Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **21** (1-2), 54-61, 2005

YAKIN-HALKALARIN FARKLI ASAL-İDEALLERİ VE DİREKT TOPLANANLAR

Akın Osman ATAGÜN[1*], **Emin AYGÜN** [2]

[1]Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 66100 YOZGAT
[2]Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 38039 KAYSERİ

ÖZET

Yakın-halkalarda asallık için birbirinden farklı bir çok genelleştirme tanımı yapılmıştır. Bir yakın-halkanın bir direkt toplanan ideali ile bir 0-asal idealinin kesişiminin direkt toplanan idealin bir 0-asal ideali olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada aynı durumun 1-asal ve 2-asal idealler için de doğru olduğu gösterilmiştir. Üstelik, yakın-halkaların yarı-asal, 0-asal ve 1-asal idealleri için karakterizasyonlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Yakın-Halka, Direkt toplanan, Yarı-asal, 0-asal, 1-asal, 2-asal.

DIFFERENT PRIME IDEALS OF NEAR-RINGS AND DIRECT SUMMANDS

ABSTRACT

Several different generalizations of primeness have been defined for near-rings. It is known that an intersection of a direct summand ideal and a 0-prime ideal of a near-ring is a 0-prime ideal of the direct summand ideal. It is shown in this study that the same situations are also true for 1-prime and 2-prime ideals. Furthermore, some characterizations of semi-prime, 0-prime and 1-prime ideals in near-rings are given.

Keywords: Near-ring, Direct summand, Semi-prime, 0-prime, 1-prime, 2-prime.

*E-posta: aoatagun@erciyes.edu.tr

1. GİRİŞ

Bir N cümlesi, "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(N,+,.)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

a) $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,
b) $(N,.)$ bir yarı grup,
c) $\forall x, y, z \in N$ için $(x+y).z = x.z + y.z$

Burada c) şıkkında sağdan dağılma özelliği verildiğinden, bu şartları sağlayan $(N,+,.)$ üçlüsüne bir sağ yakın-halka denir. Bu makalede tüm yakın-halkalar, sağ yakın-halka olarak alınmıştır. N bir yakın-halka olsun. $N_0 = \{n \in N \mid n0 = 0\}$ cümlesine N yakın-halkasının 0-simetrik kısmı denir. Eğer $N = N_0$ ise N ye bir 0-simetrik yakın-halka adı verilir.

Halkalarda modül kavramının, yakın-halkalara taşınmasıyla elde edilmiş olan N -grup, yani N üzerinde yakın-modül kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın-halka olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mu : N \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (n,\gamma) & \to & n\gamma \end{array}$$

alalım. $\forall x, y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için,

$$(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$$

ve

$$(xy)\gamma = x(y\gamma)$$

şartlarını sağlayan (Γ, μ) ikilisine bir N -grup denir. N bir yakın-halka ve Γ bir N -grup olsun. Γ nın

$$N\Delta \subseteq \Delta$$

şartını sağlayan bir Δ alt grubuna, Γ nın bir N -altgrubu adı verilir ve $\Delta \leq_N \Gamma$ ile gösterilir.
N bir yakın-halka ve I N nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $IN \subseteq I$
b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I ya N yakın-halkasının bir ideali denir ve $I \lhd N$ ile gösterilir. Eğer sadece a) şartı sağlanıyorsa I N nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I N nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla $I \lhd_r N$ ve $I \lhd_l N$ ile gösterilir. N bir yakın-halka olsun. N nin tüm sıfırdan farklı ideallerinin cümlesinde minimal olan ideale N nin minimal ideali denir.

N bir yakın-halka ve $(I_k)_{k \in K}$ N nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda, aşağıdaki cümleler eşittir.

a) I_k lerin elemanlarının tüm sonlu toplamlarının cümlesi,
b) Farklı I_k lerin elemanlarının tüm sonlu toplamlarının cümlesi,
c) $(I_k,+)$ normal alt gruplarının toplamı,

d) $(N,+)$ grubunun, $\bigcup_{k\in K} I_k$ tarafından üretilen alt grubu,

e) $(N,+)$ grubunun, $\bigcup_{k\in K} I_k$ tarafından üretilen normal alt grubu,

f) N nin $\bigcup_{k\in K} I_k$ tarafından üretilen ideali.

Burada a)-f) cümlesine I_k $(k \in K)$ ideallerinin toplamı denir ve $\sum_{k\in K} I_k$ ile gösterilir.

N bir yakın-halka ve $\{I_k\}_{k\in K}$ N nin ideallerinin bir ailesi olsun. Eğer, $\sum_{k\in K} I_k$ nin herbir elemanı, farklı I_k lerin elemanlarının bir sonlu toplamı olarak tek türlü yazılabiliyorsa, $\sum_{k\in K} I_k$ toplamına bir (iç) direkt toplam denir. Belirli olması açısından, biz bu toplamı $\dot{\sum_{k\in K}} I_k$ ile göstereceğiz. Aşağıdaki önerme sonraki kesimde yapılan işlemlerin anlaşılması için gereklidir.

Önerme 1.1. N bir yakın-halka, I_k $(k \in K)$ N nin ideallerinin, $\sum_{k\in K} I_k$ toplamı direkt olacak şekilde, bir ailesi olsun. Bu durumda, eğer $a, a' \in I_i$, $b, b' \in I_j$ ve $i \neq j$ ise,

a) $a + b = b + a$
b) $a'(a+b) = a'a$
c) $ab = a0$
d) Eğer N 0-simetrik ise, $ab = 0$ dır [1].

N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. Eğer $\exists\, J \lhd N$ için,

$$N = I \dot{+} J$$

oluyorsa, I idealine N yakın-halkasının bir direkt toplananı denir. Buradaki J idealine ise, I nın N deki direkt bileşeni adı verilir.

Teorem 1.2. N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. Eğer I bir direkt toplanan ise, I nın her bir ideali aynı zamanda N yakın-halkasının da bir idealidir [1].

N bir yakın-halka ve $A, B \subseteq N$ olsun. Bu durumda,

$$AB = \{\, ab \mid a \in A, b \in B \,\}$$

ile tanımlanacaktır. Buradan bir n doğal sayısı için, A^n tanımı açıktır.

Tanım 1.3. N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer $\forall I, J \lhd N$ için, $IJ \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda P ye N yakın-halkasının bir 0-asal ideali denir [2].

Bu makalede 0-asallık kavramı, asallık adıyla verilecektir. Tanımlanmamış tüm kavramlar için kaynak olarak alınabilir [1].

2. 1-ASAL, 2-ASAL İDEALLER VE DİREKT TOPLANANLAR

Önerme 2.1. N bir yakın-halka olsun. Eğer $I \triangleleft N$ bir direkt toplanan ve $P \triangleleft N$ 0-asal ise, bu durumda $P \cap I$ I da bir 0-asal idealdir[3].

Bu kesimde Önerme 2.1 in 1-asallık ve 2-asallık için de doğru olduğu gösterilecektir.

Tanım 2.2. N bir yakın-halka ve $P \triangleleft N$ olsun. Eğer N yakın-halkasının A ve B sol idealleri için, $AB \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, P ye N nin bir 1-asal ideali denir [4].

Lemma 2.3. N bir yakın-halka ve $I \triangleleft N$ bir direkt toplanan olsun. Bu durumda I nın her sol ideali, aynı zamanda N nin de sol idealidir.

İspat: $I \triangleleft N$ bir direkt toplanan olduğundan,

$$N = I \dotplus J$$

olacak şekilde bir $J \triangleleft N$ vardır. $L \triangleleft_l I$ olsun. $\forall n, n' \in N$ ve $\forall l \in L$ için,

$$n(n'+l) - nn'$$

elemanını düşünelim. $N = I \dotplus J$ olduğundan,

$$n = i + j$$

ve

$$n' = i' + j'$$

olacak şekilde $i, i' \in I$ ve $j, j' \in J$ vardır ve bunlar üzerinde Önerme 1.1 sağlanır. Buna göre, $L \triangleleft_l I$ olduğundan,

$$\begin{aligned} n(n'+l) - nn' &= (i+j)(i'+j'+l) - (i+j)(i'+j') \\ &= i(i'+j'+l) + j(i'+j'+l) - i(i'+j') - j(i'+j') \\ &= i(i'+l) + jj' - ii' - jj' \\ &= i(i'+l) - ii' \in L \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $L \triangleleft_l N$ dir.

Önerme 2.4. N bir yakın-halka olsun. Eğer $I \triangleleft N$ bir direkt toplanan ve $P \triangleleft N$ 1-asal ise, bu durumda $P \cap I$ I da 1-asal idealdir.

İspat: $J_1, J_2 \triangleleft_l I$ için $J_1 J_2 \subseteq P \cap I$ olsun. Bu durumda, $J_1 J_2 \subseteq P$ ve Lemma 2.3 den, $J_1, J_2 \triangleleft_l N$ dir. P 1-asal olduğundan, $J_1 \subseteq P$ veya $J_2 \subseteq P$ ve dolayısıyla, $J_1 \subseteq P \cap I$ veya $J_2 \subseteq P \cap I$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 2.5 N bir yakın-halka ve $P \triangleleft N$ olsun. Eğer N nin A ve B N-alt grupları için, $AB \subseteq P$ olması, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, P ye N nin bir 2-asal ideali denir[5].

Lemma 2.6. N 0-simetrik bir yakın-halka ve $I \triangleleft N$ bir direkt toplanan olsun. Bu durumda, I nın her bir I-alt grubu, aynı zamanda N nin bir N-alt grubudur.

İspat: $I \lhd N$ bir direkt toplanan olduğundan, $N = I \dot{+} J$ olacak şekilde bir $J \lhd N$ vardır. $A \leq_I I$ olsun. A I nın bir alt grubu olduğundan, N nin de bir alt grubudur. O halde $NA \subseteq A$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall n \in N$ ve $\forall a \in A$ için,

$$na = (i + j)a = ia + ja$$

olacak şekilde $i \in I$ ve $j \in J$ vardır. N 0-simetrik, $A \leq_I I$ olduğundan Önerme 1.1 kullanılırsa,

$$na = ia \in A$$

yani $A \leq_N N$ elde edilir.

Önerme 2.7. N 0-simetrik bir yakın-halka ve $P \lhd N$ 2-asal olsun. Eğer $I \lhd N$ bir direkt toplanan ise, bu taktirde $P \cap I$, I da 2-asal idealdir.

İspat: $A, B \leq_I I$ için $AB \subseteq P \cap I$ olsun. Bu durumda, $AB \subseteq P$ ve Lemma 2.6 dan $A, B \leq_N N$ dir. P 2-asal olduğundan, $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$, dolayısıyla $A \subseteq P \cap I$ veya $B \subseteq P \cap I$ elde edilir. O halde, $P \cap I$ I nın bir 2-asal idealdir.

3. YARI-ASAL, 0-ASAL VE 1-ASAL İDEALLER

Bu kesimde yakın-halkaların yarı-asal, 0-asal ve 1-asal idealleri için yeni karakterizasyonlar verilecektir.

Önerme 3.1. N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir[2]:

a) P bir asal idealdir.
b) $\forall I, J \lhd N$ için, $I \supset P$ ve $J \supset P$ ise, $IJ \not\subset P$ dir.

Önerme 3.2. N bir yakın-halka ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kapsama altında tam sıralı olan, N nin asal ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

ideali de N nin bir asal idealidir[1]. Burada A bir indis cümlesidir.

Buradan, yakın-halkaların 0-asal ideallerini karakterize eden aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.3. N tüm idealleri kapsama altında tam sıralı olan bir yakın-halka olsun. Bu durumda $P \lhd N$ nin asal olması için gerek ve yeter şart $I \lhd N$ P yi içeren minimal ideal ve $\forall P \subset J \lhd N$ için, $IJ \not\subset P$ olmasıdır.

İspat : $P \lhd N$ asal olsun. Önerme 3.1 den $I \supset P$ ve $J \supset P$ olacak şekilde $\forall I, J \lhd N$ için $IJ \not\subset P$ dir. O halde ispatın bu yönü açıktır. Şimdi kabul edelim ki, $I \lhd N$ P yi içeren minimal ideal ve $\forall P \subset J \lhd N$ için, $IJ \not\subset P$ olsun. $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N yakın-halkasının P yi içeren tüm ideallerinin ailesini göstersin. I P yi içeren minimal ideal olduğundan,

$$I = \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

dır. $J \supset P$ olduğundan, $\exists k \in A$ için $J = P_k$ ve kabulden,

$$IJ = (\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha) P_k \not\subset P$$

dir. O halde $\forall \alpha \in A$ için,

$$IJ = (\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha) P_k \subset P_\alpha P_k \not\subset P$$

dır. Burada $\forall \alpha \in A$ için P_α idealleri, N yakın-halkasının P yi içeren tüm ideallerini taradığından Önerme 3.1 den ispat tamamdır.

Tanım 3.4. N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. Eğer $\forall J \lhd N$ için, $J^2 \subseteq I$ olması $J \subseteq I$ olmasını gerektiriyorsa, I ya N yakın-halkasının bir yarı-asal ideali denir[1].

Asal ideal ve yarı-asal ideal tanımlarından da görüleceği gibi, her asal ideal aynı zamanda yarı-asaldır.

Önerme 3.5. N bir yakın-halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir [1]:

a) I bir yarı-asal idealdir.

b) $\forall J \lhd N$ için, $J \supset I$ ise $J^2 \not\subset I$ dır.

Önerme 3.6. N bir yakın-halka ve $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N nin yarı-asal ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$$

ideali de N nin bir yarı-asal idealidir[1]. Burada A bir indis cümlesidir.

Buna göre yarı-asal ideallerin aşağıdaki gibi bir karakterizasyonu vardır.

Önerme 3.7. N tüm idealleri kapsama altında tam sıralı olan bir yakın-halka olsun. Bu durumda $I \lhd N$ nin yarı-asal olması için gerek ve yeter şart $J \lhd N$ I yı içeren minimal ideal ise $J^2 \not\subset I$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, $I \lhd N$ yarı-asal ve $J \lhd N$ I yı içeren minimal ideal olsun. $J \supset I$ olduğundan, Önerme 3.5 den $J^2 \not\subset I$ dır. Şimdi, kabul edelim ki $J \lhd N$ I yı içeren minimal ideal iken $J^2 \not\subset I$ olsun. $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N nin I yı içeren tüm ideallerinin sınıfı olsun. J nin minimalliğinden,

$$J = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$$

dır. Buradan, $\forall \alpha \in A$ için,

$$J^2 \subset (S_\alpha)^2$$

ve $J^2 \not\subset I$ kabulünden, $\forall \alpha \in A$ için,

$$(S_\alpha)^2 \not\subset I$$

elde edilir. Burada $\forall \alpha \in A$ için S_α idealleri, N nin I yı içeren tüm ideallerini taradığından Önerme 3.5 den I bir yarı-asal idealdir.

Önerme 3.8. N bir yakın-halka ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kapsama altında tam sıralı olan, N nin 1-asal ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

ideali de N nin bir 1-asal idealidir. Burada A bir indis cümlesidir.

İspat: Bir N yakın-halkasının her 1-asal ideali aynı zamanda asal olduğundan, Önerme 3.2 den

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

N nin bir asal idealidir. Kabul edelim ki, $I, J \lhd_l N$ için,

$$IJ \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

olsun. Bu durumda, $\forall \alpha \in A$ için $IJ \subseteq P_\alpha$ olur. $\forall \alpha \in A$ için P_α N nin bir 1-asal ideali olduğundan, $\forall \alpha \in A$ için $I \subseteq P_\alpha$ veya $J \subseteq P_\alpha$ dır. O halde

$$I \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

veya

$$J \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

olur. Dolayısıyla

$$\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

N nin bir 1-asal idealidir.

Önerme 3.9. N tüm idealleri kapsama altında tam sıralı olan bir yakın-halka olsun. Bu durumda $P \lhd N$ nin 1-asal olması için gerek ve yeter şart $I \lhd_l N$ P yi içeren minimal sol ideal ve $\forall P \subset J \lhd_l N$ için, $IJ \not\subset P$ olmasıdır.

İspat: $P \lhd N$ 1-asal olsun. Bu durumda $I \supset P$ ve $J \supset P$ olacak şekilde $\forall I, J \lhd_l N$ için $IJ \not\subset P$ dir. Dolayısıyla $I \lhd_l N$ P yi içeren minimal sol ideal ve $J \supset P$ olacak şekilde $\forall J \lhd_l N$ için $IJ \not\subset P$ dir. Şimdi, kabul edelim ki $I \lhd_l N$ P yi içeren minimal sol ideal ve $\forall P \subset J \lhd_l N$ için, $IJ \not\subset P$ olsun. $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ N yakın-halkasının P yi içeren tüm sol ideallerinin ailesini göstersin. I P yi içeren minimal sol ideal olduğundan,

$$I = \bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha$$

dır. $J \supset P$ olduğundan, $\exists k \in A$ için $J = P_k$ ve kabulden,

$$IJ = \Big(\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha\Big) P_k \not\subset P$$

dir. O halde $\forall \alpha \in A$ için,

$$IJ = \Big(\bigcap_{\alpha \in A} P_\alpha\Big) P_k \subset P_\alpha P_k \not\subset P$$

elde edilir. Burada $\forall\alpha \in A$ için P_{α} sol idealleri, N yakın-halkasının P yi içeren tüm sol ideallerini taradığından ispat tamamdır.

KAYNAKLAR

1. Pilz, G., Near-rings, 2nd ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.
2. Van der Walt, A. P. J., Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings, Arch. Math., **15**, 408-414, 1964.
3. Maxson, C. J., On Near-rings and Near-ring Modules, Doctoral Dissertation, Suny at Buffalo, 1967.
4. Holcombe, W. L. M., Primitive Near-rings, Doctoral Dissertation, University of Leeds, 1970.
5. Groenewald, N. J., Prime Near-rings and Special Radicals, East-West J. of Math., **3**(2), 147-162, 2001.