

SİSTEMLERİN MODELLENMESİNDE ARMA MODEL DERECEŚİ SEÇİM KRİTERLERİNİN İNCELENMESİ

Şaban ÖZER¹, Ahmet KAPLAN²

1. Elektronik Mühendisliđi Bölümü Erciyes Üniversitesi, 38039 Kayseri, Türkiye; 2. Uçak Elektronikliđi Bölümü
Sivil Havacılık MYO, Erciyes Üniversitesi, 38039 Kayseri, Türkiye

Özet: ARMA modellemeye dayalı parametre tahmin yöntemlerinde sıklıkla gerek duyulan model derecesinin tespiti konusu incelenmiştir. AR model yapısına uygulanan model derecesi seçim kriterleri ARMA yapısına da uygulanmış ve kriterlerin çeşitli derecelerdeki sistemler üzerindeki performansı test edilmiştir. Ayrıca kriter fonksiyonlarında derecelerin toplamı şeklinde uygulama yerine çarpım ifadesi kullanılmasının kriter performanslarını arttırdığı gözlemlenmiştir.

INVESTIGATION OF ARMA MODEL ORDER SELECTION CRITERIA FOR SYSTEM IDENTIFICATION

Abstract: The estimation of the ARMA model order is discussed. The model order is a priori knowledge for most of the ARMA parameter estimation algorithms. The model order selection criteria, used in the AR models, are applied to ARMA test model structures and their performances are evaluated. Moreover, it is observed that the product of AR and MA orders in the criteria functions gives better results than the sum of the orders.

Giriş

AR (AutoRegressive) modelleme teknikleri sadece kutuplara sahip olan sistemlerin modellenmesinde kullanılır. Ancak, fiziksel sistemlerin çoğu hem kutuplara hem de sıfırlara sahip olduğundan dolayı AR modelleme teknikleri bu tür fiziksel sistemlerin modellenmesinde yetersiz kalır. Bu sebepten dolayı, kutup ve sıfırlara sahip sistemlerin matematiksel modellenmesi için ARMA (AutoRegressive Moving Average) modelleme yöntemleri geliştirilmiştir. Ancak, ARMA model parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılan literatürdeki metotların çoğunda model derecesinin bilindiği kabul edilmiştir. Model derecesinin bilinmediği durumlarda, bu metotlar doğru sonuç vermemektedirler [1]. Bu yüzden doğru model derecesi seçimi için çeşitli kriter formülasyonları literatürde sunulmuştur [2]. Bu çalışmada literatürde mevcut kriterlerden Akaike Bilgi Kriteri (Akaike Information Criteria, AIC) [3], Nihai Öngörü Hatası (Final Prediction Error, FPE) [4], Minimum Tanımlama Uzunluğu, Minimum Descriptive Length, MDL) [5] ve Rissanen Kriteri (Rissanen Criteria, RIS) [6] incelenmiş, AR ve MA model derecelerinin toplamı yerine bunların çarpımı kullanılmak suretiyle daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Model Derecesi Seçim Kriterleri

ARMA modellemede, çıkış dizisi $x[n]$ aşağıdaki şekilde ifade edilir :

$$x[n] = -\sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^q b_k u[n-k] \quad (1)$$

Burada, $u[n]$ giriş dizisi, p ve q , sırasıyla, AR ve MA model derecesini belirtir.

Eşitlik (1)'de verilen a_k ve b_k model parametrelerini bulmak için çeşitli yöntemler vardır [7]. Bu tahmin yöntemlerinin çoğunda model derecesinin bilindiği varsayılmıştır. ARMA model yapısı iki model derecesine sahip olduğundan, hem AR, hem de MA model derecelerinin en uygun değerlerinin elde edilmesi gerekmektedir [8]. Derece seçimi için çeşitli kriterler vardır ve bu kriterlerin tamamı, model derecesinin ve bu dereceye ait model varyansının bir fonksiyonudur. Bunlar,

Akaïke Bilgi Kriteri :

$$AIC(p, q) = N \log(\hat{\rho}_{p,q}) + 2(p + q) \quad (2)$$

Nihai Öngörü Hatası :

$$FPE(p, q) = \hat{\rho}_{p,q} \frac{N + (p + q) + 1}{N - (p + q) - 1} \quad (3)$$

Minimum Tanımlama Uzunluğu :

$$MDL(p, q) = N \log(\hat{\rho}_{p,q}) + (p + q) \log(p + q) \quad (4)$$

Rissanen Kriteri :

$$RIS(p, q) = N \log(\hat{\rho}_{p,q}) + (p + q) \log(N) \quad (5)$$

şeklinde dir. Kriter fonksiyonlarında N ; verinin boyunu, p ; AR model derecesini, q ; MA model derecesini ve $\hat{\rho}_{p,q}$ de p . AR, q . MA derecesine ait model varyansını gösterir.

Eğer sistemin model derecesi bilinmiyorsa değişik model derecelerine ait model varyans değerleri bulunup yukarıdaki kriterlerden herhangi birine ait kriter fonksiyonu elde edilir ve bu fonksiyonun minimum değerindeki model derecesi seçilir.

Simülasyon

Kriterlerin performanslarını test etmek amacıyla üç farklı yapıda model üzerinde çalışılmıştır. Uygulanan test modellerine ait eşitlikler aşağıda verilmiştir.

a) ARMA test modeli ($p=5, q=2$) :

$$x[n] = 0.1899x[n-1] + 0.1183x[n-2] - 0.0821x[n-3] + 0.4957x[n-4] + 0.1315x[n-5] + 1.4400u[n] - 0.4160u[n-1] + 1.0000u[n-2] \quad (6)$$

b) ARMA test modeli ($p=3, q=3$) :

$$x[n] = 0.1350x[n-1] - 0.1560x[n-2] - 0.6780x[n-3] + 2.3543u[n] - 1.0706u[n-1] + 1.3100u[n-2] + 0.7590u[n-3] \quad (7)$$

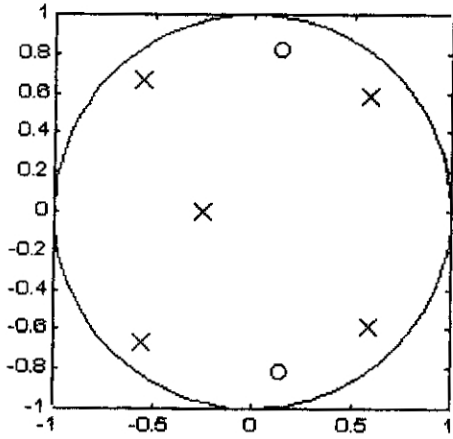
c) ARMA test modeli ($p=4, q=6$) :

$$x[n] = 0.7610x[n-1] - 0.6670x[n-2] - 0.5450x[n-3] + 0.1550x[n-4] + 2.4330u[n] + 0.2180u[n-1] - 0.8760u[n-2] + 0.5470u[n-3] - 0.2740u[n-4] + 0.4410u[n-5] + 0.1460u[n-6] \quad (8)$$

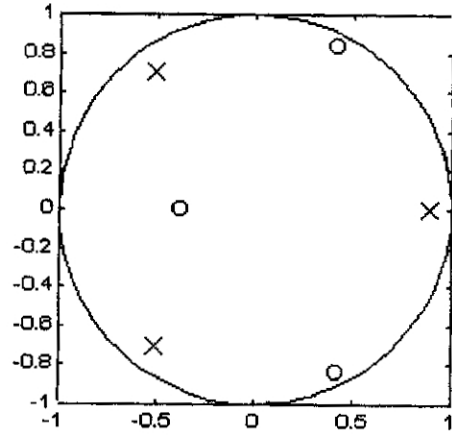
ARMA yöntemlerini test etmek amacıyla, her iki model derecesinin 1'den 10'a kadar değişen değerleri için her yöntemle ait model parametreleri bulunmuştur. Modele giriş olarak

$$u(t) = \text{PRBS}[e(t)] = \begin{cases} 1 & e(t) > 0 \\ 0 & e(t) = 0 \\ -1 & e(t) < 0 \end{cases} \quad (9)$$

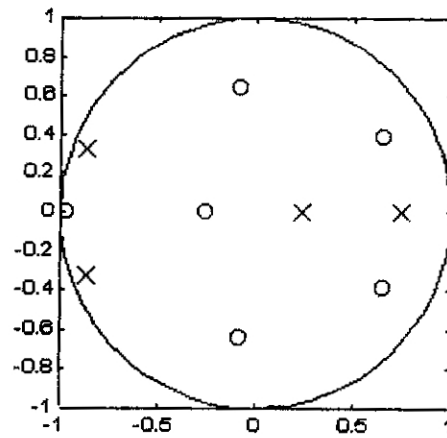
ile verilen Sözde Rasgele İkili Dizi (Pseudo Random Binary Sequence, PRBS) işareti uygulanmıştır. Burada, $e(t)$ işareti sıfır ortalamalı ve birim varyanslı beyaz gürültü işaretidir. 10 ayrı beyaz gürültü dizisi ve bunlardan üretilen PRBS kullanılarak, 10 farklı çıkış işareti dizisi elde edilmiştir. Veri uzunluğunun performansa etkisini test etmek için, 100, 500 ve 1000 adet veri içeren çıkış işaretleri kullanılmıştır. Modellere ait kutup-sıfır grafikleri Şekil 1'de gösterilmiştir. ARMA Model derecelerini tespit ederken iki boyutlu seçim kriterleri kullanılmıştır. Bu kriter formüllerinde model derecesinin çarpımı ve toplamı durumlarında farklı en uygun derece değerleri bulunmuştur. Kriterlerin bulunduğu en uygun dereceleri Çizelge 1'de verilmiştir. Çizelgeden de görülebileceği gibi, p, q kullanılarak elde edilen sonuçlar, $p+q$ sonuçlarına göre gerçek model derecesine daha yakındır.



(a)



(b)



(c)

Şekil 1. ARMA Test modellerine ait kutup-sıfır grafikleri: (a) 5. AR, 2. MA derecesi, (b) 3. AR, 3. MA derecesi, (c) 4. AR, 6. MA derecesi.

Çizelge 1. ARMA test sistemlerinin en uygun model derecesi seçimi sonuçları: (a) Model derecelerinin çarpımı (p.q) kullanılarak bulunan değerler, (b) Model derecelerinin toplamı (p+q) kullanılarak bulunan değerler.

(p . q)	Kriter	AIC			MDL			FPE			RIS		
	Veri boyu	100	500	1000	100	500	1000	100	500	1000	100	500	1000
ARMA 3,3	AR(p)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	MA(q)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
ARMA 4,6	AR(p)	4	4	4	3	3	4	4	4	4	3	3	4
	MA(q)	5	6	6	5	6	6	5	6	6	5	6	6
ARMA 5,2	AR(p)	4	6	5	4	5	5	4	6	5	5	5	5
	MA(q)	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2

(a)

(p+q)	Kriter	AIC			MDL			FPE			RIS		
	Veri boyu	100	500	1000	100	500	1000	100	500	1000	100	500	1000
ARMA 3,3	AR(p)	4	6	3	3	3	3	4	6	3	3	3	3
	MA(q)	6	4	6	3	3	3	6	4	6	3	3	3
ARMA 4,6	AR(p)	4	6	5	4	4	4	4	6	5	4	4	4
	MA(q)	9	7	6	5	6	6	9	7	6	5	6	6
ARMA 5,2	AR(p)	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5
	MA(q)	7	2	2	3	2	2	7	2	2	3	2	2

(b)

Sonuçlar

ARMA model derecesi seçim kriter formüllerindeki model derecesinin toplamı ifadesi, model derecesinin çarpımı olarak alındığında gerçek model dereceleri daha doğru elde edilmektedir. Bu durum, özellikle (p=3,q=3) dereceli testte, derece çarpımını (p.q) kullanan bütün kriterler doğru sonucu bulması ve veri boyu 1000 olarak seçildiğinde bütün kriterlerin doğru dereceleri elde etmesiyle açıkça gözükmektedir. Sonuç olarak, model derecesi seçim kriter formüllerindeki model derecelerinin toplamı ifadesi çarpımı şekline dönüştüğünde sonuçlar daha iyi elde edilmektedir.

Kaynaklar

- [1] Schwartz, G., "Estimating the dimension of a model", Ann. Statist., 6, 461-464 (1978).
- [2] Priestley, M. B., Spectral Analysis and Time Series, Academic Press (1981).
- [3] Akaike, H., "A Bayesian Extension of the Minimum AIC Procedure of Autoregressive Model Fitting", Biometrika, 66, 237-242 (1979).
- [4] Akaike, H., "A New Look at the Statistical Model Identification", IEEE Trans. Auto. Contr., AC-19, 716-723 (1974).
- [5] Rissanen, J., "Modeling by Shortest Data Description", Automatica, 14, 465-471 (1978).

- [6] Rissanen, J., "Stochastic Complexity and Modeling", *Ann. Statist.*, 14, 1080-1100 (1986).
- [7] Kaplan, A., *Sistem Parametrelerinin Modern Spektral Analiz Yöntemleri Kullanılarak Belirlenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniv. Fen Bil. Ens., Kayseri (1995).
- [8] Morikawa, H., "Adaptive Estimation of Time-Varying Model Order in the ARMA Speech Analysis", *IEEE Trans ASSP.*, 38, 1073-1083 (1990).