Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, **20** (1-2), 66-76, 2004

GRUNWALD-LETNIKOV, RIEMANN-LIOUVILLE VE CAPUTO KESİRSEL TÜREVLERİ ÜZERİNE

Saime ÖZEN[1], İlhan ÖZTÜRK[2]

[1]Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 38039 KAYSERİ

[2]Erciyes Üniversitesi Kayseri Meslek Yüksek Okulu, 38039 KAYSERİ

Özet: Bu çalışmada Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerinde duruldu. Ayrıca Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerinin birbiriyle olan ilişkilerini gösteren bazı özel örnekler bulundu.

Anahtar kelimeler: Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri

ON GRUNWALD-LETNIKOV, RIEMANN-LIOUVILLE AND CAPUTO FRACTIONAL ERIVATIVES

Abstract: In this study, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives were emphasized. In addition, for relationships between Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives some special examples were investigated.

Key words: Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo fractional derivatives

1. Giriş

Keyfi mertebeli diferensiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır. Bu kavramlar 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirsel mertebe için diferensiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır [1,2,3].

Kesirsel diferensiyel teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirsel türevler için önemli bir avantajdır. Kesirsel türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer bir çok alanda kullanılmaktadır [4,5,6,7,8].

Bu çalışmada Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerinde duracağız. Öncelikle Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerini tanımlayıp bu yaklaşımlar arasında nasıl bir ilişki bulunduğunu göstermeye çalışacağız.

Kesirsel diferensiyel operatörü için a ve t sırasıyla alt ve üst limit, p de pozitif bir reel sayı olmak üzere p. mertebeden Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel diferensiyel operatörleri için sırasıyla ${}_a^{GL}D_t^p f(t)$, ${}_a^{RL}D_t^p f(t)$, ${}_a^{C}D_t^p f(t)$ notasyonlarını kullanacağız.

2. Temel Tanımlar

n. mertebeden türevlerin

$$f(t),\quad \frac{df(t)}{dt},\quad \frac{d^2f(t)}{dt^2},\quad \frac{d^3f(t)}{dt^3},\quad \ldots$$

sonsuz dizisini göz önüne alalım. Keyfi mertebeli diferensiyel düşüncesi aslında tekrarlanan diferensiyelin bir genelleştirilmesidir. Burada temel amaç $\frac{d^n}{dt^n}$ sembolü ile gösterilen operatörün n tamsayı değerli parametresini, tamsayı olmayan bir p parametresi ile yer değiştirmektir. Şimdi bazı temel tanımlar verelim.

Tanım 2.1. m, $m<p<m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^{(k)}(t)$, $(k=1,2,...,m+1)$ türevleri de $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirsel türevi

$${}_a^{GL}D_t^p f(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \tag{1}$$

dir.

Tanım 2.2. f fonksiyonu her sonlu (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m\in N$, $m-1\le p<m$ olmak üzere $t>a$ için reel bir f fonksiyonunun p. mertebeden Riemann-Liouville kesirsel türevi

$${}_a^{RL}D_t^p f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3. m, $m-1<p<m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, p herhangi bir pozitif sayı ve f fonksiyonu da m defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p. mertebeden Caputo kesirsel türevi

$${}_a^{C}D_t^p f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} \tag{3}$$

ile tanımlanır.

$t\ge 0$ için m+1 sürekli türeve sahip $f(t)$ fonksiyonlarının bir sınıfı ele alınırsa bu takdirde (1) ile verilen

Grünwald-Letnikov kesirsel türevi, (2) ile verilen Riemann-Liouville kesirsel türevine eşittir. Bununla birlikte aynı şartlar altında Caputo kesirsel türevi ile diğer iki yaklaşım arasında böyle bir eşitlik söz konusu değildir. Şimdi Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarının hangi şartlar altında eşit olduklarını gösteren bir teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.1. $f(t)$ fonksiyonu $[a,\tau]$ aralığında $(n-1)$ defa sürekli diferensiyellenebilir ve $f^{(n)}(t)$ türevleri de $[a,\tau]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu takdirde her p $(0<p<n)$ için ${}^{RL}_{\ a}D^{p}_{t}f(t)$ Riemann-Liouville türevi mevcuttur ve ${}^{GL}_{\ a}D^{p}_{t}f(t)$ Grünwald-Letnikov türevine eşittir. Eğer $0 \le m-1 \le p < m \le n$ ise bu takdirde $a<t<\tau$ için

$$ {}^{RL}_{\ a}D^{p}_{t}f(t) = {}^{GL}_{\ a}D^{p}_{t}f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau \tag{4} $$

eşitliği sağlanır.

İspat : Tanım 2.1 de m yerine $m-1$ alınırsa

$$ {}^{GL}_{\ a}D^{p}_{t}f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau $$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$$ \frac{d^m}{dt^m}\left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau\right] \tag{5} $$

ifadesini göz önüne alalım.

$$ \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau $$

integraline m defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$ \begin{aligned} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau &= -(t-a)^{2m-p-1} f^{(m-1)}(a) + (2m-p-1)\int_a^t (t-\tau)^{2m-p-2} f^{(m-1)}(\tau)d\tau \\ &= -(t-a)^{2m-p-1} f^{(m-1)}(a) - (2m-p-1)(t-a)^{2m-p-2} f^{(m-2)}(a) \\ &\quad + (2m-p-1)(2m-p-2)\int_a^t (t-\tau)^{2m-p-3} f^{(m-2)}(\tau)d\tau \\ &\quad \vdots \\ &= -(t-a)^{2m-p-1} f^{(m-1)}(a) - (2m-p-1)(t-a)^{2m-p-2} f^{(m-2)}(a) - \cdots \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} &-(2m-p-1)(2m-p-2)\cdots(m-p+2)(t-a)^{m-p} f(a) \\ &+(2m-p-1)(2m-p-2)\cdots(m-p+1)\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \\ &= -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}\,\Gamma(2m-p)}{\Gamma(m-p+1+j)} + \frac{\Gamma(2m-p)}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{6} $$

elde edilir. (5) ve (6) birlikte değerlendirilirse

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dt^m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)}+\frac{1}{\Gamma(2m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1}f^{(m)}(\tau)d\tau\Big] \\
&=\frac{d^m}{dt^m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)}+\frac{1}{\Gamma(2m-p)}\Big\{-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}\Gamma(2m-p)}{\Gamma(1+m+j-p)}+\frac{\Gamma(2m-p)}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau\Big\}\Big] \\
&=\frac{d^m}{dt^m}\Big[\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau\Big]
\end{aligned}
\tag{7}
$$

bulunur.

Ayrıca (2) eşitliğinde $0<\alpha\le 1$ olmak üzere $p=m-\alpha$ alınırsa

$$
{}^{RL}_{\ a}D_t^{m-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \tag{8}
$$

elde edilir. (8) eşitliğinin her iki tarafının n. mertebeden türevini alalım. Buradan

$$
\frac{d^n}{dt^n}({}^{RL}_{\ a}D_t^{m-\alpha}f(t))=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau={}^{RL}_{\ a}D_t^{n+m-\alpha}f(t)
$$

bulunur. Son eşitlikte tekrar $p=m-\alpha$ alınırsa

$$
\frac{d^n}{dt^n}({}^{RL}_{\ a}D_t^{p}f(t))=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau={}^{RL}_{\ a}D_t^{n+p}f(t) \tag{9}
$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan $p>0$ için Riemann-Liouville integrali

$$
{}^{RL}_{\ a}D_t^{-p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau \tag{10}
$$

dir [1,9]. (7), (9) ve (10) dikkate alınırsa

$$
\frac{d^m}{dt^m}\Big[\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau\Big]=\frac{d^m}{dt^m}\big[{}^{RL}_{\ a}D_t^{-(m-p)}f(t)\big]={}^{RL}_{\ a}D_t^{p}f(t)
$$

elde edilir. Böylece verilen şartlar altında Grünwald-Letnikov kesirsel türevinin Riemann-Liouville kesirsel türevine eşit olduğu görülür.

Örnek 2.1. $f(t)=t^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $p=\frac{1}{2}$ ve $p=\frac{3}{2}$ alırsak fonksiyonun Teorem 2.1 in şartlarını sağladığını görürüz. Öncelikle bu fonksiyonun Grünwald-Letnikov kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) $p=\frac{1}{2}$ için Tanım 2.1 dikkate alınırsa $m=0$ dır. Çünkü m, $m<p<m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı olmalıdır. Ayrıca $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ olduğundan

$$
{}^{GL}_{\ a}D^p_t f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau
$$

$$
= \frac{f^{(0)}(a)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} f'(\tau)d\tau = \frac{a^2(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 2\tau d\tau
$$

$$
= \frac{a^2(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t-a} u^{-\frac{1}{2}}(t-u)du = \frac{a^2(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}]
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\pi}}[a^2(t-a)^{-\frac{1}{2}} + 4t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\frac{a^2}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} + 4t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}]
$$

$$
= \frac{3a^2 + 12t(t-a) - 4(t-a)^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} = \frac{8t^2 - a^2 - 4at}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}
$$

bulunur.

b) $p = \frac{3}{2}$ olsun. m, $m < p < m+1$ şartını sağlayacağından $m = 1$ dir. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ve $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınırsa

$$
{}^{GL}_{\ a}D^p_t f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau
$$

$$
= \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\frac{3}{2}+k}}{\Gamma(-\frac{3}{2}+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\frac{3}{2}+1+1)} \int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{3}{2}} f''(\tau)d\tau
$$

$$
= \frac{f^{(0)}(a)(t-a)^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} + \frac{f'(a)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 2d\tau
$$

$$
= \frac{a^2(t-a)^{-\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\pi}} + \frac{2a(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}[4(t-a)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[-\frac{a^2}{2}(t-a)^{-\frac{3}{2}} + 2a(t-a)^{-\frac{1}{2}} + 4(t-a)^{\frac{1}{2}}]
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\pi}}[-\frac{a^2}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} + 4(t-a)^{\frac{1}{2}}] = \frac{-a^2 + 4a(t-a) + 8(t-a)^2}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} = \frac{8t^2 + 3a^2 - 12at}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}
$$

elde edilir.

Örnek 2.2. $f(t) = t^2$ fonksiyonunu göz önüne alınırsa $p = \frac{1}{2}$ ve $p = \frac{3}{2}$ için fonksiyonun Teorem 2.1 in şartlarını sağladığı açıktır. Şimdi bu fonksiyonun Riemann-Liouville kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) $p = \frac{1}{2}$ için Tanım 2.2 dikkate alınırsa m, $m-1 \le p < m$ şartını sağlayan bir tamsayı olacağından $m = 1$ dir. Böylece $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğu göz önüne alınarak

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^{m}}{dt^{m}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1}\tau^{2}d\tau $$

$$ =\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{2}d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t-a}u^{-\frac{1}{2}}(t-u)^{2}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t-a}(t^{2}u^{-\frac{1}{2}}-2tu^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{3}{2}})du $$

$$ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}[2t^{2}(t-a)^{\frac{1}{2}}-\frac{4t}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(t-a)^{\frac{5}{2}}] $$

$$ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}[4t(t-a)^{\frac{1}{2}}+t^{2}(t-a)^{-\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}-2t(t-a)^{\frac{1}{2}}+(t-a)^{\frac{3}{2}}] $$

$$ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}[2t(t-a)^{\frac{1}{2}}+t^{2}(t-a)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}[2t(t-a)^{\frac{1}{2}}+\frac{t^{2}}{(t-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}] $$

$$ =\frac{6t(t-a)+3t^{2}-(t-a)^{2}}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}=\frac{8t^{2}-a^{2}-4at}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} $$

bulunur.

b) $p=\frac{3}{2}$ alınırsa Tanım 2.2 den $m=2$ olduğu görülür. Buradan fonksiyonun $p=\frac{3}{2}$ mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^{m}}{dt^{m}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{2-\frac{3}{2}-1}\tau^{2}d\tau $$

$$ =\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{2}d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{0}^{t-a}u^{-\frac{1}{2}}(t-u)^{2}du $$

$$ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{0}^{t-a}(t^{2}u^{-\frac{1}{2}}-2tu^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{3}{2}})du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2}}{dt^{2}}[2t^{2}(t-a)^{\frac{1}{2}}-\frac{4t}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(t-a)^{\frac{5}{2}}] $$

$$ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}[t^{2}(t-a)^{-\frac{1}{2}}+2t(t-a)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}[-\frac{t^{2}}{2}(t-a)^{-\frac{3}{2}}+3t(t-a)^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}(t-a)^{\frac{1}{2}}] $$

$$ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}[-\frac{t^{2}}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3t}{(t-a)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{2}(t-a)^{\frac{1}{2}}]=\frac{3(t-a)^{2}+6t(t-a)-t^{2}}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}=\frac{8t^{2}+3a^{2}-12at}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} $$

olarak hesaplanır.

Örnek 2.3. $f(t)=t^{2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $p=\frac{1}{2}$ ve $p=\frac{3}{2}$ alalım ve fonksiyonun Caputo kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) Tanım 2.3 dikkate alınırsa $m=1$ dir. Çünkü m, $m-1<p<m$ şartını sağlayan bir tamsayı olmalıdır. O halde $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınarak

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1} f'(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 2\tau d\tau $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}]\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[\frac{6t(t-a)-2(t-a)^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}}] = \frac{8t^2-4at-4a^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} $$

elde edilir.

b) $p = \frac{3}{2}$ için Tanım 2.3 den $m = 2$ olduğu görülebilir. Burada $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} = \frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{2-\frac{3}{2}-1} f''(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 2d\tau $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}}\frac{(t-a)^{\frac{3}{2}}}{(t-a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4(t-a)^2}{(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} = \frac{4t^2-8at+4a^2}{(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} $$

olarak bulunur.

Örnek 2.1 ve Örnek 2.2 den hareketle Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirsel türevlerinin belirli şartlarda aynı sonuçları verdiğini söyleyebiliriz. Örnek 2.1 ve Örnek 2.2, Teorem 2.1 in bir uygulaması olarak karşımıza çıkar. Örnek 2.1, Örnek 2.2 ve Örnek 2.3 birlikte değerlendirilirse Caputo kesirsel türevinin Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirsel türevlerinden farklı olduğunu görebiliriz.

Şimdi de Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerinin hangi şartlarda eşit olduğuna bakalım.

Teorem 2.2 : f fonksiyonu her sonlu (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir, m, $m-1 < p < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı ve p herhangi bir pozitif sayı olmak üzere $f^{(k)}(t)$, $(k = 0,1,2,...,m-1)$ türevleri de $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu takdirde eğer $k = 0,1,2,...,m-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ şartları sağlanırsa

$$ {}_a^{RL} D_t^p f(t) = {}_a^C D_t^p f(t) $$

dir.

İspat :

$$ {}_a^{RL} D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \tag{11} $$

ile verilen Riemann-Liouville kesirsel türevini ele alalım.

$$\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau$$

integraline m defa kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau = \frac{(t-a)^{m-p} f(a)}{m-p} + \frac{1}{m-p}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f'(\tau)d\tau$$

$$= \frac{(t-a)^{m-p} f(a)}{m-p} + \frac{(t-a)^{m-p+1} f'(a)}{(m-p)(m-p+1)} + \frac{1}{(m-p)(m-p+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p+1} f''(\tau\tau)d$$

$$= \frac{(t-a)^{m-p} f(a)}{m-p} + \frac{(t-a)^{m-p+1} f'(a)}{(m-p)(m-p+1)} + \frac{(t-a)^{m-p+2} f''(a)}{(m-p)(m-p+1)(m-p+2)}$$

$$+ \frac{1}{(m-p)(m-p+1)(m-p+2)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p+2} f'''(\tau)d\tau$$

$$= \frac{(t-a)^{m-p} f(a)}{m-p} + \frac{(t-a)^{m-p+1} f'(a)}{(m-p)(m-p+1)} + \frac{(t-a)^{m-p+2} f''(a)}{(m-p)(m-p+1)(m-p+2)} + \ldots$$

$$+ \frac{(t-a)^{m-p+m-1} f^{(m-1)}(a)}{(m-p)(m-p+1)\ldots(m-p+m-1)} + \frac{1}{(m-p)(m-p+1)\ldots(m-p+m-1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p+m-1} f^{(m)}(\tau)d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{m-p+k} f^{(k)}(a)\Gamma(m-p)}{\Gamma(m-p+k+1)} + \frac{\Gamma(m-p)}{\Gamma(m-p+m)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p+m-1} f^{(m)}(\tau)d\tau \tag{12}$$

bulunur. (11) ve (12) birlikte değerlendirilirse

$${}_a^{RL}D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{m-p+k} f^{(k)}(a)\Gamma(m-p)}{\Gamma(m-p+k+1)} + \frac{\Gamma(m-p)}{\Gamma(m-p+m)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p+m-1} f^{(m)}(\tau)d\tau\ \right]$$

$$= \frac{d^m}{dt^m}\left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{m-p+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(m-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p+m)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p+m-1} f^{(m)}(\tau)d\tau\ \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m-p+k+1)(t-a)^{k-p} f^{(k)}(a)}{\Gamma(m-p+k+1)\Gamma(k-p+1)} + \frac{\Gamma(m-p+m)}{\Gamma(m-p+m)\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-p} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-p} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} + {}_a^{C}D_t^p f(t)$$

elde edilir, yani

$${}_a^{RL}D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-p} f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} + {}_a^{C}D_t^p f(t)$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte $k = 0,1,\ldots,m-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ şartları sağlanırsa Riemann-Liouville kesirsel türevi ile Caputo kesirsel türevinin birbirine eşit olduğu görülür.

Örnek 2.4 $f(t) = (t-a)^2$ fonksiyonunu ele alalım. $p = \frac{1}{2}$ ve $p = \frac{3}{2}$ alırsak fonksiyonun Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 nin şartlarını sağladığı görülür. Öncelikle bu fonksiyonun Grünwald-Letnikov kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) $p=\frac{1}{2}$ için Tanım 1.1 dikkate alınırsa m, $m<p<m+1$ şartını sağlayacağından $m=0$ dır. O halde

$$\begin{aligned}{}_{a}^{GL}D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \\ &= \frac{f^{(0)}(a)(t-a)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}f'(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}2(\tau-a)d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t-a}[(t-a)u^{-\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}]du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}[2(t-a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}]=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $p=\frac{3}{2}$ alınırsa $m=1$ olduğu açıktır. Buradan $p=\frac{3}{2}$ mertebeli Grünwald-Letnikov kesirsel türevi

$$\begin{aligned}{}_{a}^{GL}D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\frac{3}{2}+k}}{\Gamma(-\frac{3}{2}+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\frac{3}{2}+1+1)}\int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{3}{2}}f''(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}2d\tau=\frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.5 $f(t)=(t-a)^2$ fonksiyonunu ele alalım. $p=\frac{1}{2}$ ve $p=\frac{3}{2}$ alınırsa fonksiyon Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 nin şartlarını sağlar. Şimdi bu fonksiyonun Riemann-Liouville kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) $p=\frac{1}{2}$ alınırsa Tanım 2.2 den $m=1$ olduğu görülür. Buradan fonksiyonun $p=\frac{1}{2}$ mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi

$$\begin{aligned}{}_{a}^{RL}D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1}(\tau-a)^2d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^2d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{t-a}u^{-\frac{1}{2}}(t-a-u)^2du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{t-a}[u^{-\frac{1}{2}}(t-a)^2-2(t-a)u^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{3}{2}}]du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}[2(t-a)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(t-a)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}(t-a)^{\frac{5}{2}}]=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

b) $p=\frac{3}{2}$ için Tanım 2.2 dikkate alınırsa m, $m-1\le p<m$ şartını sağlayacağından $m=2$ dir. Böylece $p=\frac{3}{2}$

mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi

$$
{}_{a}^{RL}D_{t}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^{m}}{dt^{m}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-p-1}f(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{2-\frac{3}{2}-1}(\tau-a)^{2}d\tau
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^{2}d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{0}^{t-a}u^{-\frac{1}{2}}(t-a-u)^{2}du
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\int_{0}^{t-a}[u^{-\frac{1}{2}}(t-a)^{2}-2(t-a)u^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{3}{2}}]du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2}}{dt^{2}}[2(t-a)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(t-a)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}(t-a)^{\frac{5}{2}}]
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2}}{dt^{2}}[\frac{16}{15}(t-a)^{\frac{5}{2}}]=\frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}}
$$

dir.

Örnek 2.6 $f(t)=(t-a)^{2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $p=\frac{1}{2}$ ve $p=\frac{3}{2}$ için fonksiyonun Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 nin şartlarını sağladığını biliyoruz. Fonksiyonun Caputo kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) Tanım 2.3 dikkate alınırsa $m=1$ dir. O halde fonksiyonun $p=\frac{1}{2}$ mertebeli Caputo kesirsel türevi

$$
{}_{a}^{C}D_{t}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}}=\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_{a}^{t}\frac{f'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}+1-1}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}2(\tau-a)d\tau
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t-a}u^{-\frac{1}{2}}(t-a-u)du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t-a}[u^{-\frac{1}{2}}(t-a)-u^{\frac{1}{2}}]du
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{\pi}}[2(t-a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}]=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{3}{2}}
$$

dir.

b) Tanım 2.3 den $p=\frac{3}{2}$ için $m=2$ olduğu dikkate alınırsa

$$
{}_{a}^{C}D_{t}^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}}=\frac{1}{\Gamma(2-\frac{3}{2})}\int_{a}^{t}\frac{f''(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}+1-2}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}2d\tau
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{\pi}}[2(t-a)^{\frac{1}{2}}]=\frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}}
$$

bulunur.

Örnek 2.4 ve Örnek 2.5 birlikte değerlendirilirse Teorem 2.1 in şartları sağlandığından Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirsel türevlerinin eşit olduğu görülür. Ayrıca Örnek 2.5 ve Örnek 2.6 dikkate alınırsa $k=0,1,...,m-1$ için $f^{(k)}(a)=0$ şartları altında Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerinin aynı sonuçları verdiğini söyleyebiliriz. Örnek 2.4, Örnek 2.5 ve Örnek 2.6 dan hareketle, Teorem 2.1 in şartlarına ilave olarak $k = 0,1,\ldots,m-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ şartları da sağlanırsa Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerinin eşit olduğu görülür.

Kaynaklar

1. Podlubny, I., Fractional Differential Equations, Academic Press, London, 1999.
2. Oldham, K.B., Spainer, J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York and London, 1974.
3. Bertram, R., Fractional Calculus and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg , 1975.
4. Miller, K.S., Ross, B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, 1974.
5. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA, 1993.
6. Butzer, P.L., Westphal, U., An Introduction to Fractional Calculus, in: R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey, 2000.
7. Babakhani, A., Daftardar-Gejji, V., On Calculus of Local Fractional Derivatives, J. Math. Anal. Appl., 270, 66-79, 2002.
8. Agrawal, Om P., Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems, J. Math. Anal. Appl, 272, 368-379, 2002.
9. Özen, S., Kesirsel Türevler İçin Opial Eşitsizlikleri, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 2003.