Erc. Üniv. Fen Bil. Enst. Derg., **16** (1-2): 71-75, 2000

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE GALERKİN YÖNTEMİ

Ali ÖZDEŞ
İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Malatya

Özet: Elastisitinin Young Modeli olarak bilinen dördüncü mertebeden diferensiyel denklemin Varyasyonel Galerkin yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Sonuçların Ritz çözümü ile uyum içinde olduğu görüldü.

GALERKİN METHOD ON THE SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract: The numerical solutions of the forth order differential equation so-called the Young modulus of elasticity have been obtained by using the Variational Galerkin method. It is shown that results are reasonably in good agreement with Ritz solution.

Giriş

Genel olarak A bir operatör olmak üzere

$$AU = f \tag{1}$$

şeklinde ifade edilebilen denklemlerin yaklaşık çözümünde Varyasyonel yöntemler geniş bir uygulama alanına sahiptir. Özellikle A' nın diferansiyel operatör olması durumunda Galerkin ve Ritz yöntemlerinin çok sayıda uygulamasına rastlamak mümkündür [1-3]. Varyasyonel yöntemlerle ilgili oldukça geniş bilgiler Mihklin[4], Rektorys[5] ve Reddy[3] tarafından verilmiştir.

(1) eşitliği şeklinde ifade edilebilen denklemlerin yaklaşık çözümünde kullanılabilen Galerkin yöntemi aşağıdaki teorem üzerine temellenmiştir:

Teorem 1: H bir Hilbert uzayı, N ise bu uzayda yoğun bir küme olsun. Eğer bir $u \in H$ her $v \in N$ ye ortogonal ise $u = 0$ dır.

İspat: Her $v \in N$ için $(u,v) = 0$ ise $u \in N^{\perp}$ demektir $(N^{\perp} = \{u \in H : u \perp x, \forall x \in N\})$. $u \in N^{\perp}$ olsun. $\overline{N} = H$ olduğundan $H \subset \overline{N}$,yani H nın her elemanı N nin değme noktasıdır. Dolayısıyla $u \in \overline{N}$ dır. Değme noktası özelliğinden N de bir (x_n) dizisi vardır öyle ki $x_n \to u$ dır. $u \perp N$ olduğundan $(x_n, u) = 0$ dır. Çarpımın özelliğinden $[x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x,y)]$ $(x_n, u) \to (u,u) = \|u\|^2 = 0$ olduğundan $u = 0$ dır.

Böylece H Hilbert uzayından $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \cdots$ şeklinde bir baz seçilirse teoreme göre $(u, \phi_k) = 0 \quad (k = 1,2,3,\cdots)$ olması $u = 0$ olmasını gerektirir. Eğer H da yoğun bir N kümesi, a_k keyfi sabitler olmak üzere $\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ şeklinde elemanlardan oluşturulursa $\forall k$ için $(u, \phi_k) = 0 \quad (k = 1,2,3,\cdots)$ olduğunda $(u, \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k) = 0$ olur.

Buna göre (1) H Hilbert uzayında bir denklem olmak üzere $\forall k$ için $(Au_0 - f, \phi_k) = 0$ olacak şekilde bir $u_0 \in D_A$ bulunabilirse u_0 (1) denkleminin çözümü olacaktır.

Galerkin yönteminde bu u_0 elemanının bir yaklaşımı olarak

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k \tag{2}$$

alınır. a_k sabitleri $(Au_n - f, \phi_k) = 0$ koşulundan tanımlanacaktır. Bu koşul a_k sabitleri için n-bilinmeyenli n-denklemden oluşan bir sistem verir. Bu sistem açık olarak yazılırsa

$$\begin{array}{l} (A\phi_1, \phi_1)a_1 + (A\phi_2, \phi_1)a_2 + \cdots + (A\phi_n, \phi_1)a_n = (f, \phi_1) \\ (A\phi_1, \phi_2)a_1 + (A\phi_2, \phi_2)a_2 + \cdots + (A\phi_n, \phi_2)a_n = (f, \phi_2) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ (A\phi_1, \phi_n)a_1 + (A\phi_2, \phi_n)a_2 + \cdots + (A\phi_n, \phi_n)a_n = (f, \phi_n) \end{array} \tag{3}$$

elde edilir. $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ ler lineer bağımsız olduklarından bu sistem tek olarak çözülebilir. Böylece (1)-denkleminin çözümü olan u_0 elemanının (2) ile verilen bir yaklaşık seri çözümü elde edilmiş olur. (2)-serisinin yakınsaklığı için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2: Eğer H Hilbert uzayında yoğun bir D_A kümesinde tanımlı A operatörü pozitif tanımlı ise katsayıları (3)-sistemiyle tanımlanan (2)-Galerkin dizisi (1)-denkleminin çözümüne yakınsar[5].

Genel olarak Galerkin yöntemi A operatörü üzerine bir kısıtlama getirmez. Ancak bu durumda (3)-sisteminin çözülebilirliği ve (2)-serisinin yakınsaklığından bahsetmek oldukça zordur.

Test Problem

$$\begin{array}{ll} ((4+x)U'')'' + 600U = 5000(x - x^2) & (0 \le x \le 1) \\ U(0) = 0 \quad, U(1) = 0 & \\ U''(0) = 0 \quad, U''(1) = 0 & \end{array}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. Problem elastik bir maddeden oluşan bir çubuğun burulmasının modellemesi olarak yorumlanabilir. Daha genel anlamda ise Elastisinin Young modeli olarak ifade edilebilir.

Burada $AU = ((4+x)U'')''+600U$ şeklinde tanımlanan A operatörü; $[0,1]$ aralığında dördüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilen ve verilen yan koşulları sağlayan fonksiyonların D_A lineer kümesi üzerinde pozitif tanımlıdır.

Verilen koşullara uygun olarak baz fonksiyonları $\phi_j(x) = \sin j\pi x \quad , j = 1,2,\cdots,n$ şeklinde seçilebilir. Bu durumda (2) yaklaşık çözümü

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sin j\pi x$$

olacaktır. Böylece (3)-sisteminin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\int_0^1 \sin j\pi x \sin k\pi x dx = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \dfrac{1}{2} & k = j \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \sin j\pi x \sin k\pi x dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(-1)^{j-k}-1}{(j-k)^2\pi^2} - \dfrac{(-1)^{j+k}-1}{(j+k)^2\pi^2}\right] & k \neq j \\ \dfrac{1}{4} & k = j \end{cases}$$

ve

$$\int_0^1 (x-x^2)\sin j\pi x dx = \frac{2}{j^3\pi^3}\left[1-(-1)^j\right] \qquad \text{olup}$$

$$(A\phi_k, \phi_k) = \frac{9\pi^4 k^4}{4} + 300$$

$$(A\phi_j, \phi_k) = \frac{\pi^4 j^2 k^2}{2}\left[\frac{(-1)^{j-k}-1}{(j-k)^2\pi^2} - \frac{(-1)^{j+k}-1}{(j+k)^2\pi^2}\right]$$

$$(f, \phi_j) = \frac{2}{j^3\pi^3}\left[1-(-1)^j\right]$$

olur.

Öncelikle n=3 için Rektors[5] ün Ritz çözümü ile karşılaştırmak amacıyla sistem Gauss-Eleme yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar tablo1 de değerlendirilmiştir. Daha sonra yöntemin teorisine uygun olarak daha doğru çözümler bulmak için baz fonksiyonlarının sayısı artırılarak n=5 ve n=10 alınıp çözümler elde edilmiştir. Bu sonuçlar tablo2 de değerlendirilmiştir.

Hata Tahmini

u_0 genelleştirilmiş çözüm, u_n yaklaşık çözüm olmak üzere hata $\|u_0 - u_n\|^2 \le \frac{\|Au_n - f\|^2}{C^2}$ şeklinde tanımlanır. Burada $C^2 = 8\pi^2 \cong 78.9568$ dir[5]. $\|Au_n - f\|^2 = \int_0^1 (Au_n - f)^2 dx$ şeklinde hesaplanabilir. Ayrıca $\|u_n\|^2 = (Au_n, u_n) = \int_0^1 u_n Au_n dx$ olup bağıl hata; $\frac{\|u_0 - u_n\|}{\|u_n\|}$ şeklinde hesaplanır.

Buna göre n=3 için elde edilen çözümlerde yapılan bağıl hata 4.7815×10^{-3}, n=5 için 3.4198×10^{-3} ve n=10 için 2.2169×10^{-3} olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 1. n=3 için Galerkin ve Ritz yöntemleri ile hesaplanmış Au_3 değerlerinin karşılaştırılması.

x	Galerkin Yöntemi	Ritz yöntemi[5]	$f(x)$
1/6	678.5036	678.33	694.4445
2/6	1141.2297	1138.44	1111.1111
3/6	1240.9370	1240.82	1250.0000
4/6	1095.1678	1094.92	1111.1111
5/6	707.5659	707.38	694.4444

Çizelge 2. n=5 ve n=10 için Galerkin yöntemi ile elde edilen Au değerlerinin karşılaştırılması.

x	Au_5	Au_{10}	$f(x)$
1/6	713.2254	687.0083	694.4445
2/6	1102.1666	1109.9425	1111.1111
3/6	1253.6437	1251.7874	1250.0000
4/6	1112.0912	1114.8921	1111.1111
5/6	686.1001	701.3978	694.4444

Sonuç

Göz önüne alınan problem bir çubuğun burulmasının modellemesi olarak elastisiti teorisinde ortaya çıkmıştır. Analitik olarak, diferensiyel denklem bir dönüşüm yardımıyla Bessel tipi denkleme dönüştürülüp çözülebilir[6].

Ancak bu tür çözümün sayısal olarak değerlendirilmesi oldukça zordur. Bu nedenle denklemin çözümü için değerlendirmenin daha pratik olduğu ve istenilen doğrulukta bulunabilmesi açısından Galerkin yöntemi tercih edildi.

Sonuçlar n 'nin çeşitli değerleri için hesaplandı. n=3 için çözüm Rektory[5] de elde edilmiş Ritz çözümü ile karşılaştırıldı. Çizelge 1' de görüldüğü gibi her iki çözüm çok iyi bir uyum sergilemektedir. Yöntemin teorisine uygun olarak çözüm serisinden fazla sayıda terim alındığında daha iyi sonuçların bulunacağı Çizelge 2 ve hata analizlerinden gözlendi.

Sonuç olarak analitik çözümü oldukça karmaşık olan böyle problemler için varyasyonel tekniklerle elde edilen çözümlerin analitik çözüm yerine kullanılabileceği söylenebilir.

Teşekkür

Bu çalışma, İnönü Üniversitesi Araştırma Fon Saymanlığı tarafından 2001/17 nolu proje ile desteklenmiştir.

Kaynaklar

[1] T. Öziş and A. Özdeş, A direct variational methods applied to Burgers equation. J. Comp. App. Math. 71, 163-175 (1996).
[2] K. Rektorys, On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in the space variables. Czechoslovak math. J. 21, 96 (1971).
[3] J.N. Reddy, Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering. McGraw-Hill Company, Newyork (1986).
[4] S.G. Mikhlin, The Numerical Performance of Variational Methods. Volters-Noordhoff Publishing, Groninges (1971).
[5] K. Rektorys, Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. D.Reidel Publishing Company, London, (1980).
[6] A. Pflüger, Elastostatiğin Stabilite Problemleri. İTÜ. İstanbul (1970).