Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, **18** (1-2), 77-81, 2002

SONSUZ TOPOLOJİK PERMUTASYON GRUPLAR

Hacı AKTAŞ

GOÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Tokat

Özet: Bu çalışmada S üzerinde τ ve κ gibi iki topoloji tanımlanmıştır. τ ve κ nın bazı özellikleri verildikten sonra S de bir elemanın sırasıyla B ve B' komşulukları tanımlanmış ve bu komşuluklardan yararlanarak τ ve κ topolojileri ile S nin grup yapısının uyuşmadığı gösterilmiştir. Bununla birlikte S nin yarı-topolojik, quasi topolojik ve para-topolojik grup olmaları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

INFINITY TOPOLOGICAL PERMUTATION GROUPS

Abstract: In this study, on S two topologies, such as τ and κ, are defined. Having given some properties of τ and κ, there is defined respectfully B and B' neighbourhoods of an element within S, and with the help of these neighbourhoods it is shown that τ and κ topologies are not compatible with the group structure of S. However, S provides some results related to the semi-topological, quasi topological and para-topological groups.

1. Giriş

Bu çalışma Topolojik Permütasyon Gruplar üzerinde yapılmıştır. Her grup üzerinde tanımlanan diskre ve indiskre topolojilere göre birer topolojik grupturlar. Fakat bir grup üzerinde tanımlanan herhangi bir topolojiye göre grubun topolojik olması gerekmez. Burada S üzerinde verilen topoloji ile S nin grup yapısının uyuşup uyuşmadığı gösterilecektir.

2. Tanım ve Teoremler

Bu çalışma boyunca Ω sonsuz bir cümleyi, S, Ω üzerinde simetrik grubu gösterecektir[1]. A, Ω nın çift permütasyonlarının cümlesi xA da tek permütasyonların cümlesi olacaktır.

G, Ω nın permütasyonlarının bir grubu olmak üzere herbir $a \in \Omega$ için $a\,G = \{a\sigma : \sigma \in G\}$ cümlesine G nin σ elemanı ile a nın orbiti denir. $\sigma \in G$ için $a\,\sigma = a$ oluyorsa böyle σ ların cümlesine a nın stabilizeri denir. G_a ile gösterilir. Eğer $S \subset \Omega$ ise bir alt cümlenin stabilizeri $G_S = \{\sigma \in G : \forall s \in S,\ \ s\sigma = s\}$ dir[1]. Bir G cümlesi üzerinde, bir topoloji ve bir grup yapısı var ve aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise G ye bir topolojik grup denir.

G1 $G \times G$ den G içine $(x, y) \to xy$ dönüşümü süreklidir.

G2 G den G içine dönüşümü süreklidir.

Eğer G cümlesi üzerinde (G1) ve (G2) şartları sağlanıyorsa G üzerindeki grup yapısı ile topoloji uyuşur denir[2]. G topolojik grubunda birim elemanın komşuluklar süzgeci B ve a da G de herhangi bir nokta olsun.

$x \to ax$ ve $x \to xa$ dönüşümleri homeomorfizim olduklarından, V ler B nin elemanları olmak üzere $aB = \{aV : V \in B\}$ ve $Ba = \{Va : V \in B\}$ dir. Böylece grubun birim elemanının komşuluk süzgecini tanımladığımızda topolojik grubun herhangi bir a elemanının komşuluk süzgeci elde edilebilir. Eğer özel olarak $x = e = y$ ise xy ve x^{-1} sürekli olmak üzere e nin komşuluklar süzgeci B üzerinde aşağıdaki aksiyomlar elde edilir. I) Her $U \in B$ için $VV \subset U$ olacak şekilde $V \in B$ vardır. II) Her $U \in B$ için $U^{-1} \in B$ dir. III) Her $a \in G$ ve $V \in B$ için $aVa^{-1} \in B$

G, üzerinde bir topoloji tanımlanmış grup olsun. Eğer her bir $a \in G$ için $x \to ax$, $x \to xa$ ve $x \to x^{-1}$ dönüşümleri G üzerinde sürekli ise G ye yarı-topolojik grup denir. G üzerinde G1 aksiyomu sağlanıyor ise G ye paratopolojik grup denir. G bir yarı-topolojik grup olsun. Eğer her bir $a \in G$ için G den G içine $x \to xax^{-1}$ dönüşümü sürekli ise G ye quasi topolojik grup denir[2].

Teorem2.1: $B(x)$ komşuluklar sınıfı komşuluklar aksiyomu denilen aşağıdaki özellikleri sağlar. V1) $B(x)$ sınıfına ait her cümle x noktasını bulundurur. V2) $B(x)$ e ait herhangi bir cümlenin her üst cümlesi de $B(x)$ e içindedir. V3) $B(x)$ e ait sonlu sayıda cümlenin kesişimi yine $B(x)$ dedir. V4) V, $B(x)$ in bir elemanı ise $B(x)$ de öyle bir W cümlesi vardır ki her bir $y \in W$ için V, $B(y)$ ye aittir[3].

Teorem2.2: G bir grup ve B, G üzerinde I, II ve III şartlarını sağlayan bir süzgeç olsun. Bu takdirde G nin grup yapısı ile uyuşan G üzerinde tekbir topoloji vardır ve B, e nin G üzerindeki komşuluklar süzgeci olmak üzere herhangi bir $a \in G$ noktasının komşuluklar süzgeci aB veya Ba şeklindedir[2].

Teorem2.3: B, G üzerinde e nin komşuluklar süzgeci olsun. G nin yarı- topolojik grup olması için gerek ve yeter şart II ve III nın sağlanması ve $B(x) = xB = Bx$ komşuluklar ailesinin V4 aksiyomunu sağlamasıdır[2].

Teorem2.4: B, G üzerinde e nin komşuluklar süzgeci olsun. G nin paratopolojik grup olması için gerek ve yeter şart B nin I, III nın sağlanması ve her $V \in B$ için $e \in V$ olmasıdır[2].

3. Sonsuz Topolojik Permütasyon Gruplar

S üzerinde bir topoloji olarak $\tau = \{U \subset S : U^c \text{ sonlu } \} \cup \{\Phi\}$ topolojisi olsun. Gerçekten τ bir topolojidir. (i) $\Phi \in \tau$, $S^c = \Phi$ sonlu olduğundan $S \in \tau$ dur. (ii) $U_1, U_2 \in \tau$ olsun. $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^{\,c} \cup U_2^{\,c}$ sonlu iki kümenin birleşimi sonlu olacağından $U_1 \cap U_2 \in \tau$ dur. (iii) $U_i \in \tau$ olsun. $(\bigcup_{i \in I} U_i)^c = \bigcap_{i \in I} U_i^{\,c} \subset U_i^{\,c}$, $U_i^{\,c}$ sonlu olduğundan sonlu cümlenin her alt cümlesi de sonludur. O halde $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ elde edilir.

Lemma3.1 (i) (S, τ) topolojik uzayı Hausdorff değildir. (ii) (S, τ) uzayı T_1 dir. (iii) (S, τ) kompakttır.

İspat:(i) Eğer S topolojik uzayı T_2 ise bu takdirde her $x, y \in S$ için x in bir U, y nin bir V komşuluğu vardır ki $U \cap V = \Phi$ dur. U, $V \in \tau$ olduğundan U^c ve V^c sonludur. $U^c \cup V^c = (U \cap V)^c = \Phi^c = S$ olurki sonlu iki cümlenin birleşimi sonsuz olan S cümlesine eşit olur. Bu çelişkidir. O halde (S, τ) uzayı Hausdorff değildir. (ii) S nin T_1 olduğunu göstermek için her $x \in S$ olmak üzere $\{x\}$ kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $U = \{x\}^c$ olsun. $U^c = (\{x\}^c)^c = \{x\}$ sonludur. $U = \{x\}^c \in \tau$ olduğundan $\{x\}^c$ açık, o halde $\{x\}$ kapalıdır. (iii) $\{U_i\}_{i \in I}$ ailesi S nin açık bir örtüsü olsun, yani $S = \bigcup_{i \in I} U_i$ ve $U_i \in \tau$ dur.

$U_{i_0} \in \tau$ ise U_{i_0} sonludur. Yani $U^c{}_{i_0} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ dir. O halde a_i yi içinde bulunduracak en az bir $U_{1_i} \in \tau$ vardır. $S = U_{i_0} \cup U^c{}_{i_0} = U_{i_0} \cup \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset U_{i_0} \cup U_{1_1} \cup ... \cup U_{1_n} = \bigcup_{i=0}^{n} U_{1_i}$ olur. O halde (S, τ) kompakttır.

Lemma3.2: S üzerinde $e \in S$ nin komşuluğu $B(e) = \{U \subset S : U, e$ nin komşuluğu $e \in V \subset U$ olacak şekilde $V \in \tau$ vardır. $\}$ olarak tanımlansın. $B(e)$, e nin komşuluklar süzgecidir.

İspat: $B(e)$ nin komşuluklar süzgeci olduğunu göstermek için komşuluklar ailesi olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem2.1 i sağladığını göstermek yeterlidir. V1) $U \in B(e)$ ve $U \subset U_1$ olsun. Bu takdirde $e \in V \subset U \subset U_1$ olacak şekilde en az bir $V \in \tau$ vardır. $e \in V \subset U_1$ ise $U_1 \in B(e)$ dir. V2) $U_1, U_2 \in B(e)$ olsun. $U_1 \in B(e) \Rightarrow e \in V_1 \subset U_1$ (*) ve $U_2 \in B(e) \Rightarrow e \in V_2 \subset U_2$ (**) olacak şekilde $V_1, V_2 \in \tau$ vardır. (*) ve (**) ifadelerinin taraf tarafa arakesiti alınırsa $e \in V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$ $V_1 \cap V_2 \in \tau$ olduğundan $U_1 \cap U_2 \in B(e)$ dir. V3) Her $U \in B(e)$ için $e \in V \subset U$ olduğundan e, $B(e)$ nin her elemanında vardır. V4) $U \in B(e)$ olsun. $e \in V \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \tau$ vardır. $B(e)$ nin bir W elemanını $W = V$ olarak alalım. $W = V \in B(e)$ dir. Gerçekten, $e \in V \subset V$ ve $V \in \tau$ olduğundan içindeki her noktanın bir komşuluğudur.

Lemma3.3: e nin S üzerinde komşuluklar süzgeci olan $B(e)$, II ve III aksiyomlarını sağlar. Fakat I aksiyomunu sağlamaz.

İspat: $U \in B(e)$ olsun. Bu takdirde vardır. S bir grup ve grupta her elemanın tek bir tersi olduğundan $\circ(V^c) = \circ((V^{-1})^c)$ dir. O halde $(V^{-1})^c$ sonludur ve $e \in V^{-1} \in \tau$ dur. Her $x \in V^{-1}$ için $x^{-1} \in V \subset U$ ise $x \in U^{-1}$ olur. Buradan $V^{-1} \subset U^{-1}$ ve $U^{-1} \in B(e)$ elde edilir. Şimdi de III aksiyomunun sağlandığını gösterelim. Her $a \in S$ ve her $U \in B(e)$ için $e \in V \subset U$ olacak şekilde τ nun en az bir V elemanı vardır. V, τ nun bir açığı olduğundan herhangi bir $a \in S$ için aV, Va çarpımı açıktır. O halde aVa^{-1} açıktır. $aVa^{-1} \in \tau$ dur. $V \subset U$ olduğundan $aVa^{-1} \subset aUa^{-1}$ dir. $aVa^{-1} \in B(e)$ olur. $B(e)$, I yı sağlamaz, gerçekten; $U = S - \{(12)\}$ alalım. $U^c = \{(12)\}$ sonlu olduğundan $U \in \tau$ dur. $V.V \subset U$ olacak şekilde tümleyeni sonlu olan hiçbir $V \in B(e)$ bulunamaz. Çünkü her $V \in B(e)$ içerisinde çarpımları (12) permütasyonunu veren permütasyonlar olacaktır. Mesela $V = S - \{(12), (13), ..., (1n)\}$ olsun. $V^c = \{(12), (13), ..., (1n)\}$ olur ki $V \in \tau$ dur. V içerisinde $(12)(34)$ ve (34) permütasyonları vardır ve $((12)(34))(34) = \quad (12) \in V.V \not\subset U$ dur.

Teorem3.1: S sonsuz permütasyon grubu τ da açıkları Φ ve tümleyeni sonlu olan S nin alt cümlelerinden oluşan bir topoloji olsun. Bu takdirde (i) S yarı-topolojik grupdur. (ii) S quasi-topolojiktir. (iii) S para-topolojik grup değildir.

İspat: (i) S nin yarı-topolojik olduğunu göstermek için e nin komşuluklar süzgeci olan $B(e)$ nin II ve III aksiyomlarını sağladığını ve $B(x) = xB = Bx$ in Teorem2.1 in V4 şartını gerçeklediğini göstermek yeterli olacaktır. Lemma3.2 de $B(e)$ nin e komşuluklar süzgeci olduğu ve Lemma3.3 de de $B(e)$ nin II ve III aksiyomlarını sağladığı gösterilmiti. Şimdi $B(x) = xB = Bx = \{xU \subset S : xU, x$ in komşuluğu $x \in xV \subset xU$ olacak şekilde $xV \in \tau$ vardır. $\}$ komşuluklar süzgecinin V4 aksiyomunu sağladığını gösterelim. $U \in B(x)$ olsun. Bu takdirde $x \in V \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \tau$ vardır. U, x in komşuluğu ve açık olduğundan U,V deki her noktanın bir komşuluğudur. O halde bir $W \in B(x)$ için özel olarak $W = V$ alınırsa $\forall y \in V$ için $U \in B(y)$ olur. O halde S yarı-topolojik gruptur. (ii) S yarı-topolojik olduğundan $x \to xa,\ \ x \to ax,$ ve $x \to x^{-1}$ dönüşümleri S üzerinde süreklidir. Dolayısıyla bu dönüşümler S üzerinde homeomorfizimdirler. a ve b , S yi taramak üzere $x \to axb$ dönüşümleri S nin homeomorfizimlerinin bir grubunu teşkil ederler.Yine a ,S yi taramak üzere $x \to axa^{-1}$ dönüşümlere dönüşümleride bu homeomorfizim grubunun alt grubunu oluştururlar. $x \to axa^{-1}$ homeomorfizm oldugundan süreklidir.O halde S quasi-topolojiktir. (iii) $B(e)$, e 'nin komşuluklar ailesi I aksiyomunu sağlamadığından dolayı S para-topolojik grup değildir.#

S üzerinde e'nin bir başka komşuluklar ailesi olarak $B^{'}(x)$ ile gösterilecek olan

$B'(e) = \{S_\Delta : \Delta \subset \Omega$ sonlu S_Δ noktasal stabilizer$\}$ [4] cümlesi verilsin. $B'(e), S$ üzerinde bir topoloji üretir. Şimdi bununla ilgili lemmaları verelim.

Lemma3.4: $B'(e)$, S için bir bazdır.

İspat: $\phi \subset \Omega$ ve boş cümlenin stabilizeri S 'nin kendisi olduğundan $B_i \in B'(e)$ olmak üzere

$S = \bigcup\limits_{B_i \in B'(e)} B_i$ dir. Her $U,V \in B'(e)$ ve $x \in U \cap V$ olsun. $U \cap V$ bir grup ve Ω nın bir sonlu alt cümlesinin stabilizeri olduğundan $B'(e)$ nin bir elemanıdır. O halde $x \in U \cap V \ \subset U \cap V$ olduğundan $B'(e)$, S için bir bazdır.

Lemma3.5: $B'(e)$ cümlesi e nin komşuluklar ailesidir.

İspat: İspat için Teorem2.1 deki aksiyomların sağlandığını göstermek yeterlidir. V1) $U \in B'(e)$ ve $U \subset V$ olsun. Bu takdirde

$S_\Delta = U$ olacak şekilde en az bir $\Delta \subset \Omega$ vardır. Δ herhangi bir Δ' alt cümlesi için $S_\Delta \subset S_{\Delta'} = V$ dir. O halde $V \in B'(e)$ elde edilir. V2) $U,V \in B'(e)$ olsun. $U \cap V < U$ ve $U \cap V < V$ olduğundan $U \cap V \in B'(e)$ dir. V3) $U \in B'(e)$ lerin hepsi grup olduğundan $e \in U$ dur. V4) $U \in B'(e)$ olsun. $W \subset U$ olacak şekilde $B'(e)$ nin bir W elemanı bulunabilir. $W \subset U$ ise $yW \subset yU$ dolayısıyla $yU \in yB'(e) = B'(y)$ dir. O halde $U \in B'(y)$ elde edilir.#

$B'(e)$, e nin komşuluklar ailesi olduğundan Teorem2.2 ye göre S üzerinde tek bir topoloji tanımlanır. S üzerindeki topoloji v ile gösterilirse $\kappa = \{U \subset S : \forall x \in U$ için $x \in V \subset U$ olacak şekilde $\exists V \in B'(e)$ vardır $\} = \left\{ U \subset S : U = \bigcup\limits_{B_i \in B'(e)} B_i \right\}$ dir.

Lemma3.6: $B'(e)$ I ve II aksiyomlarını sağlar. Fakat III yı sağlamaz.

İspat: I) Herhangi $U \in B'(e)$ için en azından $V = \{e\} \in B'(e)$ vardır ve $V.V = V \subset U$ dur. II) $U \in B'(e)$ olsun. $U < S$ olduğundan $U = U^{-1} \in B'(e)$ dir. III) III sağlanmaz çünkü her $a \in S$ ve $V \in B'(e)$ için $aVa^{-1} \in B'(e)$ olması V nin S nin normal alt grubu olması ile mümkündür. Halbuki her $V \in B'(e)$, S nin alt grubu değildir.

Kaynaklar

1. Donald, P., Permutation groups, New York, Amsterdam, 1968.
2. Bourbaki, N., General Topoloji Addison-Wesley, Pub.Co, Paris 1966.
3. Kelley, J.L., General Topology D.Van Nostrand Company, Inc. Princeton New-york Toronto, London 1955.
4. Macpherson, H.D., and Neumann, P.M., Subgroups of infinite Symmetric Group, J.London Math.soc.,**2**, 42, 64-84 1990.
5. Fraleight, B. J., A First course in Abstract Algebra, 4th edition, Addison-Wesley, 1989.
6. Helmut, H., Finite Permutation Groups New-york, 1964.
7. Scott, W. R., Group Theory New Jersey, 1964.