Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **22**(1-2) 194-202 (2006)
http://fbe.erciyes.edu.tr/
ISSN 1012-2354

ÖKLİD UZAYINDA GENEL CAYLEY DÖNÜŞÜMÜ VE DÖNME MATRİSLERİ

Bahaddin BÜKCÜ*

Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Matematik Bölümü, 60250, Tokat,TÜRKİYE

ÖZET

Bu çalışmada, bir S anti-simetrik matrisi için Cayley dönüşümü tanımlandı [1]. Anti-simetrik matrislerle vektörler arasındaki bazı bağıntılar verildi. Daha sonra, bir F dönüşümü tanımlandı. F dönüşü için $f(S) = I + S$ seçildiğinde, $F(S)$ nin Cayley dönüşümüne karşılık geldiği gösterildi. $f(S) = I - aS + bS^2$ seçilme durumu da, **Genel Cayley** dönüşümü olarak adlandırıldı. $F(S) = A$ matrisinin pozitif ortogonal olduğu ve $S \leftrightarrow s$ eksenini değişmez bıraktığı gösterildi. Böylece, F dönüşümünün **s** ekseni etrafında belli bir dönme yaptığı gösterildi. Ayrıca E^4, E^n dönme matrisleri belli şartlar altında elde edildi ve iki Cayley matrisinin çarpımına karşılık gelen eksen de bulundu.

Anahtar kelimeler: Cayley dönüşümü, Genel Cayley dönüşümü, Dönme matrisleri, Dönme eksen.

GENERAL CAYLEY MAPPING AT EUCLIDEAN SPACE AND ROTATION MATRICES

ABSTRACT

In this study, Cayley mapping for an skew symmetric matrix S is defined [1]. Some relations between skew-symmetric matrices and vectors are given and a mapping F is defined. For the mapping F, when $f(S) = I + S$, it is shown that matrix F corresponds to the Cayley mapping. When $f(S) = I - aS + bS^2$, F is called **General Cayley** mapping. Moreover, it is seen that $F(S) = A$ matrix is positive orthogonal and **s** axis is left unchanged by A. Thus F represents a rotation about the unit vector **s** through some angle. Besides, the rotation axis formula corresponding to the product of two Cayley matrices has been obtained from skew-symmetric matrices corresponding to orthogonal matrices.

Keywords: Cayley mapping, General Cayley mapping, Rotation matrices, Rotation axis.

***E-posta:** bukcu@gop.edu.tr

1. GİRİŞ

Öklid uzayında, dönme ve dönme eksenin bulunması, Geometrinin önemli kavramlarından biridir. E^3 de, dönme matrisi ve dönme ekseni ile ilgili olarak, Chong, Kantor, Room ve Taber tarafından çeşitli makaleler yayınlanmıştır [1,2,3,4]. Fakat bunların atıfta bulunduğu makaleler oldukça eski tarihlidir. Bu çalışmada, E^3 deki ifadelerin bulunmasında [1,2] den yararlanıldı fakat farklı bir teknik ve üslup içerisinde tekrar ifade edildi. E^4 ve E^n de dönme matrislerinin belli şartlar altında bulunuşu da makalenin içinde yer aldı. Ayrıca, iki Cayley matrisine karşılık gelen ekseninin bulunmasındaki süreç kısaca çalışmaya ilave edilerek bir bütünlük sağlandı. Bununla birlikte, dönme ekseninin bulunması tarafımızdan orijinal olarak verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 İnversi transpozuna eşit ve determinantı "+1" olan matrise, pozitif ortogonal matris denir. Böyle matrislerin cümlesi, *SO(n)* ile gösterilir. Ayrıca, $\det(A+I)\neq 0$ ise *A* matrisine Cayley matrisi denir [1].

Tanım 2.2 *F* cismi üzerinde bir vektör uzayı *V* ve *V* deki sıfırdan farklı vektörlerin cümlesi $V'=V-\{0\}$ cümlesi olsun. $\alpha,\beta\in V$ için $\beta=c\alpha$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $c\in F$ var ise $\alpha\approx\beta$ yazalım. Bu "$\approx$" bağıntısı V' de, bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik sınıflarının cümlesine *V* ye karşı gelen Projektif Uzay denir ve $P(V)$ ile gösterilir. Eğer $boyV=n+1$ ise $boyP(V)=n$ olarak tanımlanır. Hatta $P(F^{n+1})$ uzayına F^{n+1} üzerinden *n*-boyutlu standart projektif uzay denir ve $P^n(F)$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.3 *i, j* ve *k* sanal birimleri arasındaki çarpım kuralı, R^3 standart baz vektörlerinin, vektörel çarpımları arasındaki ilişki olsun. Bu durumda, reel kuaterniyonlar cümlesi,

$$Q=\left\{\ q=(a,b,c,d)\in R^4:\ q=a.1+bi+cj+dk;\ 1,a,b,c,d\in R,\ i\neq j, ij=-ji=k\,; i^2=j^2=k^2=ijk=-1\right\}$$

ile gösterilir. Bu cümlenin her bir elemanına reel kuaterniyon denir. Eğer *a=0* ise *q* vektör kuaterniyon olarak isimlendirilir. Kısalığın hatırı için *q* daha ziyade *q*=(*s,v*) ile gösterilir, "*s*" ye reel kuaterniyonun skalar kısmı ve "*v*" ye de vektör kısmı denir. Bu durumda, $q=(s,v)$ ve $q'=(s',v')$ iki reel kuaterniyonun, kuaterniyon çarpımı kısaca,

$$q\otimes q'=(s.s'-<v,v'>,\ sv'+s'v-v\times v') \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $s=s'=0$ ise yukarıdaki denklem

$$q\otimes q'=(-<v,v'>,-v\times v')$$

olur. Eğer $s=s'=1$ alınırsa, bu durumda,

$$q\otimes q'=(1-<v,v'>,v+v'-v\times v')$$

olur [2].

Lemma 2.4 *f* reel değişkenli, reel katsayılı bir polinom ve *A* bir kare matris olsun. $Au=\lambda u\,(u\neq 0)$ ise $f(A)u=f(\lambda)u$ 'dır. Başka bir ifadeyle, *A* matrisinin bir öz değeri λ ise $f(A)$ matrisinin bir öz değeri $f(\lambda)$ dır [1].

Lemma 2.5 S_{3x3} reel anti-simetrik matrisinin öz değerleri, imajiner eksen üzerindedir [1].

2.6 Anti-Simetrik Matrislerin Bazı Faydalı Özelikleri

Lemma 2.6 *S* ve *T*, üçüncü mertebeden iki reel anti-simetrik matrisler olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

a) $s \wedge t = ts^T - st^T$,

b) $ST = ts^T - t^T sI$ (t, 3x1 kolon matrisi ve *I* özdeşlik matrisidir.),

c) $S^2 = ss^T - s^T sI$,

d) $ST - TS = ts^T - st^T = t \otimes s - s \otimes t$, burada $s \otimes t$, *s* ve *t* vektörlerinin dyadic (tensör) çarpımını göstermektedir,

e) $s \wedge t = TS - ST$, burada *T* ve *S* sırasıyla, *t* ve *s* vektörüyle eşlenen anti-simetrik matrisler dir,

f) $\det(ST + I) = (1 - < s, t >)^2$.

Teorem 2.7 $a_0 \neq 0,\ \ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ reel katsayılı ve reel değişkenli bir polinom ve *S*, *3x3* tipinde bir antisimetrik matris ise o taktirde, $f(S)$ ve $f(-S)$ matrisleri regülerdir [6].

Teorem 2.8 $A = (I - S)^{-1}(I + S)$ tek mertebeden reel pozitif ortogonal matris ve S $_{nxn}$, anti-simetrik matris olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) $I \pm S$, $A + I$ matrisleri regüler fakat $A - I$ matrisi irregülerdir.

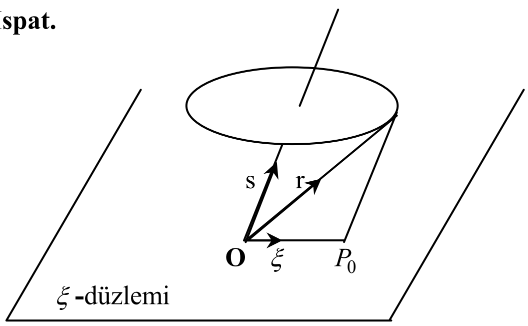
b) $A + I = 2(I - S)^{-1}$.

İspat. (a) Lemma 2.4 den dolayı $I \pm S$, $A + I$ matrisleri regüler fakat $A - I$ irregülerdir.

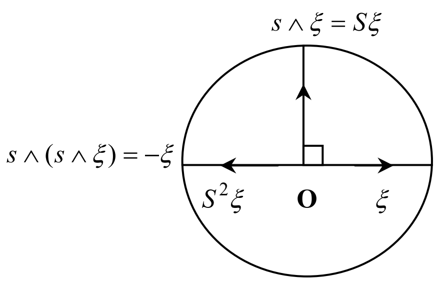
(b) $A = (I - S)^{-1}(I + S)$ **,** eşitliğin her iki tarafına *I* eklenerek basit bir manüpilasyonla istenilen bulunur.

Teorem 2.9 (Kuadratik Temsil) $R(s,\theta) = Ar$ dır. Burada, $A = I + (\sin\theta)S + (1 - \cos\theta)S^2 = f(S)$ ve *A* pozitif ortogonal bir matristir.

İspat.



Şekil 1.



Şekil 2.

R^3 deki bir *r* vektörü,

$$Sr = S\xi,\ S^2 r = S^2 \xi = -\xi, \tag{2.2}$$

olacak şekilde $r = ks + \xi$ biçiminde ifade edilebilir. *s* vektörü, ξ -düzleminin normalidir. *s* ve ξ birim vektörler olmak üzere, $\{s, s \times \xi\}$ cümlesi, ξ -düzleminin ortonormal bir bazıdır.

(i) *r* vektörü (*P* noktası) ξ düzleminde (yani *P*=*P$_o$*) olsun. Bu durumda,

$R(s,\theta)\xi = (\cos\theta)\xi + (\sin\theta)s \times \xi$

$R(s,\theta)\xi = (\cos\theta)\xi + (\sin\theta)S\xi$

$$R(s,\theta)\xi = (\cos\theta)\xi + (\sin\theta)Sr \tag{2.3}$$

yazılabilir.

(ii) r vektörü ξ düzleminde olmasın.

$$\begin{aligned}
R(s,\theta)r &= R(s,\theta)(ks+\xi) \\
&= R(s,\theta)(ks) + R(s,\theta)\xi \\
&= kR(s,\theta)s + R(s,\theta)\xi \\
&= ks + R(s,\theta)\xi \\
&= (r-\xi) + \left[(\cos\theta\xi + (\sin\theta)\,Sr\right] \\
&= r + (1-\cos\theta)(-\xi) + (\sin\theta)\,Sr \\
&= ks + R(s,\theta)\xi \\
&= (r-\xi) + \left[(\cos\theta\xi + (\sin\theta)Sr\right] \\
&= r + (1-\cos\theta)(-\xi) + (\sin\theta)Sr \\
&= rI + (1-\cos\theta)(S^2 r) + (\sin\theta)Sr \\
&= \left[I + (\sin\theta)S + (1-\cos\theta)S^2\right]r
\end{aligned}$$

olur. Böylece dönme matrisi

$$A = I + (\sin\theta)\,S + (1-\cos\theta)S^2 \tag{2.4}$$

bulunmuş olur. Şimdi, A matrisinin ortogonal ve determinantının da "+1" reel sayısı olduğunu gösterelim. Doğrudan bir hesaplamayla, $AA^T = A^T A = I$ olduğu görülür. $\det A = 1$ olduğu Lemma 2.4 den söylenebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuçlar: $A - A^{-1} = 2(\sin\theta)S$ ve $IzA = 1 + 2\cos\theta$ (A nın öz değerlerinin toplamıdır).

Teorem 2.10 T bir reel 3x3, antisimetrik matris ise $A = (I-T)^{-1}(I+T)$ bir pozitif ortogonal dönme temsil eder. Burada, A ya T nin Cayley dönüşümü denir [1].

Teorem 2.11 A, 3x3 reel pozitif ortogonal matris ve $T = (A-I)(A+I)^{-1}$ anti-simetrik bir matris ise T nin Cayley dönüşümü A dır [1].

3. GENEL CAYLEY DÖNÜŞÜMÜ

Teorem 3.1 S, $3x3$ tipinde bir antisimetrik matris, A $3x3$ tipinde pozitif ortogonal bir matris ve $a_0 \neq 0$, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ bir polinom fonksiyon olsunlar. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
so(3,R) &\xrightarrow{F} SO(3,R) \\
S &\longrightarrow F(S) = A = (f(S^T))^{-1} f(S)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanan, F dönüşümü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:
(a) $f(S)$ ve $f(S^T)$ matrislerinin çarpımı değişmelidir, (b) *detA*=1 dir. (c) A pozitif ortogonal bir matristir, (d) A pozitif ortogonal ise $\left[f(S^T)\right]^{-1} f(S) = f(S)\left[f(S^T)\right]^{-1}$ dır. Burada $so(3,R)$ ve $SO(3,R)$ sırasıyla anti-simetrik ve ortogonal matrislerin cümlesini göstermektedir.

İspat. (a) $n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{2k-1}$, $m=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{2k}$ olmak üzere, $f(S)=(a_0I+nS^2)+mS$ ve $f(S^T)=(a_0I+nS^2)-mS$ yazılabilir. Doğrudan bir hesaplamayla

$$f(S^T)f(S)=f(S)f(S^T)=(a_0I+nS^2)^2-mS^2$$

bulunur.

(b) $\det A=\det\left[f(S^T)\right]^{-1}.\det f(S)=1$ bulunur.
Bir kaç doğrudan hesaplamayla, $AA^T=A^TA=I$ bulunur. Dolayısıyla A ortogonaldir.

(d) (3.1) denkleminin inversinden,

$$A^{-1}=\left[f(S)\right]^{-1}f(S^T) \tag{3.2}$$

ve (3.1) eşitliğinin transpozundan,

$$A^T=f(S^T)\left[f(S)\right]^{-1} \tag{3.3}$$

elde edilir. A ortogonal matris olduğundan, (3.2) ve (3.3) eşitliklerinin sol tarafları aynı olur. Böylece istenilen eşitlik elde edilir. Yukarıdaki teoremin (a) ve (d) şıklarının bir sonucu olarak, şaşırtıcı gözükmesine rağmen A matrisi,

$$A=\frac{f(S)}{f(-S)} \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabilir.

3.2 $f(S)$ nin Farklı Durumları

1) $f(S)=I+S$, S' nin bir lineer polinomu olsun. Bu durumda A matrisi

$$A=\left[f(S^T)\right]^{-1}f(S)=(I-S)^{-1}(I+S)$$

biçimde olur. Böyle bir seçim bizi, f ' nin Cayley dönüşümüne götürür.

2) $f(S)=I-aS+bS^2$ (3.5)

olsun. Bu durumda $A=\left[(I-aS+bS^2)^T\right]^{-1}(I-aS+bS^2)=(I+aS+bS^2)^{-1}(I-aS+bS^2)$

biçiminde ifade edilebilir. $(I+aS+bS^2)$ ve $(I-aS+bS^2)$ matrisleri değişmeli olduklarından

$$A=\frac{I-aS+bS^2}{I+aS+bS^2} \tag{3.6}$$

şaşırtıcı bir şekilde de yazılabilir. (3.6) eşitliği matrislerin bölündüğünü değil, matrisler değişmeli olduklarından paydadaki bölen matrisinin, paydaki ifadenin sağ ve sol tarafına çarpan olarak yazılabileceğini gösterir. $f(S)$ 'nin bu seçimine de, ***Genel Cayley dönüşümü*** denir. Bu ifade yerinde bir ifadedir. $f(S)$ 'nin bu iki formun dışında yazılmasına gerek duyulmaz. Çünkü,

$$f(S)=I+a_1S+a_2S^2+a_3S^3+...+a_nS^n \tag{3.7}$$

olsaydı, bu durumda Lemma 2.6 dan, $S^3=-S$ ve basit bir manüpilasyon ile,

$$n=0,1,2,...\text{ için, } S^{2n+1}=(-1)^nS \text{ ve } S^{2n+2}=(-1)^nS^2 \tag{3.8}$$

bulunurdu. (3.8) eşitliklerinden dolayı (3.7) denklemi, (3.5) denklemine dönüşecekti. Böylece $f(S)$, lineer ve kuadratik formun dışında bir forma sahip olamaz.

3.3 Genel Cayley Dönüşümünün Geometrik Yorumu

S, 3x3 tipinde bir antisimetrik matris, bu matrisle birleştirilmiş vektör **s**=*(a,b,c)* ve **s** nin normu s olsun. *S* antisimetrik olduğundan öz değerleri; *0*, *is* ve *–is* dir. Lemma 2.4 den dolayı, *A* pozitif ortogonal matrisinin öz değerleri;

$$(f(0))^{-1}f(0),(f(is))^{-1}f(is),(f(-is))^{-1}f(-is)$$

dir. Daha açık ifadeyle, $f(0)=(1-a0+b0)^{-1}(1+a0+b0)=1^{-1}.1=1$

$$f(is)=\left[1-a(is)+b(is)^2\right]^{-1}(1+a(is)+b(is)^2)=\left[(1-bs^2)-ias)\right]^{-1}(1-bs^2)+ias)$$

$$=(p-iq)^{-1}(p+iq)=\frac{p+iq}{p-iq}=\frac{Z}{\overline{Z}}=\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}}=e^{i2\varphi}.$$

Burada $p=(1-bs^2)$ ve $q=as$ dir.

Benzer şekilde, $f(-is)=e^{-i2\varphi}$ bulunur. Ayrıca , $\tan\varphi=\frac{q}{p}=\frac{as}{1-bs^2}$

dır. Nihayet,

$$As=(I-aS+bS^2)^{-1}(I-aS+bS^2)s$$

$$=(I-aS+bS^2)^{-1}(Is-aSs+bS^2s)$$

$$As=(I-aS+bS^2)^{-1}s$$

$=(I+mS+nS^2)s \quad ;m,k\in R$ **, (** burada *m, k* birer reel sayıdır.)

$$As=s$$

bulunur. Böylece, *A* matrisinin, *R(s,2 φ)* dönmesini temsil ettiği görülür.

4. YÜKSEK BOYUTLU UZAYLARDA DÖNMELER

4.1 R^4 Dönmeler

R^2 deki dönmeler tek noktayı invaryant bırakırlar. R^3 deki dönmeler, bir doğruyu invaryant bırakırlar. Fakat R^4 deki dönmeler, 2-boyutlu bir düzlemi invaryant bırakırlar. Bu düzlem $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ and $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ ortonormal yer vektörleri tarafından gerilmiş olsun. *S* anti-simetrik matrisi, tensör notasyonu ile,

$$S_{ij}=e_{ijkl}u_kv_l\,, \qquad (1\le i,j\le 4) \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada e_{ijkl} , *(i,j,k,l)* gibi dört sembolün permütasyon tensörüdür.

(4.1) eşitliğinden, $s_{12}=\sum_{k,l=1}^{4}e_{12kl}\,u_kv_l=(e_{1234})u_3v_4+(e_{1243})u_4v_3=u_3v_4-u_4v_3$ ve

$s_{13}=\sum_{k,l=1}^{4}e_{13kl}\,u_kv_l=(e_{1324})u_2v_4+(e_{1342})u_2v_4=-u_2v_4+u_4v_2$ ve $s_{ii}=0,\quad 1\le i\le 4$ bulunur. Diğer bileşenler benzer şekilde hesaplanırsa, *S* matrisi,

$$S=\begin{bmatrix}0 & (u_3v_4-u_4v_3) & -(u_2v_4-u_4v_2) & (u_2v_3-u_3v_2)\\ -(u_3v_4-u_4v_3) & 0 & (u_1v_4-u_4v_1) & -(u_1v_3-u_3v_1)\\ (u_2v_4-u_4v_2) & -(u_1v_4-u_4v_1) & 0 & (u_1v_2-u_2v_1)\\ -(u_2v_3-u_3v_2) & (u_1v_3-u_3v_1) & -(u_1v_2-u_2v_1) & 0\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $Su=Sv=S(\lambda u+\mu v)=0 \quad ; \ (\lambda,\mu\in R)$ dır. Böylece, *S* matrisinin belirlediği θ radyanlık dönme,

$$R(u,v,\theta)=\exp(\theta S)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}S^k$$

ile gösterilebilinir. Şimdi bu dönme matrisini bulalım. *S* anti-simetrik matrisi

$$S^2+I_4=u\otimes u+v\otimes v \tag{4.3}$$

eşitliğini sağlar ve

$$S\left(S^2+I_4\right)=S\left(uu^T+vv^T\right)$$
$$S^3+S=\left(Su\right)u^T+\left(Sv\right)v^T$$

dır. Buradan $S^3=-S$ elde edilir. Böylece, *A* pozitif ortogonal matrisi

$$R(u,v,\theta)=\exp(\theta S)=A=I+\left(\sin\theta\right)S+(1-\cos\theta)S^2 \tag{4.4}$$

şeklinde bulunur. Son denklem, üç boyutlu Öklid uzaydaki dönme matrisi ile aynı formdadır.

4.2 R^n de Dönmeler

R^n içindeki dönmeler bir (*n-2*) boyutlu alt uzayı invaryant bırakırlar. Bu alt uzay, $u_1,u_2,...,u_{n-2}$ ortonormal vektörleri tarafından gerilmiş olsun. Tensör notasyonu kullanarak anti-simetrik matris, $S_{ij}=\sum_{k_1,...,k_n=1}^{n}\left(e_{k_1...k_{n2}}\right)\ u_{k_1}...u_{k_n}$ ile tanımlanır. Burada $e_{k_1...k_n}$, $(k_1,...,k_n)$ gibi *n* elemanın tekrarlı permütasyon tensörüdür. ***S*** matrisi,

$$S^2+I=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n-2}}\mathrm{u_k}\otimes\mathrm{u_k}=\mathrm{u_1}\otimes\mathrm{u_1}+...+u_{n-2}\otimes u_{n-2}$$

eşitliğini sağlar. Son eşitlik ***S*** matrisiyle çarpılırsa, $S^3=-S$ elde edilir. Böylece verilen şartlar altında, R^n deki dönme matrisi

$$R(u_1,u_2,...,u_{(n-2)},\theta)=\exp(\theta\quad S)=I+\left(\sin\theta\right)S+(1-\cos\theta)S^2$$

dır. Bu son eşitlik de yine, diğerleri ile benzer formdadır. Düzlemde dönme rolünü oynayan, $u_{(n-1)}$ ve u_n vektörleri hesaplanmak istenirse,

$$S^2u_k=\lambda_k u_k$$

eigen (öz) sistemi çözülür. $1\le k\le n-2$ için, öz değerler $\lambda_k=0$ ve öz vektörler daha önceden belirlenmiş (*n-2*) vektördür. $k=n-1$ ve $k=n-2$ için öz değerler "-1"dir ve bu iki öz değere karşılık gelen öz vektörler dönmenin yapıldığı düzlemi gererler.

5. DÖNMELERİN BİLEŞKESİ

A ve *B, 3x3* tipinde pozitif ortogonal reel iki matrisin belirlediği iki dönme verilsin. Bu durumda *BA* veya *AB* matris çarpımları da pozitif ortogonal olduklarından, bir dönme temsil ederler. Şimdi, *BA* matrisine karşılık gelen eksen nasıl bulunur? sorusuna cevap aranırsa, eksen $W=I-2(I-AB)^{-1}$ formülünden kolaylıkla bulunur. Cevabı *S* ve *T* matrisleri cinsinden bulalım. Bu durumu önce bir kaç örnekle açıklayalım.

Örnek 5.1 $A = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 29 & -20 & 28 \\ 28 & 35 & -4 \\ -20 & 20 & 35 \end{bmatrix}$ olsun. $\det A = 1$ ve $\det(A+I) \neq 0$ dır. Bu durumda A Cayley matrisine karşılık gelen anti-simetrik matris (**s** ekseni), $S = I - 2(I-A)^{-1}$ formülünden $s = \frac{1}{3}(1,2,2)$ olarak bulunur.

Örnek 5.2 $q_0 = \frac{1}{2}(1+j)$ kuaterniyonunu göz önüne alalım. Tanım 2.3 den dolayı

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \cos(\pi/3) + j\sin(\pi/3)$$

şeklinde yazılabilir. O zaman q_0 kuaterniyonu, dönme açısı ve dönme ekseninin bulunmasında daha da pratik bir rol oynar. Burada dönme açısı $\pi/3$ ve dönme ekseni $j = (0,1,0)$ vektörüdür.

Örnek 5.3 $q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$ ve $q_0' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ olsun. Bu durumda,

$$q_0 \otimes q_0' = \frac{1}{2}(1+i+j-k) = \cos(\pi/3) + \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j-k)(\cos\pi/3)$$

olur. O zaman, dönme açısı $\pi/3$ ve dönme ekseni, $(\sqrt{3})^{-1}(1,1,-1)$ vektörüdür
Şimdi çarpım matrisine karşılık gelen ekseni, verilen iki eksen cinsinden ifade edelim.

Teorem 5.1 *S* ve *T* (3x3), antisimetrik matrislerinin Cayley dönüşümü vasıtasıyla belirlediği iki Cayley matrisi sırasıyla, *A* ve *B* olsun. Bu durumda *BA=C,* Cayley matrisine karşılık gelen antisimetrik matris

$$W = \frac{S+T-ST+TS}{\sqrt{\det(I+ST)}} \tag{5.1}$$

dır.

İspat. *S* ve *T* (*3x3*), antisimetrik matrislerine karşılık tutulan eksenler sırasıyla ***s*** ve ***t*** vektörleri olsunlar. Lemma 2.6 nın (f) şıkkından dolayı $\sqrt{\det(I+ST)} = 1 - <s,t>$ bulunur. Üç boyutlu Öklid uzayındaki ***s*** ve ***t*** vektörlerini, *4* boyutlu bir uzayın içine, birinci bileşeni "1" olacak şekilde gömerek, vektörün projektif gösterimine (homogen koordinatlara) geçelim ve bu durumu, sırasıyla, $q = (1,s)$ ve $q' = (1,t)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$q \otimes q' = (1 - <s,t>,\ s + t - s \times t) \tag{5.2}$$

olur. Projektif koordinatlarda bir noktanın (vektörün) sıfırdan farklı reel katları, aynı noktayı (vektörü) gösterdiğinden (5.2) eşitliği

$$q \otimes q' = 1 - <s,t> \left(1,\ \frac{s+t-s\times t}{1-<s,t>}\right) \approx \left(1,\ \frac{s+t-s\times t}{1-<s,t>}\right) \tag{5.3}$$

biçiminde yazılabilir. (5.3) denklemi, kuaterniyon çarpımının homogen koordinatlarda ifadesidir. O halde normal koordinatlara geçersek,

$$q \otimes q' = \left(\frac{s+t-s\times t}{1-<s,t>}\right) = w$$

olur. Böylece *BA=C*, Cayley matrisine karşılık gelen vektör,

$$w = \left(\frac{s+t-s\times t}{1-<s,t>}\right) \tag{5.4}$$

dır. E^3 deki her vektör, bir antisimetrik matris ile eşlenebileceğinden dolayı, (5.4) denklemi matris notasyonu kullanılarak

$$W = \left(\frac{S + T - ST + TS}{\sqrt{\det(I + ST)}} \right) \tag{5.5}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bilgilendirme: Değerli tavsiyeleri için Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu'na ve Prof. Dr. Yusuf Yaylı'ya teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

1. Chong, F., & Andrews, R.J., Rotation Matrices, Australia Mathematical Society Gazette, Volume 26, Number 3, 2000.
2. Kantor, I. L., & Solodovnikow, A.S., Hypercomplex Numbers, Printed In The United States Of America, p. 16, 34-35,1989.
3. Room, T. G., The Composition Of Rotations In Euclidean Three-Space, American Math. Monthly, 59, 688-690, 1952.
4. Taber, H., Note On The Representation Of Orthogonal matrices, Proc. Amer. Acad. Arts. Sc. 27, p. 23, 1982.
5. Hacısalioğlu, H. H., Lineer Cebir, Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi yayını, s.442, 1975.
6. Bükcü, B., Cayley Formula And Its Applications In E_1^3, Ankara University Graduate School And The Natural Science, Ph. D. Thesis, 2003.