

ARMA SİSTEM MODELLEMESİ İÇİN PORLA METODU

Şaban ÖZER¹, Kerim GÜNEY¹, Hasan MAKAS²

1. Erciyes Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Bölümü, 38039, Kayseri,

e-mail:kguney@erciyes.edu.tr ve sozer@erciyes.edu.tr , 2. Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas MYO, Sivas

Özet: ARMA sistem modellemesi için, PORLA metodu sunulmuştur. Bu metot, izleme ve modelleme problemlerinin bağımsız alt-algoritmalar olarak düşünüldüğü bir algoritma yapısına sahiptir. Bu metotta, ilk olarak durağan olmayan veri izlemesi, giriş/çıkış veri kovaryans blok matrisinin zaman ardışımı hesaplanması ile gerçekleştirilir. İkinci olarak, modelleme problemi, ARMA modelleme probleminin içerildiği iki-kanallı PORLA metodu ile çözülür. İsteğe bağlı pencereleme teknikleri, izleme kapasitesini ve hızlı başlamayı kontrol etmek için kolayca dahil edilebilir. Zamanla hata yayılımı, PORLA metodunda oluşmaz. ARMA sistem modellemede PORLA metodunun performansını göstermek için, simulasyon sonuçları verilmiştir.

PORLA METHOD FOR ARMA SYSTEM IDENTIFICATION

Abstract: The PORLA (Pure Order Recursive Ladder Algorithm) method for ARMA (Autoregressive Moving Average) system identification is presented. It has an algorithm structure, in which the tracking and the modelling problems are treated as independent subalgorithms. In this method, first, the tracking of the nonstationary data is performed by the time-recursive calculation of the input/output data covariance block matrix. Second, the modelling problem is solved by the two-channel PORLA method in which the ARMA modelling problem is embedded. Arbitrary windowing techniques can be easily incorporated to control the fast start-up and tracking capability. Error propagation in time can not occur in the PORLA method. Simulation results are given to show the performance of the PORLA method for ARMA system identification.

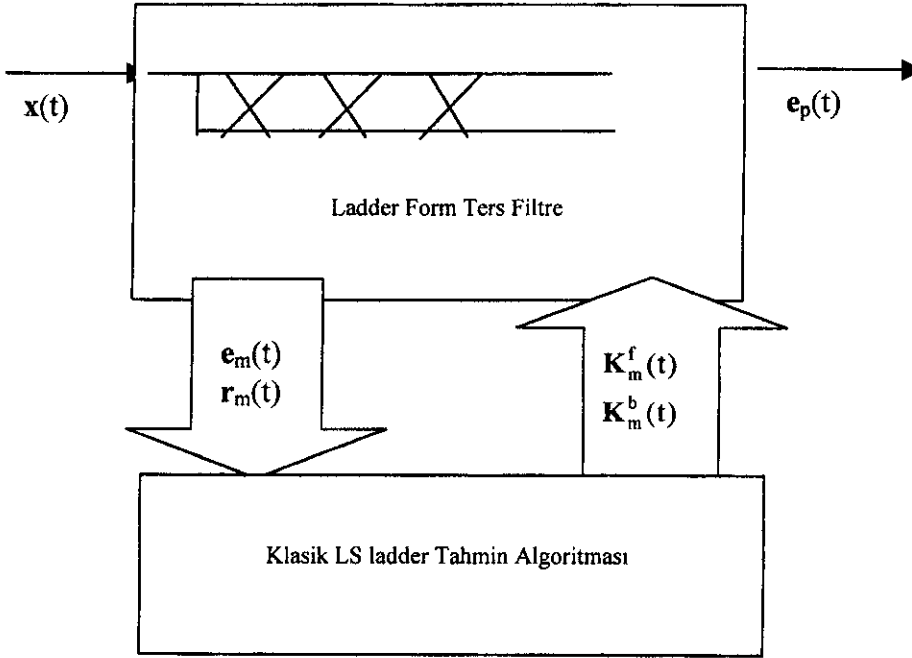
Giriş

Bir sisteme ait transfer fonksiyonunu zaman ardışımı olarak elde eden hızlı tahmin algoritmaları, yıllardır kullanılmaktadır [1-4]. Bu algoritmalar az sayıda işlem gerektirdiği için çekici olmalarına rağmen, algoritmanın her adımında daha da büyüyen yuvarlatma hatalarından olumsuz yönde etkilenirler. Bu durum, algoritmanın hızlı başlangıç yapamamasına ve izleme kapasitesini kaybetmesine sebep olur ve sonuç olarak sonlu aritmetik ortamlarda çalışıldığında, basit gradiyent algoritmalarından daha iyi performans gösteremezler. Bu problemleri çözmek için, PORLA metodu sunulmuştur [5]. PORLA metodunda zaman ardışımı giriş veri kovaryans matrisinin hesaplanmasına sınırlı olduğu için, yuvarlatma hatalarından bu metot pek fazla etkilenmez. Bu özellik, algoritmaya üstün izleme ve hızlı başlama yeteneği kazandırır. Ayrıca, sistem modellemede daha iyi sonuçları elde edilebilmek için PORLA metodunda farklı türde pencereler kullanılabilir.

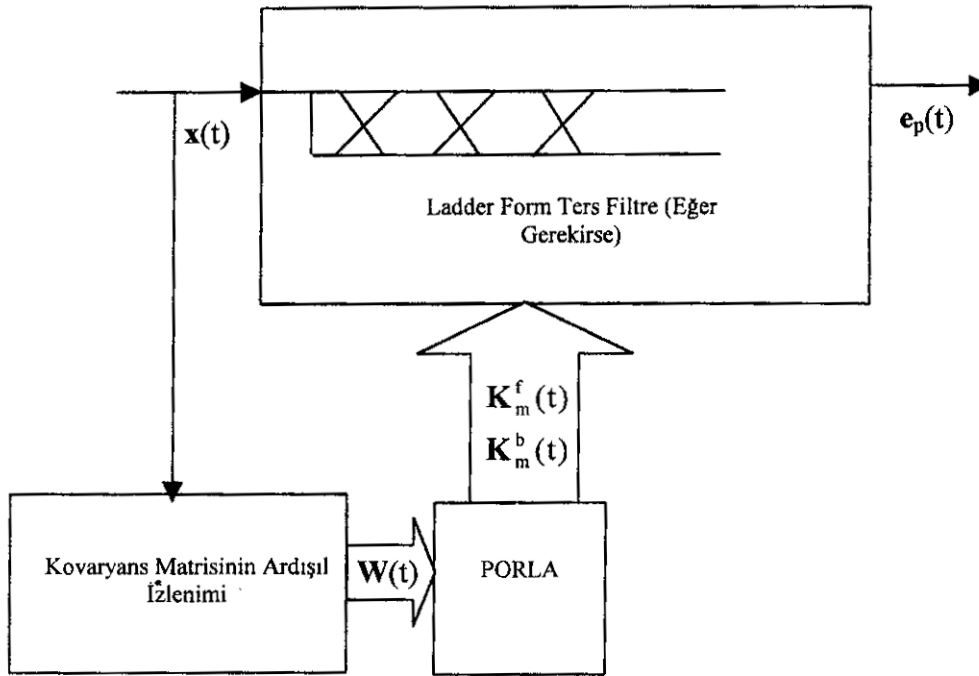
PORLA metodu, ARMA sistem modelleme tekniğinde de kullanılmıştır [6]. Bu çalışmada da PORLA metodu ile, ARMA model parametreleri tahmin edilmiştir. Simulasyon sonuçları, referans [6]'da kullanılmayan Kaiser pencere fonksiyonu ile elde edilmiştir [7].

ARMA Sistem Modelleme İçin PORLA

PORLA metodu [5], ilk olarak skaler dizilere uygulanmış genelleştirilmiş bir kovaryans ladder tekniğidir. Klasik en küçük kareler (Least Square:LS) ladder algoritma yapısı, Şekil 1'de verilmiştir. Bu klasik algoritmadaki hata yayılımlarını önlemek için, Şekil 2'de gösterilen yapı PORLA metodu olarak sunulmuştur. Şekil 1 ve 2'de, $x(t)$ giriş verisini, $e_p(t)$ artık çıkışını, $e_m(t)$ ve $r_m(t)$ sırasıyla ileri ve geri artık işaretlerini, $K_m^f(t)$ ve $K_m^b(t)$ ise sırasıyla ileri ve geri yansımaya katsayılarını, ve $W(t)$ kovaryans blok matrisini temsil eder. Şekil 2'de gösterilen algoritma yapısının birbirinden bağımsız iki önemli basamağı şudur: Giriş verisinin zaman ardışımı izlenmesi, kovaryans matrisi ile gerçekleştirilir. En küçük kareler yansımaya katsayıları, arzu edilen her bir zaman adımında PORLA eşitlikleri ile kovaryans matrisinden doğru olarak hesaplanır.



Şekil 1. Klasik LS Ladder Algoritması.



Şekil 2. PORLA Metodunun Blok Şeması.

PORLA metodunda, ARMA kovaryans ladder algoritmasının dört temel denklemi aşağıdaki şekilde verilir [6].

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m,0,j}(t) = & \mathbf{E}_{m-1,0,j}(t) + \mathbf{K}_m^{fT}(t) \mathbf{C}_{m-1,j,0}^T(t) + \mathbf{C}_{m-1,0,j}(t) \mathbf{K}_m^f(t-j) \\ & + \mathbf{K}_m^{fT}(t) \mathbf{R}_{m-1,0,j}(t) \mathbf{K}_m^f(t-j) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{m,0,j}(t) = & \mathbf{R}_{m-1,0,j}(t-1) + \mathbf{K}_m^{bT}(t-1) \mathbf{C}_{m-1,0,j}(t-1) \\ & + \mathbf{C}_{m-1,j,0}^T(t-1) \mathbf{K}_m^b(t-1-j) \\ & + \mathbf{K}_m^{bT}(t-1) \mathbf{E}_{m-1,0,j}(t) \mathbf{K}_m^b(t-1-j) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{m,0,j}(t) = & \mathbf{C}_{m-1,0,j+1}(t) + \mathbf{K}_m^{fT}(t) \mathbf{R}_{m-1,0,j+1}(t) + \mathbf{E}_{m-1,0,j+1}(t) \mathbf{K}_m^b(t-1-j) \\ & + \mathbf{K}_m^{fT}(t) \mathbf{C}_{m-1,j+1,0}^T(t) \mathbf{K}_m^b(t-1-j) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{m,j+1,0}(t) &= \mathbf{C}_{m-1,j,0}(t-1) + \mathbf{K}_m^{f^T}(t-1-j) \mathbf{R}_{m-1,0,j}^T(t-1) \\
&+ \mathbf{E}_{m-1,0,j}^T(t-1) \mathbf{K}_m^b(t-1) \\
&+ \mathbf{K}_m^{f^T}(t-1-j) \mathbf{C}_{m-1,0,j}^T(t-1) \mathbf{K}_m^b(t-1)
\end{aligned} \tag{4}$$

Burada, $\mathbf{E}_{m,0,j}(t)$ ve $\mathbf{R}_{m,0,j}(t)$ sırasıyla ileri ve geri genelleştirilmiş artık enerji blok vektörlerini, $\mathbf{C}_{m,0,j}(t)$ ve $\mathbf{C}_{m,j,0}(t)$ ise sırasıyla çapraz genelleştirilmiş artık enerji satır ve sütun blok vektörlerini, m algoritmanın artan derecesini ve T matrisin transpozmesini temsil eder. İleri ve geri yansıma matrisleri,

$$\mathbf{K}_m^f(t) = -\mathbf{R}_{m-1,0,0}^{-1}(t) \mathbf{C}_{m-1,0,0}^T(t) \tag{5}$$

$$\mathbf{K}_m^b(t) = -\mathbf{E}_{m-1,0,0}^{-1}(t) \mathbf{C}_{m-1,0,0}(t) \tag{6}$$

ile verilir. (5)-(6) denklemlerinde -1 matrisin tersini gösterir. Kovaryans blok matrisi aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathbf{W}_{i,j}(t) = \mathbf{E}_{0,i,j}(t) \tag{7}$$

$$\mathbf{W}_{i+1,j+1}(t) = \mathbf{R}_{0,i,j}(t) \tag{8}$$

$$\mathbf{W}_{i,j+1}(t) = \mathbf{C}_{0,i,j}(t) \tag{9}$$

İki kanallı AR parametreleri ARMA ladder yansıma matrislerinden, Şekil 3'de verilen algoritma yapısı ile hesaplanır. Şekil 3'de, p algoritmanın sabit derecesi ve I birim matristir. ARMA parametreleri ise,

$$\mathbf{a}_m(t) = -\mathbf{a}_{22}^{(m)}(t) \tag{10}$$

$$\mathbf{b}_m(t) = \mathbf{a}_{22}^{(m)}(t) - \mathbf{a}_{21}^{(m)}(t) \tag{11}$$

denklemlerinden elde edilir.

```

FOR   t = 0,1,2,.....
initialize    $\mathbf{a}_0^{(1)}(t) = \mathbf{I}$             $\mathbf{a}_0^{(1)}(t) = \mathbf{K}_1^{f^T}(t)$ 
               $\mathbf{b}_0^{(1)}(t) = \mathbf{K}_m^{b^T}(t)$         $\mathbf{b}_1^{(1)}(t) = \mathbf{I}$ 

FOR   m = 2,3,.....,p
  [
    FOR   j = 1,2,.....,m-1
      [
         $\mathbf{b}_j^{(m)}(t) = \mathbf{b}_{j-1}^{(m-1)}(t-1) + \mathbf{K}_m^{b^T}(t)\mathbf{a}_j^{(m-1)}(t)$ 
         $\mathbf{a}_j^{(m)}(t) = \mathbf{a}_j^{(m-1)}(t) + \mathbf{K}_m^{f^T}(t)\mathbf{b}_{j-1}^{(m-1)}(t-1)$ 
      ]
       $\mathbf{a}_0^{(m)}(t) = \mathbf{I}$             $\mathbf{a}_m^{(m)}(t) = \mathbf{K}_m^{f^T}(t)$ 
       $\mathbf{b}_m^{(m)}(t) = \mathbf{K}_m^{b^T}(t)$         $\mathbf{b}_m^{(m)}(t) = \mathbf{I}$ 
    ]
  ]
FOR   m = 1,2,.....,p
  [  $\mathbf{a}^m(t) = \mathbf{a}_m^{(p)}(t)$  ]

```

Şekil 3. ARMA ladder yansıma matrislerinden iki kanallı AR parametrelerinin hesaplanması.

Simülasyon Sonuçları

ARMA model parametrelerinin tahmininde PORLA metodunun performansını gösterebilmek için, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden sistemlerin modellenmesi ile ilgili dört tane örnek verilmiştir. Verilen örneklerde transfer fonksiyonlarının,

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (12)$$

formunda olduğu kabul edilmiştir. Bu çalışmada, PORLA metodunun programı Visual Basic programlama dilinde yazılmıştır. Sistem girişine uygulanan beyaz gürültü dizisi ve Kaiser pencere fonksiyonu verileri, MATLAB programı ile oluşturulup dosyalara kaydedilmiştir. PORLA programı, beyaz gürültü dizisi ve Kaiser pencere fonksiyonu verilerini bu dosyalardan okumaktadır (Bu çalışmada yapılan PORLA programı, makalenin ilk iki yazarından e-mail veya posta aracılığı ile temin edilebilir).

Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden sistemler için, PORLA metodu ile tahmin edilen model katsayıları ile gerçek sistem katsayıları Çizelge 1-4'de karşılaştırılmıştır. Çizelge 1-4'de, ayrıca tahmin edilen model katsayıları ile gerçek sistem katsayıları arasındaki mutlak hatalar da verilmiştir. Çizelge 1-4 de verilen simülasyon sonuçları elde edilirken, Kaiser pencere fonksiyonunun pencere genişliği (L) 200, şekil parametresi (β) 9 olarak seçilmiştir. Kelime uzunluğu 64 bit ve beyaz gürültü dizisindeki örnek sayısı 500 olarak alınmıştır. Bu parametre değerleri

değiştirilerek ve çeşitli pencere fonksiyonları kullanılarak, Çizelge 1-4'de verilen sonuçlardan daha iyi veya daha kötü sonuçları PORLA metodu ile elde etmek mümkündür.

Çizelge 1. Birinci Dereceden Sistem İçin. Gerçek Sistem Katsayıları İle Tahmin Edilen Model Katsayılarının Karşılaştırılması.

ARMA Parametreleri	Gerçek Değer	Tahmin Edilen Değer	Mutlak Hata
a_1	0.40	0.4002112	0.0002112
b_0	0.98	0.9830927	0.0030927
b_1	1.50	1.5010920	0.0010920

Çizelge 2. İkinci Dereceden Sistem İçin. Gerçek Sistem Katsayıları İle Tahmin Edilen Model Katsayılarının Karşılaştırılması.

ARMA Parametreleri	Gerçek Değer	Tahmin Edilen Değer	Mutlak Hata
a_1	0.70	0.6935778	0.0064222
a_2	-0.30	-0.3071243	0.0071243
b_0	0.90	0.9046335	0.0046335
b_1	-0.96	-0.9622451	0.0022451
b_2	1.05	1.0561490	0.0061490

Çizelge 3. Üçüncü Dereceden Sistem İçin. Gerçek Sistem Katsayıları İle Tahmin Edilen Model Katsayılarının Karşılaştırılması.

ARMA Parametreleri	Gerçek Değer	Tahmin Edilen Değer	Mutlak Hata
a_1	-0.85	-0.8499627	0.0000373
a_2	-0.65	-0.6500098	0.0000098
a_3	0.50	0.4999726	0.0000274
b_0	1.00	0.9999182	0.0000818
b_1	-1.20	-1.1999520	0.0000480
b_2	1.50	1.4999100	0.0000900
b_3	-1.61	-1.6099500	0.0000500

Çizelge 4. Dördüncü Dereceden Sistem İçin. Gerçek Sistem Katsayıları İle Tahmin Edilen Model Katsayılarının Karşılaştırılması.

ARMA Parametreleri	Gerçek Değer	Tahmin Edilen Değer	Mutlak Hata
a_1	-0.60	-0.5999157	0.0000843
a_2	0.50	0.4999637	0.0000363
a_3	-0.40	-0.3999385	0.0000615
a_4	0.46	0.4599809	0.0000191
b_0	1.00	0.9998597	0.0001403
b_1	-1.20	-1.1998790	0.0001210
b_2	1.32	1.3198730	0.0001270
b_3	-1.51	-1.5098400	0.0001600
b_4	1.59	1.5898830	0.0001170

PORLA metodu ile tahmin edilen model katsayılarının, gerçek sistem katsayıları ile çok iyi bir uyumluluk içinde olduğu Çizelge 1-4'den açıkça görülmektedir. Bu uyumluluk, PORLA metodunun ARMA sistem modellemesinde kullanılabileceğini göstermektedir.

Sonuç

PORLA metodu, ARMA sistem modellenmesinde başarılı bir şekilde kullanılmıştır. PORLA metodu ile tahmin edilen model katsayılarının, gerçek sistem katsayıları ile çok iyi bir uyumluluk içinde olduğu görülmüştür. Klasik algoritmalarda görülen, zamanla yuvarlatma hatalarının birikmesi sebebiyle oluşan parametre izleme yeteneği kaybına PORLA metodunda rastlanmamıştır. Ayrıca diğer klasik algoritmalarla karşılaştırıldığında, zaman ardışımının sadece giriş verilerinin kovaryans blok matrisi oluşturulurken gerçekleşmesi ve buna bağlı olarak işlem sayısının azalması, PORLA metoduna yüksek bir hız kazandırmaktadır. Bu durum, PORLA metodunu gerçek zaman uygulamalarında daha çekici hale getirmektedir.

Kaynaklar

- [1] T. Söderström and P. Stoica, "System Identification", Prentice Hall, Cambridge, 1989.
- [2] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, "Discrete Time Signal Processing", Prentice Hall, USA, 1989.
- [3] J.G. Proakis and D. G. Manolakis, "Digital Signal Processing", Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [4] A.H. Kayran, "Sayısal İşaret İşleme (Ders Notu)", 2. Bölüm, İTÜ, Ekim 1996.
- [5] P. Strobach, "Pure Order Recursive Least-Squares Ladder Algorithms", IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 34, 880-897 (1986).
- [6] P. Strobach, "Recursive Covariance Ladder Algorithms for ARMA System Identification", IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 36, 560-580 (1988).
- [7] H. Makas, "Porla Metodunun Sistem Modellemedeki Performans Analizi", Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniv., Fen Bilimleri Enst., 1998.