Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **22**(1-2) 179-*183* (2006)
http://fbe.erciyes.edu.tr/
ISSN 1012-2354

YAKIN-HALKALAR İÇİN BİR KUVVETLİ KALITSAL RADİKAL

Emin AYGÜN[a*], Akın Osman ATAGÜN[b]

[a]*Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 38039 KAYSERİ*
[b]*Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 66100 YOZGAT*

ÖZET

Bu makalede, yakın-halkalarda Holcombe tarafından tanımlanan $J_3(N)$ radikali ile yakından ilgili olan $J_{3u}(N)$ radikali çalışıldı. Ayrıca bu $J_{3u}(N)$ radikalinin bazı ilginç özelliklere sahip ve kuvvetli kalıtsal radikal olduğu gösterildi.

Anahtar kelimeler : Yakın-halka, Jacobson-tip radikaller, N-gruplar.

A STRONGLY HEREDITARY RADICAL FOR NEAR-RINGS

ABSTRACT

In this paper, a radical, $J_{3u}(N)$, for near-ring N that is closely related to the radical $J_3(N)$ introduced by Holcombe is studied. Furthermore, it is shown that $J_{3u}(N)$ is a strongly hereditary radical and has some interesting properties.

Keywords: Near-ring, Jacobson-type radicals, N-groups.

***E-posta:** eaygun@erciyes.edu.tr

1. GİRİŞ

Bir N cümlesi, "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

a) $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,
b) $(N,.)$ bir yarı grup,
c) $\forall x, y, z \in N$ için $(x+y).z = x.z + y.z$

Burada c) şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Bu makalede tüm yakın-halkalar, sağ yakın-halka olarak alınmıştır. N bir yakın-halka olsun. $N_0 = \{n \in N \mid n0 = 0\}$ cümlesine N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı denir. Eğer $N = N_0$ ise N ye bir sıfır-simetrik yakın-halka adı verilir.

N bir yakın-halka ve I, N nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $IN \subseteq I$
b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I 'ya N yakın-halkasının bir ideali denir ve $I \lhd N$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I N nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I N nin bir sol ideali denir ve sırasıyla $I \lhd_r N$ ve $I \lhd_l N$ ile gösterilir.

Halkalarda modül kavramının, yakın-halkalara taşınmasıyla elde edilmiş olan N -grup kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(G, +)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mu : N \times G & \to & G \\ (n, g) & \to & ng \end{array}$$

olmak üzere eğer $\forall x, y \in N$ ve $\forall g \in G$ için,

$$(x+y)g = xg + yg$$

ve

$$(xy)g = x(yg)$$

şartları sağlanıyorsa, (G, μ) ikilisine bir N –grup denir. N bir yakın-halka ve G bir N -grup olsun. G nin $NH \subseteq H$ şartını sağlayan H alt grubuna, N-altgrubu denir ve $H \leq_N G$ ile gösterilir.
Aşağıdaki tanım, verilecek yeni yapılar için temel teşkil edecektir.

Tanım 1.1. N bir yakın-halka ve $A \subseteq N$ olsun. Eğer $NA \leq_N N$ ise, yani $(NA, +)$, $(N, +)$ nın bir alt grubu ise, A ya bir N-grupsal denir ve $A \leq_c N$ ile gösterilir.

Lemma 1.2. N bir yakın-halka olsun. Bu durumda N, $\{0\}$ve tüm tek nokta cümleleri aşikar N-grupsallardır.

İspat: $\forall n \in N$ için $(Nn, +)$, $(N, +)$ nın bir alt grubudur. Gerçekten, N bir sağ yakın-halka olduğundan $\forall x, y \in N$ için $xn - yn = (x-y)n \in Nn$ dir.

Yakın-halkada tanımı yapılan bu *N*-grupsal kavaramı, halkalarda dahi farklı bir yapı teşkil etmektedir. Z tam sayılar halkası alınırsa tanımdan da görüleceği gibi {0,2} ve {0,3} alt cümleleri *Z*-grupsaldır ancak {0,2,3} alt cümlesi bir *Z*-grupsal değildir. Buradan grupsalların birleşiminin yine bir grupsal olmak zorunda olmadığı görülür.

N nin bir *K* alt cümlesi için $NK \subseteq K$ oluyorsa *K* ya sol invaryant, aynı zamanda $KN \subseteq K$ şartıda sağlanıyorsa invaryant denir. Eğer $Ng = \{ ng : n \in N \} = G$ olacak şekilde $g \in G$ varsa *G N*-grubuna monojenik *N-grup* denir. *G* monojenik ve $\forall g \in G$ için $Ng = G$ veya $Ng = 0$ oluyorsa *G* ye kuvvetli monojenik *N*-grup denir. *G* monojenik *N*-grup olmak üzere, eğer *G* nin 0 ve kendi dışında ideali yoksa 0-tipinde, *G* kuvvetli monojenik, *0* ve kendi dışında ideali yoksa *1*-tipinde, *0* ve kendi dışında *N*-altgrubu yoksa *2*-tipinde, *G* *2*-tipinde ve $\forall\, g, h \in G$, $\forall\, n \in N$ için $ng = nh$ iken $g = h$ oluyorsa *G* ye 3-tipinde denir.

Lemma 1.2 den sonra *N*-grup aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 1.3 *G 3*-tipinde bir *N*-grup, $\forall\ A, B \leq_c N\ \ g, h \in G$ ve $\forall\, n \in N$ için $nAg = nBh$ iken $Ag = Bh$ oluyorsa *G* ye *3u*-tipinde denir.

Açıkça görüleceği gibi *G N*-grubu için

$$3u\text{- tipinde} \Rightarrow 3\text{- tipinde} \Rightarrow 2\text{- tipinde} \Rightarrow 1\text{- tipinde} \Rightarrow 0\text{- tipinde}$$

olur.

Bir *N* yakın-halkasını *N* nin bir $\rho(N)$ idealine götüren ρ dönüşümüne , *N* ve $N^{`}$ herhangi yakın-halkalar olmak üzere

a) Her bir $f : N \to N^{`}$ homomorfizmi için $f(\rho(N)) \subseteq \rho(f(N))$

b) $\rho\left(N \big/ \rho(N) \right) = 0$

şartlarını sağlıyorsa bir radikal denir.

Tanım 1.4 *N* bir yakın-halka ρ bir radikal olmak üzere $\forall\ I \triangleleft N$ için $\rho(I) = I \cap \rho(N)$ ise $\rho(N)$ radikaline *N* nin kalıtsal radikali denir.

Tanım 1.5 *N* yakın-halkası için $J_{3u}(N)$ radikali, $(0 : G) = \{ n \in N :\ \forall\, g \in G$ için $ng = 0 \}$ olmak üzere

$$J_{3u}(N) = \bigcap_{3u-\ tipinde\ N^G} (0 : G)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.6 *N* bir yakın halka ve $I \triangleleft N$ olsun. Eğer $\forall\ A \leq_c I \Leftrightarrow A \leq_c N$ ise bu taktirde *I* ya *c*-ideal denir ve $I \triangleleft_c N$ şeklinde gösterilir.

$J_0(N), J_1(N), J_2(N)$ radikalleri Kaarli, Betsch, Laxton, Holcombe ve Groenewald gibi matematikçiler tarafından çalışılmıştır. Holcombe, $J_3(N)$ radikali üzerinde çalışmış ve *N* her hangi bir yakın-halka olmak üzere $J_3(N)$ radikalinin bir kalıtsal radikal olduğunu ispatlamıştır. Bu makalede kuvvetli kalıtsal radikal tanımını verilip $J_{3u}(N)$ radikalinin *N* nin bir kuvvetli kalıtsal radikali olduğu gösterilecektir. Bu çalışmada; tanımları verilmeyen kavramlar için [1] referans olarak gösterilebilir.

2. KUVVETLİ KALITSAL RADİKAL

Tanım 2.1 N bir yakın-halka ρ bir radikal olmak üzere $\forall\ I \triangleleft_c N$ için $\rho(I) = I \cap \rho(N)$ ise $\rho(N)$ radikaline N nin kuvvetli kalıtsal radikali denir.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere her hangi bir radikal kalıtsal ise kuvvetli kalıtsaldır.

Lemma 2.2 N bir sıfır-simetrik yakın-halka ve I, N nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer G, *3u*-tipinde bir *I*-grup ise bu taktirde G bir *N*-gruptur.

İspat : G bir *3u*-tipinde *I*-grup olduğundan aynı zamanda *3*-tipindedir. G bir *3*-tipinde *I*-grup olduğunda bunun *N*-grup olduğu Holcombe tarafından gösterilmiştir (Holcombe, 1982). N nin sıfır simetrik olduğu bilindiğine göre G bir *N*-gruptur.

Önerme 2.3 N bir sıfır-simetrik yakın-halka ve I, N nin sıfırdan farklı bir *c*-ideal olsun. Eğer G *3u*-tipinde bir *I*-grup ise bu taktirde G *3u*-tipinde bir *N*-gruptur.

İspat : G *3u*-tipinde bir *I*-grup olduğundan aynı zamanda *3*-tipindedir. Lemma 2(Holcombe, 1982) den G, *3*-tipinde bir *N*-gruptur. *3u*-tipinde olması için $\forall\ A, B \leq_c N$, $g, h \in G$ ve $\forall\ n \in N$ için $nAg = nBh$ iken $Ag = Bh$ şartını sağlaması gerekir. G, *3u*-tipinde bir *I*-grup olduğundan $g = i_1 g^{`}$ ve $h = i_2 g^{`}$ olacak şekilde $i_1, i_2 \in I$ ve $0 \neq g^{`} \in G$ vardır. O halde $nAg = nBh$ yerine $nA\, i_1 g^{`} = nB\, i_2 g^{`}$ yazılabilir. $I \triangleleft_c N$ olduğundan $A, B \leq_c N$ iken $A\, i_1, B\, i_2 \leq_c I$ . $nA\, i_1 g^{`} = nB\, i_2 g^{`}$ eşitliği $\forall\ n \in N$ için sağlandığından özel olarak $n = i$ , $i \in I$ için de sağlanır ve dolayısıyla $iA\, i_1 g^{`} = iB\, i_2 g^{`}$ olur. $G$, *3u*-tipinde bir *I*-grup olduğundan $iA\, i_1 g^{`} = iB\, i_2 g^{`}$ iken $A\, i_1 g^{`} = B\, i_2 g^{`}$ olur. O halde tanımdan $A\, i_1 = B\, i_2$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

3u-tipinde *N*-grup tanımından da görüleceği gibi $J_3(N) \subseteq J_{3u}(N)$ dır. Aşağıdaki önerme ile eşitlik durumu verilmiştir.

Önerme 2.4 N birimli bir yakın-halka ise bu taktirde $J_3(N) = J_{3u}(N)$.

İspat : G *3*-tipinde bir *N*-grup ve kabul edelim ki $\forall\ A, B \leq_c N$, $g, h \in G$ ve $\forall\ n \in N$ için $nAg = nBh$ olsun. $\forall\ n \in N$ için eşitlik doğru ve N birim elemanlı bir yakın-halka olduğundan $n = 1$ içinde doğrudur.

$$1Ag = 1Bh \ \Rightarrow\ Ag = Bh$$

olur ki ispat tamamlanmıştır.

Önerme 2.5 N bir yakın-halka, $I \triangleleft_c N$ ve G, *3u*-tipinde bir *N*-grup olsun. $I \not\subset (0 : N)$ ise bu taktirde G, *3u*-tipinde bir *I*-gruptur.

İspat : G, *3u*-tipinde bir *N*-grup olsun. Aynı zamanda G, *3*-tipinde de bir *N*-grup olacağından Lemma 3 (Holcombe, 1982) den G, *3*-tipinde bir *I*-gruptur. O halde ispat için $\forall\ A, B \leq_c I$, $g, h \in G$ ve $\forall\ i \in I$ için $iAg = iBh$ iken $Ag = Bh$ olduğu gösterilmelidir. Tanım 1.6. dan $A, B \leq_c I$ ise $A, B \leq_c N$ dir. Ayrıca G, *3u*-tipinde bir *N*-grup olduğundan $g, h \in G$ ve $\forall\ n \in N$ için $nAg = nBh$ iken $Ag = Bh$ dır. $\forall\ n \in N$ için doğru olduğundan $n = i$ içinde doğru olur ki ispat tamamdır.

Şimdi ispatlanan bu önermelerin ışığında, $J_{3u}(N)$ radikalinin, N nin bir kuvvetli kalıtsal radikali olduğunu gösteren Teoremi verilecektir.

Teorem 2.6 N sıfır-simetrik bir yakın-halka olmak üzere $J_{3u}(N)$, N nin bir kuvvetli kalıtsal radikalidir.

İspat : Kabul edelim ki I, N nin sıfırdan farklı bir *c*-ideali olsun. Bu durumda açık olarak

$$(0:G)_N \cap I = (0:G)_I \tag{1}$$

dir. Önerme 2.3. ve (1) den

$$J_{3u}(N) \cap I \subseteq J_{3u}(I) \tag{2}$$

olur. Eğer G, $IG \neq 0$ olacak şekilde *3u*-tipinde bir *N*-grup ise bu taktirde Önerme 2.6 dan G , *3u*-tipinde bir *I*-grup olacaktır. Bu durumda

$$J_{3u}(N) \subseteq I \cap \bigcap_{\substack{3u \ tipinde \ N^G \\ IG \neq 0}} (0:G)_N$$

olur.

$$J_{3u}(N) = \bigcap_{\substack{3u \ tipinde \ N^G \\ IG \neq 0}} (0:G)_N \cap \bigcap_{\substack{3u \ tipinde \ N^G \\ IG = 0}} (0:G)_N$$

ve

$$I \cap \{ n \in N \ : \ nG \subseteq (0) , IG = (0) \} = I$$

olacağından

$$J_{3u}(I) \subseteq I \cap J_{3u}(N) \tag{3}$$

elde edilmiş olur ki (2) ve (3) den ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.
2. Holcombe, W. L. M., A Hereditary Radical For Near-Rings, Stu. Sci. Math. 17, 453-456, 1982.
3. Kaarli, K., Radicals in near-rings, Tartu Riikl. Ül. Toimmesied Vih. 390, 134-171, 1976
4. Betsch, G., Ein Radical fr Fastringe, Math. Z., 78, 86-90, 1962.
5. Laxton, R., A radical and its theory for distriibutively generated near-rings, J.London Math. Soc. 38, 40-49, 1963