Erc. Üniv. Fen Bil. Enst. Derg., **16** (1-2): 63-70, 2000

ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMSIZLIĞI ÜZERİNE

Pakize TEMTEK
Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 38039, Kayseri
e-mail : temtek@erciyes .edu.tr

Özet:

$$\frac{d}{ds}\left[\sigma(s)\frac{d}{ds}\left(r(s)\frac{dx}{ds}\right)\right]+q(s)\left(\frac{dx}{ds}\right)^{\beta}+p(s)h(x)=f(s)$$

denkleminin çözümlerinin salınımsızlığı için yeter şartlar verildi. Sonuçlar, Parhi tarafından verilen bazı kriterler genelleştirilerek elde edildi.

ON THE NONOSCILLATION OF SOLUTIONS FOR A CLASS OF THIRD ORDER NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract: Sufficient conditions for the solutions of

$$\frac{d}{ds}\left[\sigma(s)\frac{d}{ds}\left(r(s)\frac{dx}{ds}\right)\right]+q(s)\left(\frac{dx}{ds}\right)^{\beta}+p(s)h(x)=f(s)$$

to be nonoscillatory are presented. The results obtained generalize some criteria given by Parhi

Giriş

Bu çalışmada

$$\frac{d}{ds}\left[\sigma(s)\frac{d}{ds}\left(r(s)\frac{dx}{ds}\right)\right]+q(s)\left(\frac{dx}{ds}\right)^{\beta}+p(s)h(x)=f(s) \tag{1}$$

şeklinde ki denklemler üzerinde duracağız. Burada σ, r, q, p ve f, $\sigma(s)>0$, r (s) > 0 ve $f(s)\geq 0$ olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığı üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonlardır, $\beta>0$ sabiti tek tamsayıların oranıdır ve h (x), $x \neq 0$ için h (x) x > 0 olacak şekilde $(-\infty,\infty)$ aralığı üzerinde süreklidir.

(1) denkleminin çeşitli özel durumları [5] , [15] çoğu araştırmacı tarafından çalışıldı . (1) denkleminde , $\beta = 1$, $\sigma(s) = r(s) = 1$, f (s) = 0 ve h (x (s)) = x (s) olduğu durum Birkhoff [1] , Gregus [4] , Hanan [6] ve Philos [14] tarafından incelendi . Daha sonra Parhi [13] , (1) denkleminde $\beta = 1$ ve h (x (s)) = x (s) olduğu durumu ele alarak inceledi . Son zamanlarda $\beta = 1$, q (s) = 0 ve h (x (s)) = x (s) iken , bu denklem Cecchi [2] tarafından gözönüne alındı . Ayrıca lineer olmayan durumda $\beta = 1$, $r(s) = 1$, f (s) = 0 ve $\alpha > 0$ tek tamsayıları için $h(x) = x^{\alpha}$ olmak üzere (1) denklemi üzerinde Erbe [3] ve Heidel [7] çalıştı . Daha sonra Parhi [8 − 12] , (1) denkleminin, $r(s) = 1$ ve $h(x) = x^{\alpha}$ durumlarını inceledi .

Bu çalışmada (1) denkleminin salınımsız çözümleri ile ilgili bazı yeterli şartlar verecegiz . Sonuçlar , [8 − 13] de ifade edilen bazı kriterleri genelleştirmektedir. Bunun için uygun bir dönüşüm yardımıyla (1) denklemini daha önce bilinen formlara indirgemek gerekir . Eğer

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{r(s)} = \infty \tag{2}$$

ise , bu durumda $R : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli fonksiyon $R(s) = \int_0^{s} \frac{du}{r(u)}$ şeklinde tanımlı (2) den , $s \to \infty$ için $R(s) \to \infty$ olacak şekilde artan bir fonksiyondur . Dolayısıyla R^{-1} tersi mevcuttur . t = R (s) yani $s = R^{-1}(t)$ dir . (1) denkleminde $y(t) = x(R^{-1}(t)) = x(s)$ dönüşümü yapılırsa ,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\sigma(s)}{r(s)}\frac{d^2y}{dt^2}\right] + \frac{q(s)}{(r(s))^{\beta-1}}\left(\frac{dy}{dt}\right)^{\beta} + p(s)r(s)h(y) = f(s)r(s) \tag{3}$$

denklemi elde edilir . İncelememizi $0 \leq T$ olmak üzere $[T,\infty)$ aralıgında mevcut (1) denkleminin belirgin olmayan gerçel çözümlerine kısıtlayacağız .

Şimdi amaca yönelik bazı kavramlara yer verelim . Eğer $s \in [t,\infty)$ ve her $s \geq s_1$ için $x(s) \neq 0$ olacak şekilde bir $s_1 \geq T$ mevcut ise , (1) denkleminin bir x çözümüne salınımsızdır denir . Eğer herhangi bir $s_1 \geq T$ için $x(s_2) > 0$ ve $x(s_3) < 0$ olacak şekilde $s_1 < s_2 < s_3$ eşitsizliğini sağlayan s_2 ve s_3 sayıları mevcut ise , (1) denkleminin bir x çözümü salınımlıdır denir . Eğer (1) denkleminin bir x çözümüne keyfi yeterince büyük sıfıra sahip , ancak belli bir yerden sonra negatif değil veya pozitif değil ise , z – tipi çözümdür denir . (1) denkleminin bir x çözümü salınımlı ya da z – tipi ise , zayıf salınımlı olarak adlandırılır . Eğer (1) denkleminin tüm çözümleri salınımsızsa , denkleme salınımsız denklem denir .

Ayrıca ileride gerekli olan ve ispatı Parhi [11] dekine benzer şekilde yapılabilecek bir lemma ifade edelim .

Lemma 1 . σ , r ve q , $\sigma(s) > 0$ olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığı üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d}{ds}\left[\sigma(s)\frac{dw}{ds}\right] + \frac{q(s)}{r(s)}w = 0 \tag{4}$$

denklemini gözönüne alalım . Eğer w (s) , a > 0 olmak üzere $s \in [a,\infty)$ için w (s) > 0 ve ya < 0 olacak şekilde (4) denkleminin salınımsız bir çözümü ve u da a < b < c için u (b) = 0 = u (c) ve $[b,c]$ aralığı üzerinde $u(s) \neq 0$ olacak şekilde $[a,\infty)$ aralığı üzerinde bir kez sürekli türevlenebilen bir fonsiyon ise ,

$$\int_b^c \left[\sigma(s)(u'(s))^2 - \frac{q(s)}{r(s)}u^2(s)\right]ds > 0 \tag{5}$$

dır.

Uyarı 1 . t ve s değişkenleri arasında $R(s) = \int_0^s \frac{du}{r(u)}$ olmak üzere t = R (s) dönüşümü altında w (s) = z (t) olduğundan (4) denklemi ve (5) eşitsizliği sırasıyla

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\sigma(s)}{r(s)}\frac{dz}{dt}\right] + q(s)z = 0 \tag{6}$$

ve

$$\int_{R(b)}^{R(c)} \left[\frac{\sigma(s)}{r(s)}(u'(t))^2 - q(s)u^2(t)\right]dt > 0 \tag{7}$$

olarak ifade edilir .

Bu kesimde (1) denklemi ile ilgili teoremleri ifade ve ispat edelim .

Teorem 1. (1) denklemi ile ilgili genel kabullere ilaveten $p(s) \geq 0$ ve $q(s) \leq 0$ olsun. Eğer

i) $x > 0$ için $h(x) \leq x$

ii) Yeterince büyük s değerleri için $p(s) + q(s) > 0$

ve

iii) $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{f(s)}{p(s)} = \infty$

ise, bu durumda (1) denkleminin sınırlı çözümleri salınımsızdır.

İspat : Teoremin ispatını dönüştürülmüş (3) denklemi için yapacağız. $y(t) = x(R^{-1}(t)) = x(s)$ den dolayı (1) denklemi için sonuçların doğrudan geçerli olduğu açıktır.

y, $t \geq 0$ olmak üzere $t \geq T$ için $|y(t)| \leq K$ olacak şekilde $[T, \infty)$ aralığı üzerinde (3) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun. Verilen şarttan $t \geq t_0$ için $f(t) \geq Kp(t)$ olacak şekilde bir $t_0 \geq T$ mevcuttur. Teoremi ispatlamak için z- tipi ve salınımlı türde çözümlerinin olmadığını göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki y , (3) denkleminin a ve b $(t_0 \leq a < b)$ ardışık katlı sıfırlı z- tipinde negatif olmayan bir çözümü olsun. Buna göre $y'(c) = 0$ ve $t \in (a, c)$ için $y'(t) > 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ mevcuttur. (3) denklemi $y'(t)$ ile çarpılırsa,

$$\left[\frac{\sigma(s)}{r(s)} y'(t) y''(t)\right]' = \frac{\sigma(s)}{r(s)} (y''(t))^2 - \frac{q(s)}{(r(s))^{\beta-1}} (y'(t))^{\beta+1} - p(s) r(s) h(y) y'(t) + r(s) f(s) y'(t) \tag{8}$$

dır. Elde edilen bu eşitliğin a dan c ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\sigma(s)}{r(s)} y'(t) y''(t)\right]_a^c \\ &\geq \int_a^c [f(s) - p(s) h(y)] r(s) y'(t) dt \\ &\geq \int_a^c [f(s) - Kp(s)] r(s) y'(t) dt > 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu kabule çelişkidir.

y , a ve b $(t_0 \le a < b)$ ardışık katlı sıfırlı z- tipinde pozitif olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda $y'(c)=0$ ve $t \in (c,b)$ için $y'(t)>0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ mevcuttur. Buna göre $y''(c) \ge 0$ ve $y''(b) \le 0$ dır. (3) denkleminin c den b ye integrali alınırsa,

$$0 \ge \frac{\sigma(R^{-1}(b))}{r(R^{-1}(b))} y''(b) - \frac{\sigma(R^{-1}(c))}{r(R^{-1}(c))} y''(c)$$

$$\ge -\int_c^b \frac{q(s)}{(r(s))^{\beta-1}} \left(\frac{dy}{dt}\right)^{\beta} dt - \int_c^b p(s)r(s)h(y)dt \quad > 0$$

olup çelişkidir.

Şimdi de kabul edelim ki y, $t \in (a,b)$ için $y(t)<0$, $t \in (b,a')$ için $y(t)>0$ ve $y'(a) \le 0$, $y'(b) \ge 0$, $y'(a') \le 0$ olacak şekilde a , b ve a' $(t_0 \le a < b < a')$ ardışık sıfırlı salınımlı bir çözüm olsun . Böylece $y'(c)=y'(c')=0$ ve $t \in (c,b)$ ve de $t \in (b,c')$ için $y'(t)>0$ olacak şekilde $c \in (a,b)$ ve $c' \in (b,a')$ noktaları mevcuttur . Bu durumda ya $y''(b)>0$ ya da $y''(b) \le 0$ dır . $y''(b) \le 0$ olsun . (8) in c den b ye integrali alınırsa,

$$0 \ge \frac{\sigma(R^{-1}(b))}{r(R^{-1}(b))} y'(b)y''(b)$$

$$= \int_c^b \left[\frac{\sigma(s)}{r(s)}(y''(t))^2 - \frac{q(s)}{(r(s))^{\beta-1}}(y'(t))^{\beta+1} - p(s)r(s)h(y)y'(t) + r(s)f(s)y'(t)\right]dt > 0$$

çelişkisi elde edilir .

Bu kez de $y''(b)>0$ olsun . (8) in b den c' ne integrali alınırsa,

$$0 \ge -\frac{\sigma(R^{-1}(b))}{r(R^{-1}(b))} y'(b)y''(b)$$

$$\ge \int_b^{c'} [f(s) - Kp(s)]r(s)y'(t)dt > 0$$

çelişkisi elde edilir . Bu da teoremin ispatını tamamlar .

Örnek 1 .

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{s^9}{64}e^{\frac{s^4}{4}}+\frac{s^{-3}}{7}e^{-\frac{3}{2}s^4}\right)\frac{d}{ds}\left(s^{-3}\frac{dx}{ds}\right)\right]-s^{-12}e^{-\frac{s^4}{2}}\left(\frac{dx}{ds}\right)^5+\frac{s^7}{2}x(1-x)=\frac{3}{16}s^{11}+\frac{s^7}{2}e^{-\frac{s^4}{4}}-\frac{s^7}{2}e^{-\frac{s^4}{2}};s>0$$

Denkleminin tüm sınırlı çözümleri salınımsızdır . Özel olarak $x(s)=e^{-\frac{s^4}{4}}$ denklemin sınırlı salınımsız bir çözümüdür .

Teorem 2 . (1) denklemine ilişkin genel varsayımlara ilaveten $p(s)\le 0$, $q(s)\le 0$ ve $\beta=1$ olsun . Eğer

i) y < 0 için $h(y)\ge y$

ve

ii) q , yeterince büyük s değerleri için p (s) + q (s) < 0 ve $p(s)r(s)-q'(s)\ge 0$ olacak şekilde sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise , bu durumda (1) denkleminin tüm çözümleri salınımsızdır .

İspat : y , $t_0\ge 0$ olmak üzere $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde (1) denklemine denk olan (3) denkleminin bir çözümü olsun . Kabul edelim ki y (t) , (3) denkleminin a ve b $(t_0\le a<b)$ ardışık katlı sıfırlı z- tipinde negatif olmayan bir çözümü olsun. Buna göre $y'(c)=0$ ve $t\in(a,c)$ için $y'(t)>0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ mevcuttur. $\beta=1$ için (8) ifadesinin a dan c ye integrali alınırsa ,

$$0=\int_a^c\left[\frac{\sigma(s)}{r(s)}(y''(t))^2-q(s)(y'(t))^2-p(s)r(s)h(y)y'(t)+r(s)f(s)y'(t)\right]dt>0$$

çelişkisi elde edilir .

y , (3) denkleminin a ve b $(t_0\le a<b)$ ardışık katlı sıfırlı z – tipinde pozitif olmayan bir çözümü olsun. Böylece $y'(c)=0$ ve $t\in(c,b)$ için $y'(t)>0$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ mevcuttur. (3) denkleminin c den b ye integrali alınırsa ,

$$0\ge\frac{\sigma(R^{-1}(b))}{r(R^{-1}(b))}y''(b)-\frac{\sigma(R^{-1}(c))}{r(R^{-1}(c))}y''(c)$$

$$\geq -\int_c^b q(s)y'(t)dt - \int_c^b p(s)r(s)h(y)dt$$

$$= q\left(R^{-1}(c)\right)y(c) + \int_c^b y(t)q'(s)dt - \int_c^b p(s)r(s)h(y)dt$$

$$\geq -\int_c^b [p(s)r(s) - q'(s)]y(t)dt > 0$$

çelişkisine varılır .

Şimdi de kabul edelim ki y , $t \in (a,b)$ için $y(t) < 0$, $t \in (b,a')$ için $y(t) > 0$ ve $y'(a) \leq 0$, $y'(b) \geq 0$, $y'(a') \leq 0$ olacak şekilde a , b ve a' $(t_0 \leq a < b < a')$ ardışık sıfırlı salınımlı bir çözüm olsun . Böylece $y'(c) = y'(c') = 0$ ve $t \in (c,b)$ ve de $t \in (b,c')$ için $y'(t) > 0$ olacak şekilde $c \in (a,b)$ ve $c' \in (b,a')$ noktaları mevcuttur . Bu durumda ya $y''(b) \geq 0$ ya da $y''(b) < 0$ dır . (8) ifadesinin b den c' ne integrali alınırsa ,

$$0 \geq \frac{\sigma\left(R^{-1}(b)\right)}{r\left(R^{-1}(b)\right)} y'(b)y''(b)$$

$$= \int_b^{c'} \left[\frac{\sigma(s)}{r(s)} (y''(t))^2 - q(s)(y'(t))^2 - p(s)h(y)y'(t) + f(s)r(s)y'(t) \right] dt > 0$$

çelişkisi elde edilir . Bu kez de $y''(b) < 0$ olsun . (3) denkleminin c den b ye integrali alınırsa ,

$$0 \geq \frac{\sigma\left(R^{-1}(b)\right)}{r\left(R^{-1}(b)\right)} y''(b) - \frac{\sigma\left(R^{-1}(c)\right)}{r\left(R^{-1}(c)\right)} y''(c)$$

$$\geq q\left(R^{-1}(c)\right)y(c) - \int_c^b [p(s)r(s) - q'(s)]y(t)dt > 0$$

çelişkisi bulunur . Bu da teoremin ispatını tamamlar .

Teorem 3 . (1) denklemine ilişkin genel varsayımlara ilaveten $p(s) \geq 0$ ve (4)

denklemi salınımsız olsun . Eğer $\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{p(s)} = 0$ ve $\lim_{x\to 0} \frac{h(x(s))}{x} = \theta$, $0 \leq \theta < \infty$ ise , bu durumda $\beta = 1$ olmak üzere (1) denkleminin tüm sınırlı çözümleri salınımsızdır.

İspat : y , $t \geq T$ için $|y(t)| \leq K$ olacak şekilde $[T, \infty)$ aralığı üzerinde (1) denklemine denk olan (3) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun . Hipotezden dolayı $t \geq t_0$ için $\frac{h(x(s))}{x(s)} \leq K$ ve $t \geq t_1$ için $f(s) > K^2 p(s)$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0 > T$ noktası vardır . İspatın geri kalan kısmı Teorem 2' ye benzer şekilde yapılabilir .

Kaynaklar

[1] G . D . Birkhoff , On Solutions of the Ordinary Linear Differential Equations of the Third Order , Ann . of Math . 12 , 103 – 127 (1911) .

[2] M . Cecchi , Z . Dosla and M . Marini , On the Qualitative Behaviour of Solutions of Third Order Differential Equations , J . Math . Anal . Appl .181, 749 – 766 (1996).

[3] L . Erbe , Existence of Oscillatory Solitions and Asymptotic Behaviour for a Class of Third Order Linear Differential Equations , Pasific J . Math . 64 , 369 – 385 (1976) .

[4] M . Gregus , On Some Properties of the Solutions of a Homogeneous Linear Differential Equation of the Third Order , Mat . Fiz . Casopis Slovenks . Akad . Vied ., 73 – 78 (1955) .

[5] M . Gregus , Third Order Linear Differential Equations , D . Reidel Publishing Company , Dortrecht , Boston , Lancaster , 1987 .

[6] M . Hanan , Oscillation Criteria for Third Order Linear Differential Equations , Pasific J. Math . , 11 , 919 – 944 (1961) .

[7] J . W . Heidel , Qualitative Behaviour of Solutions of a Third Order Nonlinear Differential Equation , Pasific J . Math . , 27 , 507 – 526 (1968) .

[8] N . Parhi , Nonoscillatory Behaviour of Solutions of Nonhomogeneous third Order Differential Equations , Applicable Analysis , 12 , 273 – 285 (1981) .

[9] N . Parhi and S . Parhi , Oscillation and Nonoscillation Theorems for Nonhomogeneous Third Order Differential Equations , Bulletin Inst . Math . Academia Sinica , 11 , 125 – 139 (1983) .

[10] N . Parhi and S . Parhi , Nonoscillation and Asymptotic Behaviour for Forced Nonlinear Third Order Differential Equations , Bulletin Inst . Math . Academia Sinica , 13 , 367–384 (1985) .

[11] N . Parhi and S . Parhi , On the Behaviour Solutions of the Differential Equations $(r(t)y'')' + q(t)y'^{\beta} + p(t)y^{\alpha} = f(t)$, Annales Polonici Mathematici , 47, 137 –148 (1987) .

[12] N . Parhi and S . Parhi , Qualitative Behaviour of Solutions of Forced Nonlinear Third Order Differential Equations , Riv . Math . Univ . Parma (4) , 13, 201- 210 (1987) .

[13] N . Parhi , Nonoscillation of Solutions of a Class of Third Order Differential Equations , Acta .Math . Hung . , 54 , 79 – 88 (1989) .

[14] Ch . G . Philos , Oscillation and Asymptotic Behaviour of Third Order Differential Equations , Bulletin Inst . Math . Academia Sinica , 11 , 141 –160 (1983) .

[15] C . A . Swanson , Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations , A . P . , New York , (1968).