\| V^i_{P_1} \times \ldots \times \hat{V}^i_{P_k} \times \ldots \times P_i \times \ldots \times V^i_{P_{n+1}} \right\|} = \frac{\overrightarrow{N_k}}{\left\| \overrightarrow{N_k} \right\|}, \quad k = 1,2,\ldots, n+1$$

vektörleri de birim normallerdir[5,6]. Şekil 1 de P_1 noktasındaki tepe açısı görülmektedir.

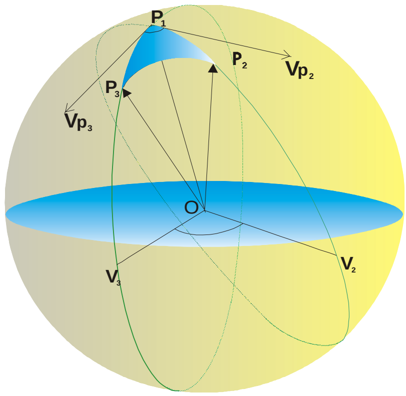
Buradan,

$$det\left(\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^i_{P_1} & \ldots & P_i & \ldots & V^i_{P_{n+1}} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\|N_1\| \ldots \|\hat{N}_i\| \ldots \|N_{n+1}\|} \underbrace{\det \begin{bmatrix} V^i_{P_2} \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V^i_{P_{n+1}} \end{bmatrix} \ldots \det \begin{bmatrix} V^i_{P_2} \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V^i_{P_{n+1}} \end{bmatrix}}_{\text{n-çarpım}}$$

olduğundan

$$det\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|N_1\|\ldots\|\hat{N}_i\|\ldots\|N_{n+1}\|}\left(det\begin{bmatrix} V^i_{P_2} \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V^i_{P_{n+1}} \end{bmatrix}\right)^{n-1} \tag{1}$$

bulunur.



Şekil 1. Küresel 2-simpleksin P_1 tepesindeki tepe açısı.

Diğer taraftan,

$$det\left(\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & \ldots & P_i & \ldots & N_{n+1} \end{bmatrix}\right) = \left(det\begin{bmatrix} V^i_{P_2} \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V^i_{P_{n+1}} \end{bmatrix}\right)^{n}$$

olduğundan ,

$$det\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix} = \left(det\begin{bmatrix} V^i_{P_2} \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ V^i_{P_{n+1}} \end{bmatrix}\right)^{n-1} \tag{2}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} det\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\|N_1\|\ldots\|\hat{N}_i\|\ldots\|N_{n+1}\|} det\begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ N_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{det\begin{bmatrix} N_1 & \ldots & P_i & \ldots & N_{n+1} \end{bmatrix}}{\|N_1\|\ldots\|\hat{N}_i\|\ldots\|N_{n+1}\|}. \end{aligned} \tag{3}$$

(2), (3) ifadeleri ile [7] den,

$$det\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{\left(det\left[V_{P_1}^i \ldots P_i \ldots V_{P_{n+1}}^i\right]\right)^{n-1}}{\|N_1\| \ldots \|\hat{N}_i\| \ldots \|N_{n+1}\|}$$

elde edilir. Yani;

$$det\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{\left\|\left[P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\right]\right\|^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left\|\left[P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_k, \ldots, P_{n+1}\right]\right\|}$$

bulunur. Buradan; P_i tepesindeki tepe açısının sinüsü ve yahut küresel simpleksler için n-boyutlu sinüs;

$${}^{n}sin(P_i, P_1P_2 \ldots \hat{P}_i \ldots P_{n+1}) = \frac{\left\|\left[P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\right]\right\|^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left\|\left[P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_k, \ldots, P_{n+1}\right]\right\|} \text{ olur.}$$

Teorem 2.2 $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için $\Omega_S = < P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} >$ küresel simpleks olsun. P_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilirse;

$$Gram(P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1})^{1/2} = \left\|\left[P_1, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1}\right]\right\|.$$

İspat: P_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilirse, $\vec{e_i} = (-1)^{n+1-i} \dfrac{P_1 \times P_2 \times \ldots \times \hat{P}_i \times \ldots \times P_{n+1}}{\left\|P_1 \times P_2 \times \ldots \times \hat{P}_i \times \ldots \times P_{n+1}\right\|}$ vektörü F_i yüzünün birim normali olmak üzere;

$$\det\left(\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix} \left[P_1 \cdots e_i \cdots P_{n+1}\right]\right) = \begin{vmatrix} < P_1, P_1 > & \ldots & < P_1, e_i > & \ldots & < P_1, P_{n+1} > \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ < e_i, P_1 > & \ldots & < e_i, e_i > & \ldots & < e_i, P_{n+1} > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < P_{n+1}, P_1 > & \ldots & < P_{n+1}, e_i > & \ldots & < P_{n+1}, P_{n+1} > \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$= \begin{vmatrix} < P_1, P_1 > & \ldots & < P_1, P_{n+1} > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < P_{n+1}, P_1 > & \ldots & < P_{n+1}, P_{n+1} > \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$= \text{Gram}(P_1, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1})$$

$$= \left|\det[< P_k, P_l >]\right|, \quad k,l \neq i \text{ ve } k,l = 1,2,\ldots,n+1$$

olur ki buradan;

$$\det\left(\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ P_{n+1} \end{bmatrix}\right) = Gram(P_1, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1})^{1/2} \tag{4}$$

bulunur. Yani; $Gram(P_1,\ldots,\hat{P}_i,\ldots,P_{n+1})^{1/2} = \left|[P_1,\ldots,\hat{P}_i,\ldots,P_{n+1}]\right|$

3. Küresel Polar Simpleksler İçin n-Boyutlu Sinüs

$\Omega_S =< P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} >$ küresel simpleks olsun. Ω_S simpleksinin polar duali ,

$$\vec{e_i} = (-1)^{n+1-i} \frac{P_1 \times \ldots \hat{P}_i \times \ldots \times P_{n+1}}{\left\| P_1 \times \ldots \hat{P}_i \times \ldots \times P_{n+1} \right\|} \quad i = 1,2,\ldots,n+1$$

ler P_i tepelerine zıt yüzlerin birim normalleri olmak üzere $\Omega_S^d =< e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} >$ simpleksidir. $V_{e_j}^i = e_j - < e_i, e_j > e_i$, $i,j = 1,2,\ldots,n+1$ vektörleri e_i tepesinde ki e_j doğrultusundaki teğet vektörlerdir.

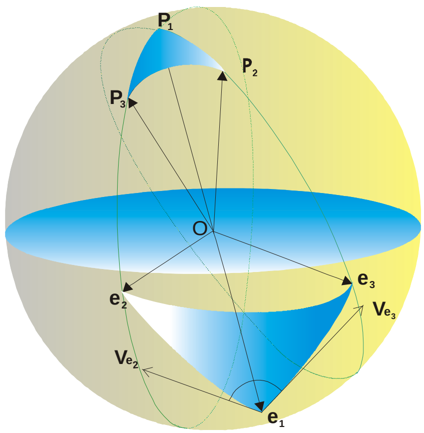
Teorem 3.1 $\Omega_S =< P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} >$ küresel simpleksinin poları $\Omega_S^d =< e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} >$ simplexi olmak üzere, e_i tepesindeki tepe açısının n-boyutlu sinüs ü;

$$^n sin(e_i, e_1 e_2 \ldots \hat{e}_i \ldots e_{n+1}) = \frac{\left|[e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}]\right|^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left|[e_1, e_2, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, e_{n+1}]\right|} .$$

İspat: $\overrightarrow{N_i^d} = (-1)^{n+1-i}(V_{e_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{e_i}^i \times \ldots \times V_{e_{n+1}}^i)$ ve $\overrightarrow{N_k^d} = (-1)^{n+1-k}(V_{e_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \ldots \times e_i \times \ldots \times V_{e_{n+1}}^i)$ vektörleri, e_i ve $V_{e_k}^i$ $(i,k = 1,2,\ldots,n+1)$ teğet vektörüne sahip ayrıtlara zıt (n-1)-yüzlerin normalleri olmak üzere,

$$\overrightarrow{e_i^d} = \vec{e_i} = \frac{\overrightarrow{N_i^d}}{\left\|\overrightarrow{N_i^d}\right\|} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{e_k^d} = (-1)^{n+1-k} \frac{V_{e_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \ldots \times e_i \times \ldots \times V_{e_{n+1}}^i}{\left\| V_{e_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \ldots \times e_i \times \ldots \times V_{e_{n+1}}^i \right\|} = \frac{\overrightarrow{N_k^d}}{\left\|\overrightarrow{N_k^d}\right\|}, \quad k = 1,2,\ldots, n+1$$

vektörleri de birim normallerdir.



Şekil 2. Polar 2-simpleksin e_1 tepesindeki tepe açısı.

Buradan;

$$det\left(\begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{e_1}^i & \dots & e_i & \dots & V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{\left\|N_1^d\right\|\dots\left\|\hat{N}_i^d\right\|\dots\left\|N_{n+1}^d\right\|}\underbrace{det\begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}\dots det\begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}}_{\text{n-çarpım}}$$

olduğundan

$$det\begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix}=\frac{1}{\left\|N_1^d\right\|\dots\left\|\hat{N}_i^d\right\|\dots\left\|N_{n+1}^d\right\|}\left(det\begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}\right)^{n-1} \tag{5}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$det\left(\begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1^d & \dots & e_i & \dots & N_{n+1}^d \end{bmatrix}\right)=\left(det\begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}\right)^{n}$$

ifadesinden ;

$$det\begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix}=\left(det\begin{bmatrix} V_{e_2}^i \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ V_{e_{n+1}}^i \end{bmatrix}\right)^{n-1} \tag{6}$$

elde edilir. O halde ,

$$det\begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix}=\frac{1}{\left\|N_1^d\right\|\dots\left\|\hat{N}_i^d\right\|\dots\left\|N_{n+1}^d\right\|}det\begin{bmatrix} N_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ N_{n+1}^d \end{bmatrix}$$
$$=\frac{det\begin{bmatrix} N_1^d & \dots & e_i & \dots & N_{n+1}^d \end{bmatrix}}{\left\|N_1^d\right\|\dots\left\|\hat{N}_i^d\right\|\dots\left\|N_{n+1}^d\right\|}. \tag{7}$$

(6), (7) ifadeleri ile [7] den,

$$det\begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{\left(det\left[V_{e_1}^i \dots e_i \dots V_{e_{n+1}}^i\right]\right)^{n-1}}{\left\|N_1^d\right\| \dots \left\|\hat{N}_i^d\right\| \dots \left\|N_{n+1}^d\right\|}$$

elde edilir.Yani;

$$det\begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = \frac{\left\|\left[e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\right]\right\|^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n+1} \left\|\left[e_1, e_2, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_{n+1}\right]\right\|}$$

bulunur. Buradan küresel polar simpleksler için n-boyutlu sinüs;

$$^{n}sin(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_1\mathrm{e}_2 \dots \hat{\mathrm{e}}_i \dots \mathrm{e}_{n+1}) = \frac{\left\|\left[\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_{n+1}\right]\right\|^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n+1} \left\|\left[\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \hat{\mathrm{e}}_k, \dots, \mathrm{e}_{n+1}\right]\right\|}$$ olur.

Teorem 3.2 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in S^n \subset R^{n+1}$ için $\Omega_S = < P_1, P_2, \dots, P_{n+1} >$ küresel simpleks olsun. Ω_S 'nin polar'ı $\Omega_S^d = < e_1, e_2, \dots, e_{n+1} >$ simpleksi olmak üzere e_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilirse;

$$Gram(e_1e_2 \dots \hat{e}_i \dots e_{n+1})^{1/2} = \left\|\left[e_1, \dots \hat{e}_i, \dots, e_{k+1}\right]\right\|.$$

İspat: e_i tepesine zıt yüz F_i ile gösterilirse; $\vec{e}_i^{\,d} = (-1)^{n+1-i} \dfrac{e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n+1}}{\left\|e_1 \times e_2 \times \dots \times \hat{e}_i \times \dots \times e_{n+1}\right\|}$ vektörü F_i yüzünün birim normali olmak üzere;

$$det\left(\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \left[e_1 \cdots e_i^d \cdots e_{n+1}\right]\right) = \begin{vmatrix} < e_1, e_1 > & \dots & < e_1, e_i^d > & \dots & < e_1, e_{n+1} > \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ < e_i^d, e_1 > & \dots & < e_i^d, e_i^d > & \dots & < e_i^d, e_{n+1} > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < e_{n+1}, e_1 > & \dots & < e_{n+1}, e_i^d > & \dots & < e_{n+1}, e_{n+1} > \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$= Gram(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})$

$= \left| det[< e_k, e_l >] \right|$, $k,l \neq i$ ve $k,l = 1,2,\dots,n+1$ olur. Buradan;

$$\left(det\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i^d \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix}\right) = Gram(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1})^{1/2} \tag{8}$$

bulunur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

P_i ve $V_{P_k}^i$ vektörleri *O, P_i, P_k* tarafından belirlenen düzlemde olduklarından Teorem 2.1 de ki

$N_i = (-1)^{n+1-i}(V_{P_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{P_i}^i \times \ldots \times V_{P_{n+1}}^i)$ ve $N_k = (-1)^{n+1-k}(V_{P_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{P_k}^i \times \ldots \times P_i \times \ldots \times V_{P_{n+1}}^i)$ ifadelerinde;

$P_i = e_i = \dfrac{N_i}{\|N_i\|}$ ve $\overrightarrow{e_k} = (-1)^{n+1-k}\dfrac{P_1 \times \ldots \times \hat{P}_k \times \ldots \times P_i \times \ldots \times P_{n+1}}{\left\|P_1 \times \ldots \times \hat{P}_k \times \ldots \times P_i \times \ldots \times P_{n+1}\right\|} = \dfrac{N_k}{\|N_k\|}$, *i, k = 1,2,..., n+1* alınırsa;

$$det\left(\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \cdots e_i \cdots e_{n+1} \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} <e_1,e_1> & \ldots & <e_1,e_i> & \ldots & <e_1,e_{n+1}> \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ <e_i,e_1> & \ldots & <e_i,e_i> & \ldots & <e_i,e_{n+1}> \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <e_{n+1},e_1> & \ldots & <e_{n+1},e_i> & \ldots & <e_{n+1},e_{n+1}> \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

eşitliğinden;

$$\left(det\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{vmatrix} <e_1,e_1> & \ldots & <e_1,e_{n+1}> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <e_{n+1},e_1> & \ldots & <e_{n+1},e_{n+1}> \end{vmatrix}_{n\times n}$$

elde edilir. Buradan da;

$$\left(det\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{bmatrix}\right) = Gram(e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_{n+1})^{1/2}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafına n-boyutlu polar simplexin e_i *tepesine zıt F_i yüzünün n-boyutlu polar sinüsü denir* ve

$${}^n pol\,sin(e_1 e_2 \ldots \hat{e}_i \ldots e_{n+1}) = \left\|[e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_{n+1}]\right\|$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde e_i ve $V_{e_k}^i$ vektörleri *O, e_i, e_k* tarafından belirlenen düzlemde olduklarından Teorem 3.1 de;

$$N_i^d = (-1)^{n+1-i}(V_{e_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{e_i}^i \times \ldots \times V_{e_{n+1}}^i) \text{ ve } N_k^d = (-1)^{n+1-k}(V_{e_1}^i \times \ldots \times \hat{V}_{e_k}^i \times \ldots \times e_i \times \ldots \times V_{e_{n+1}}^i)$$

vektörleri, e_i ve $V_{e_k}^i$ teğet vektörüne sahip ayrıta zıt (n-1)-yüzlerin normalleri olmak üzere

$$e_i^d = P_i = \frac{N_i}{\|N_i\|} \text{ ve } e_k^d = (-1)^{n+1-k} \frac{e_1 \times e_2 \times \ldots \times \hat{e}_k \times \ldots \times e_{n+1}}{\|e_1 \times e_2 \times \ldots \times \hat{e}_k \times \ldots \times e_{n+1}\|} = P_k, \quad k=1, 2, \ldots, n+1 \text{ alınırsa;}$$

$$det\left(\begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^d & \ldots & e_i & \ldots & e_{n+1}^d \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} <e_1^d, e_1^d> & \ldots & <e_1^d, e_i> & \ldots & <e_1^d, e_{n+1}^d> \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ <e_i, e_1^d> & \ldots & <e_i, e_i> & \ldots & <e_i, e_{n+1}^d> \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <e_{n+1}^d, e_1^d> & \ldots & <e_{n+1}^d, e_i> & \ldots & <e_{n+1}^d, e_{n+1}^d> \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\left(det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{vmatrix} <e_1^d, e_1^d> & \ldots & <e_1^d, e_{n+1}^d> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <e_{n+1}^d, e_1^d> & \ldots & <e_{n+1}^d, e_{n+1}^d> \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$= \begin{vmatrix} <P_1, P_1> & \ldots & <P_1, P_{n+1}> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <P_{n+1}, P_1> & \ldots & <P_{n+1}, P_{n+1}> \end{vmatrix}_{n\times n}$$

olur. Sonuç olarak,

$$det \begin{bmatrix} e_1^d \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_{n+1}^d \end{bmatrix} = Gram(P_1, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1})^{1/2}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafına n-boyutlu simplexin P_i *tepesine zıt* F_i *yüzünün n-boyutlu polar sinüsü* denir ve

$${}^n pol\, sin(P_1 P_2 \ldots \hat{P}_i \ldots P_{n+1}) = \left\| \left[P_1, \ldots \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1} \right] \right.$$

şeklinde gösterilir.

Sonuç 4.1 ${}^n sin(P_i, P_1 P_2 \ldots \hat{P}_i \ldots P_{n+1}) = {}^n \mathrm{pol}\, sin(\mathrm{e}_1 \mathrm{e}_2 \ldots \hat{\mathrm{e}}_i \ldots \mathrm{e}_{n+1}) = \dfrac{\left\| [\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n+1}] \right.^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left\| [\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \hat{\mathrm{P}}_k, \ldots, \mathrm{P}_{n+1}] \right.}$

İspat: Teorem 2.1 ve Teorem 3.2 den açıktır.

Sonuç 4.2 ${}^n sin(e_i, e_1 e_2 \ldots \hat{e}_i \ldots e_{n+1}) = {}^n pol\, sin(P_1 P_2 \ldots \hat{P}_i \ldots P_{n+1}) = \left\| [P_1, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1}] \right.$

İspat: Teorem 2.2 ve Teorem 3.1 den açıktır.

Bu sonuçlara dayanılarak [2] de verilen aşağıdaki teoremin yeni bir ispatı kolayca görülebilir.

Teorem 4.1 $\Omega_S =< P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} >$ küresel simpleksinin ($P_s, P_{s+1} \ldots P_{n+1} P_1 \ldots P_{s-1}$) tepesini P_s ile P_s tepesine zıt *(n-1)*-yüzü F_s ile gösterilirse;

$$\frac{{}^n pol\, sin\, F_1}{{}^n sin\, P_1} = \frac{{}^n pol \sin F_2}{{}^n \sin P_2} = \ldots = \frac{{}^n pol\, sin\, F_{n+1}}{{}^n sin\, P_{n+1}} .$$

İspat:

$${}^n pol\, sin\, F_i = {}^n pol\, sin(P_1 P_2 \ldots \hat{P}_i \ldots P_{n+1}) = \left\| \left[P_1, \ldots, \hat{P}_i, \ldots, P_{n+1} \right] \right\|, \; i = 1,2,...,n+1 \qquad (9)$$

olur. Diğer taraftan Teorem 2.1 den;

$${}^n sin\, P_i = {}^n sin(P_i, P_1 P_2 \ldots \hat{P}_i \ldots P_{n+1}) = \frac{\left\| \left[P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} \right] \right\|^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left\| \left[P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_k, \ldots, P_{n+1} \right] \right\|} \qquad i=1,2,...,n+1 \qquad (10)$$

ifadesi göz önüne alınarak, (9) ifadesi (10) ifadesine taraf tarafa bölünürse

$$\frac{{}^n pol\, sin\, F_i}{{}^n sin\, P_i} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \left\| \left[P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_k, \ldots, P_{n+1} \right] \right\|}{\left\| \left[P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} \right] \right\|^{n-1}} , \; i = 1,2,...,n+1$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafı *i*-den bağımsız olduğundan;

$$\frac{{}^n pol\, sin\, F_1}{{}^n sin\, P_1} = \frac{{}^n pol \sin F_2}{{}^n \sin P_2} == \ldots = \frac{{}^n pol\, sin\, F_{n+1}}{{}^n sin\, P_{n+1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \left\| \left[P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_k, \ldots, P_{n+1} \right] \right\|}{\left\| \left[P_1, P_2, \ldots, P_{n+1} \right] \right\|^{n-1}}$$

olduğu görülür. Bu ise teoremin ispatıdır..

KAYNAKLAR

1. d'Ovidio, E. "*Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvature constante*", Mem.R. Acc. Lincei(3) 1, 929-986(1877).
2. Erikson, F. *"The law of sines for tedrahedra and n-simplices"* Geometriae Dedicata 7, 71-80(1978).
3. Ratcliffe, J.G., "*Foundations of Hyperbolic Manifolds*",s:36,Springer-Verlag , Berlin, 1994.
4. Vinberg, E.B., "*Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*" 29,s:84, Springer-Verlag, (1993)
5. Shaw, R. "*Vector Cross Product in n-dimensions"*, Int.J.Math. Ed.Sci.Tec. 18, 803-816,(1987.)
6. Cho, E. C. *"The generalized cross product and the volume of a Simplex"*, Appl.Math.Lett.,4(6),51-53,(1991).
7. Berger, M. *"Geometry I",*s:197, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.