Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Rasyonel Sayılarda Tanımlı Düzgün Yıldız Çokgenler ve Köşe Sayı Dizileri

Mehmet ARSLAN [a,*]

[a] *Milli Eğitim Bakanlığı, Malatya Bilim ve Sanat Merkezi, Malatya, TÜRKİYE*
* *Sorumlu yazarın e-posta adresi: marslanmat@gmail.com*
DOI:10.29130/dubited.1101987

Öz

Bu çalışmada, üzerinde yüzlerce yıldır çalışılan düzgün yıldız çokgenler konusu ele alınmıştır. Literatürde pozitif tam sayılar kümesinde çalışılmış olan düzgün yıldız çokgenler ilk kez rasyonel sayılar kümesinde tanımlanmış ve analiz edilmiştir. Düzgün yıldız çokgenleri ifade ederken kullandığımız iki değişken rasyonel sayılarda tanımlanmıştır. Bu durum düzgün yıldız çokgenlerin sarmal yapıda olup olmamasına göre incelenmiştir. En sade formlarının eşit bir açıyla üst üste gelmesiyle oluşan düzgün yıldız çokgenler için, bu açıyı veren bağıntı elde edilmiş ve sözsüz ispat tekniği ile ispatlanmıştır. Bu açı sarmal yapıdaki düzgün yıldız çokgenlerde de köşeler arası açıdır. Yine düzgün yıldız çokgenin sarmal yapıda olup olmamasına göre köşe noktalarına saat yönünün tersi yönde başlangıç 1 sayısı olmak üzere ardışık tam sayıları yerleştirip oluşum çizgilerini takip ederek bu sayılarla iki çeşit genel sayı dizisi oluşturulmuştur. Ayrıca düzgün yıldız çokgenlerin oluşum çizgilerinin izinde köşe noktalarına saat yönünün tersi yönde yine başlangıç 1 sayısı olmak üzere ardışık tam sayılar yerleştirilerek sırasıyla köşe noktalarındaki sayılarla sayı dizileri elde edilmiştir. Her iki yöntemle de düzgün yıldız çokgen şekli çizmeden sayı dizileri elde edilebilmektedir. Yapılan çalışma ile düzgün yıldız çokgenler için tanım aralığı rasyonel sayılar kümesine yükseltilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Düzgün yıldız çokgen, Sarmal yapı, Oluşum açısı*

Regular Star Polygons Defined in Rational Numbers and Vertex Number Sequences

Abstract

In this study, the subject of regular star polygons, which has been studied for hundreds of years, is discussed. Regular star polygons, which were studied in the set of positive integers in the literature, were defined and analyzed for the first time in the set of rational numbers. The two variables we use to express regular star polygons are defined in rational numbers. This situation has been investigated according to whether regular star polygons have a spiral structure or not. For regular star polygons formed by the overlapping of their simplest forms at an equal angle, the relation giving this angle was obtained and proved by the proof without words technique. This angle is also the angle between the vertices in regular star polygons in spiral structure. Again, depending on whether the regular star polygon is spiral or not, two kinds of general number sequences are formed with these numbers by placing consecutive integers, starting with the number 1, at the corner points in the counterclockwise direction and following the formation lines. In addition, on the traces of the formation lines of regular star polygons, successive integers, again starting with 1, were placed at the corner points in the counterclockwise direction, and number sequences were obtained with the numbers at the corner points, respectively. With both methods, number sequences can be obtained without drawing a regular star polygon shape. With the study, the definition range for regular star polygons has been increased to the set of rational numbers.

Keywords: *Regular star polygon, Spiral structure, Angle of formation*

Geliş: 12/04/2022, Düzeltme: 10/08/2022, Kabul: 29/09/2022

I. GİRİŞ

Geometrinin önemli bir başlığı olan düzgün yıldız çokgenler üzerinde yüzlerce yıldır çalışmalar yapılmaktadır. Yıldız çokgenler, M.Ö. 540 civarında, pentagram adı verilen beş köşeli yıldızın Pisagor derneğine üyeliğin sembolü olarak kullanılmasıyla ortaya çıktı [1]. Daha sonra Euclid, Boethius, Bradwardine, Regio Mantanus, de Boulles, Kepler ve Schlafi gibi önemli matematikçiler konu üzerinde çalıştılar ve yıldız çokgenler üzerine çok ilginç özellikler keşfettiler [2]. On dördüncü yüzyılda Thomas Bradwardine "Geometria Speculativa" isimli çalışmasında yıldız çokgenlerden bahsetmiştir [3]. Daha sonra 1619 yılında Johannes Kepler "Harmonices Mundi" isimli çalışmasında bu konuda sistematik olarak ilerlemeler elde etmiştir [4]. Kepler düzgün çokgenin bir uyarlaması olarak yıldız çokgenleri tanımlamıştır [5]. Harold S. M. Coxeter ve Robert S. Wilson tarafından düzgün yıldız çokgenlerin tanım ve özellikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır [6], [7]. Yıldız çokgenler basit olmayan çokgenlerdir. Düzgün çokgenler gibidirler, çünkü uç noktalarında kesişen düzlemdeki bölümlerin birleşiminden oluşurlar, ancak bitiş noktalarından başka noktalarda da kesişirler [1]. Ayrıca düzgün yıldız çokgenlerin geometrik süsleme sanatında geniş bir uygulama alanına sahip olduğu bilinmektedir [8], [9], [10], [11].

Çokgenlerin genel formu durumundaki düzgün yıldız çokgenler çalışmaya değer bir konudur [12]. Bu çalışmada, literatürde pozitif tam sayılar kümesinde çalışılmış olan düzgün yıldız çokgenler ilk kez rasyonel sayılar kümesinde tanımlandı ve analiz edildi. Öncelikle düzgün yıldız çokgenleri ifade ederken kullanılan iki değişken rasyonel sayılarda tanımlandı. Bu durum düzgün yıldız çokgenlerin sarmal yapıda olup olmamasına göre incelendi. En sade formlarının eşit bir açıyla üst üste gelmesiyle oluşan sarmal yapıda olmayan düzgün yıldız çokgenler için bu açıyı veren bağıntı elde edildi ve görsellerle sözsüz ispat tekniği kullanılarak ispatlandı. Bu açı bağıntısı sarmal yapıdaki düzgün yıldız çokgenlerin aynı konumdaki açıları içinde doğru sonuç vermektedir. Yine düzgün yıldız çokgenlerin köşe noktalarına saat yönünün tersi yönde başlangıç 1 sayısı olacak şekilde ardışık tam sayılar yerleştirilip oluşum çizgileri takip edildiğinde düzgün yıldız çokgenin sarmal yapıda olup olmamasına göre iki çeşit genel sayı dizisi oluşturuldu. Son olarak düzgün yıldız çokgenlerin oluşum çizgilerinin izinde saat yönünün tersi yönde 1 sayısından başlayarak ardışık tam sayıları yerleştirip sırasıyla köşe noktalarındaki sayılarla sayı dizileri elde edildi. İki yöntemle de düzgün yıldız çokgen şekli çizmeden sayı dizilerinin elde edilebileceği metotlar ortaya çıkartıldı.

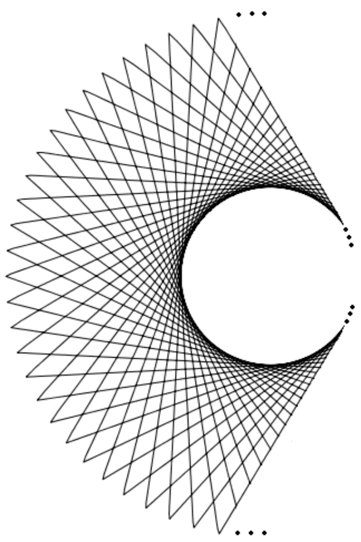
Bu çalışmada, herhangi bir $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeninde köşe noktalarına karşılık gelecek sayı konumlarının şekil çizmeden belirlenebileceği yöntemlerin geliştirilmesi amaçlandı.

II. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada, düzgün yıldız çokgenler ile ilgili bilinen tanım ve özellikler incelenerek yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Çalışma sürecinde çizimler Cabri II Plus, Desmos geometri programları kullanılarak elde edilmiştir.

A. DÜZGÜN YILDIZ ÇOKGEN TANIMI

$k \geq 1$, $n \geq 3$ ve $k, n \in N$ olmak üzere bir daire üzerinde eşit aralıklı n nokta alıp herhangi bir noktadan itibaren her k. noktasını eş doğru parçaları ile bağlayarak oluşturulan şekle düzgün yıldız çokgen denir [6], [7], [12]. Her k. noktasının bağlı olduğu n köşeli düzgün yıldız çokgen Şekil 1'de görüldüğü gibi $\{n/k\}$ Schläfli sembolü ile ifade edilmektedir.



Şekil 1. *$\{n/k\}$ Düzgün yıldız çokgeni.*

III. BULGULAR VE TARTIŞMA

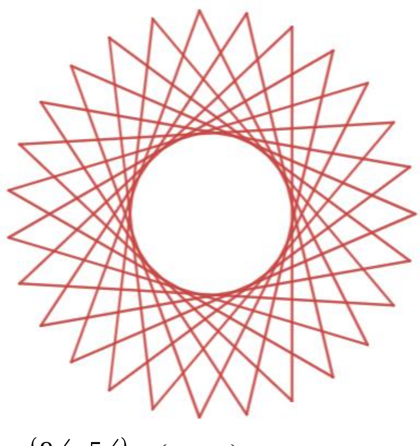
A. RASYONEL SAYILI DÜZGÜN YILDIZ ÇOKGENLER

Burada $k \geq 1,\ n \geq 3$ olmak üzere rasyonel sayılardan genişletilerek elde edilen k ve n tamsayıları çerçevesinde $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgenler analiz edilecektir. Literatürde karşılaşılmayan bu durumlar düzgün yıldız çokgenlerin sarmal yapıda olup olmamasına göre iki bölümde ele alınacaktır:

A.1. Uyarlama Katsayısı

$a \geq 1,\ b \geq 3$ ve $a, b \in Q$ olmak üzere a ve b rasyonel sayılarını $a.q$ ve $b.q$ tam sayılarına dönüştüren $q \in R$ değerine uyarlama katsayısı denir. $a, b \in R$ için $\{b/a\}$ düzgün yıldız çokgenlerini ifade etmek için $q \in R$ uyarlama katsayısına ihtiyaç duyarız. $a.q=k$ ve $b.q=n$ olmak üzere n ve k tam sayılarda aralarında asal ise $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni sarmal bir yapıdadır. Sarmal yapılar için,

$\left\{ {}^{9}\!/_{2}, {}^{5}\!/_{3} \right\} = \left\{ \frac{9}{2}.6, \frac{5}{3}.6 \right\} = \{27,10\}$ olur. Şekil 2'de görülen $\{27,10\}$ düzgün yıldız çokgeninde uyarlama katsayısı q =6 dır.



Şekil 2. *$\left\{ {}^{9}\!/_{2}, {}^{5}\!/_{3} \right\} = \{27,10\}$ düzgün yıldız çokgeni.*

A.2. Oluşum Açısı

$a \geq 1,\ b \geq 3$ ve $a, b \in Q$ için $a.q=k$ ve $b.q=n$ olmak üzere n ve k tam sayılarda aralarında asal değilse $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni n ve k'nın tam sayılarda en sade formundaki düzgün yıldız çokgeninin $\text{Ebob}(n,k)$ değeri kadar üst üste eşit açılarla yerleştirilmesi ile oluşur. Bu açıya oluşum açısı denir ve α sembolüyle gösterilir.

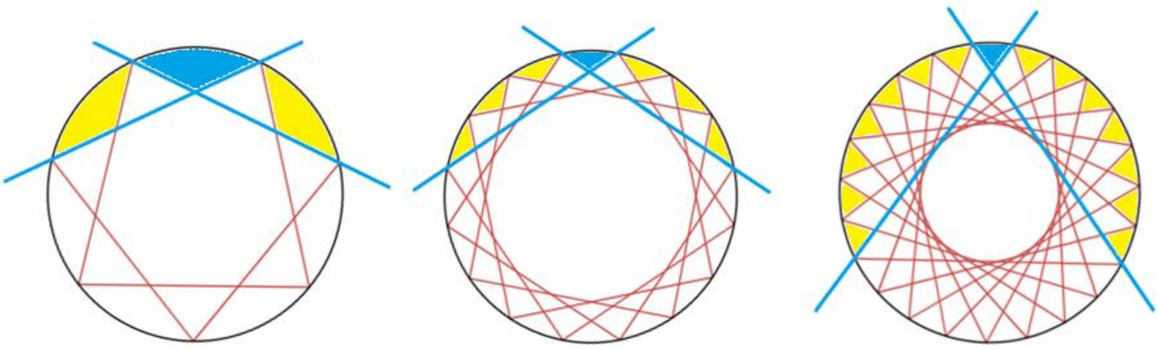
$\frac{n}{k}$ 'nın tam sayılarda en sade formu $\frac{c}{d}$ ve $\text{Ebob}(n,k) = \mu$ ise $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni $\{c/d\}$ düzgün yıldız çokgeninin α açısıyla μ sayıda tekrarı ile oluşur.

Bir çemberde iki kiriş arasındaki açının ölçüsü, açının iki taraftan karşısındaki yayların ölçülerinin toplamının yarısına eşittir. $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgenlerde Şekil 3'te gösterilen kiriş açılar için açının gördüğü yaylar üzerinde bir genelleme oluşmadığından bu kapsamın dışında kalan açılar çalışılmıştır. α açısı hesaplanırken α açısını oluşturan iki çember kirişinin kapsamı dışında kalan açılar üzerinden sonuca gidilecektir.

$k \geq 1,\ n \geq 3$ ve $k, n \in N$ olmak üzere $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeninde k değişkeninde kapsam dışı açı sayısı Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1. *$\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgenlerinde kapsam dışı açı sayısı.*

k	**Kapsam Dışı Açı Sayısı**	**(*k*-1)**
1	2.0=0	0
2	2.1=2	1
3	2.2=4	2
…	…	…
k	2.(*k*-1)=2*k*-2	*k*-1



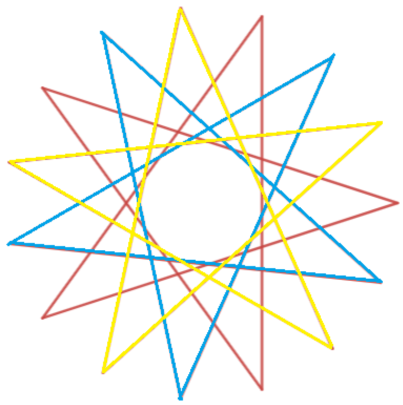
Şekil 3. $\{7/2\}, \{16/4\}, \{23/8\}$ *düzgün yıldız çokgenlerinde α açısı ve kapsam dışı açılar.*

$\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgenini çevreleyen çemberin ölçüsünden iki taraflı kapsam dışı açıların toplam ölçüsü çıkarılıp ikiye bölünerek α açısı hesaplanır. α açısını veren formül aşağıdaki gibidir.

$$s(\alpha) = \frac{360 - 2(k-1)\left(\frac{360}{n}\right)}{2} = 180 - 360\frac{(k-1)}{n} \qquad (1)$$

Elde edilen bağıntının kullanıldığı bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek: $\left\{3,\ {}^{6}\!/\!_{5}\right\} = \left\{3.5,\ \frac{6}{5}.5\right\} = \{15,6\}$ burada uyarlama katsayısı q=5'tir. $\text{Ebob}(15,6)=3$ olduğundan $\{15,6\}$ düzgün yıldız çokgeni Şekil 4'te görüleceği gibi 3 tane $\{5,2\}$ düzgün yıldız çokgeninin $s(\alpha)=180-360\dfrac{(6-1)}{15}=180-120=60^{o}$ açılarla üst üste yerleştirilmesi ile oluşur.

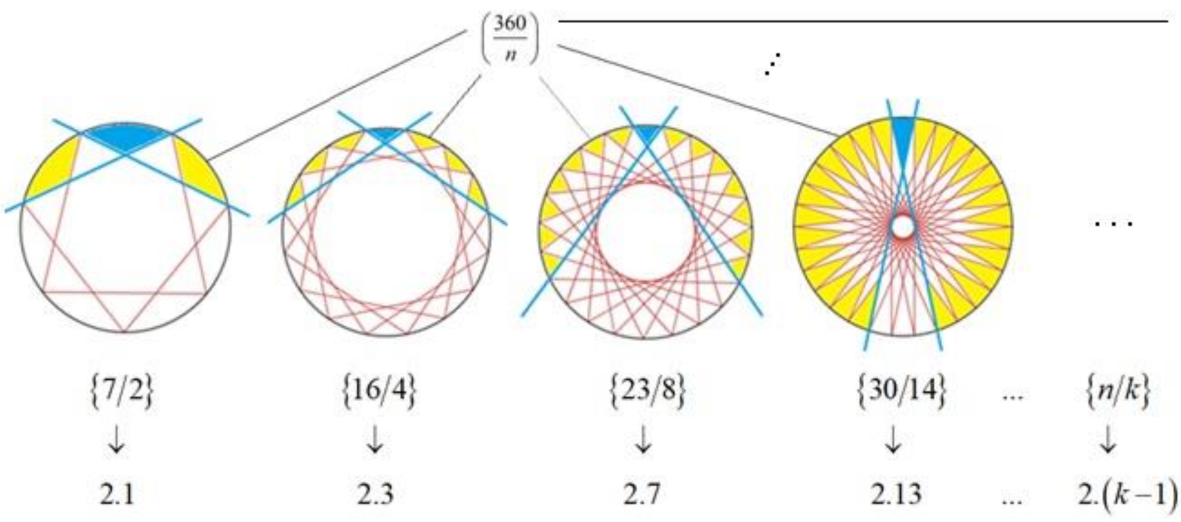


Şekil 4. $\left\{3,\ {}^{6}\!/\!_{5}\right\} = \{15,6\}$ *düzgün yıldız çokgeni.*

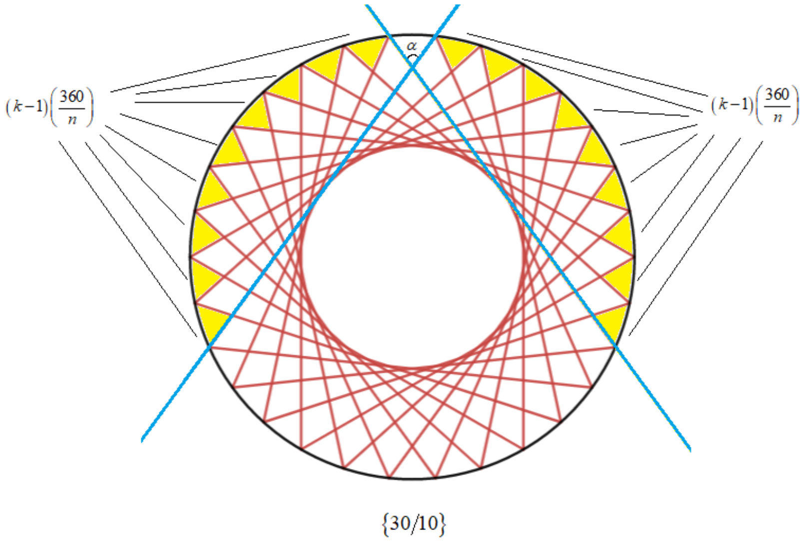
A.3. Düzgün Yıldız Çokgenlerde Oluşum Açısını Veren Formülün Sözsüz İspatı

A.3.1. Teorem: $k \geq 1,\ n \geq 3$ ve $k,n \in N$ olmak üzere $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgenlerinde α oluşum açısı $180-360\dfrac{(k-1)}{n}$ formülü ile hesaplanır.

İspat: $\{7/2\}, \{16/4\}, \{23/8\}, \{30/10\}, \{30/14\}, \ldots, \{n/k\}$ düzgün yıldız çokgenleri üzerinde α oluşum açısı için sözsüz ispat Şekil 5 ve Şekil 6'daki gibidir.



Şekil 5. *Düzgün yıldız çokgenlerde kapsam dışı açı sayısı.*



Şekil 6. *Düzgün yıldız çokgenlerde kapsam dışı açılar ve α oluşum açısı.*

B. DÜZGÜN YILDIZ ÇOKGENLERDE KÖŞE SAYI DİZİLERİ

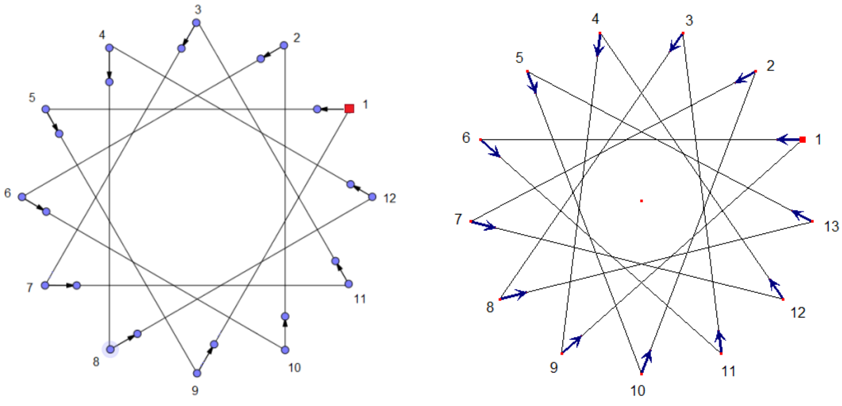
B.1. Oluşum Çizgilerinin İzinde Sayı Dizileri

$\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni üzerinde herhangi bir köşesinden başlanarak tüm köşeler saat yönünün tersi yönde 1,2,...,n sayıları ile işaretlenir. 1 sayısı ile başlanıp düzgün yıldız çokgen tanımına uygun olarak ok yönünde sayıları takip edildiğinde sayı dizileri elde edilir.

B.1.1. Teorem: $k \geq 1,\ n \geq 3$ ve $k, n \in N$ olmak üzere $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgen şekli sarmal yapıda ise 1 ile başlanıp k kadar artarak devam eden sayı dizisinde n hariç tüm elemanlara $\operatorname{mod}(n)$ uygulanır. 1 sayısına tekrar ulaşıldığında dizi tamamlanır. Sarmal yapıdaki $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni için

$$(1)_{\operatorname{mod}(n)},\ (1+k)_{\operatorname{mod}(n)},\ (1+2k)_{\operatorname{mod}(n)},\ \ldots,n,\ \ldots,\ \left(1+(n-2)k\right)_{\operatorname{mod}(n)}, \left(1+(n-1)k\right)_{\operatorname{mod}(n)},\ (1)_{\operatorname{mod}(n)} \qquad (2)$$

genel formunda sayı dizisi elde edilir. Bu sayede düzgün yıldız çokgen şekline ihtiyaç duymadan sayı dizileri oluşturulabilir. Şekil 7'de $\{12/4\}$ ve $\{13/5\}$ düzgün yıldız çokgenlerinde sayı dizileri gösterilmiştir.



Şekil 7. $\{12/4\}$ ve $\{13/5\}$ *düzgün yıldız çokgenlerinde sayı dizileri.*

Örnek: $\{13/5\} \Rightarrow 1-6-11-3-8-13-5-10-2-7-12-4-9-1$

$\{26/9\} \Rightarrow 1-10-19-2-11-20-3-12-21-4-13-22-5-14-$
$23-6-15-24-7-16-25-8-17-26-9-18-1$

B.1.2. Teorem: $j \geq 1,\ k \geq 1,\ n \geq 3$ ve $j,k,n \in N$ olmak üzere $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgen şekli sarmal yapıda değil ise $\mathrm{Ebob}(n,k)$ değeri kadar farklı sayı dizi grubu oluşur. Her sayı dizisi grup sıra numarası ile başlar ve sonlanır. $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni için $\mathrm{Ebob}(n,k)=j$ olmak üzere

$$(1)_{\mathrm{mod}(n)},\ (1+k)_{\mathrm{mod}(n)},\ (1+2k)_{\mathrm{mod}(n)},\ \dots,\ (1+(n-2)k)_{\mathrm{mod}(n)},(1+(n-1)k)_{\mathrm{mod}(n)},\ (1)_{\mathrm{mod}(n)}\ /$$
$$(2)_{\mathrm{mod}(n)},\ (2+k)_{\mathrm{mod}(n)},\ (2+2k)_{\mathrm{mod}(n)},\ \dots,\ (2+(n-2)k)_{\mathrm{mod}(n)},(2+(n-1)k)_{\mathrm{mod}(n)},\ (2)_{\mathrm{mod}(n)}\ /$$
$$\cdots$$
$$(j)_{\mathrm{mod}(n)},\ (j+k)_{\mathrm{mod}(n)},\ (j+2k)_{\mathrm{mod}(n)},\ \dots,n,\ \dots,\ (j+(n-2)k)_{\mathrm{mod}(n)},(j+(n-1)k)_{\mathrm{mod}(n)},\ (j)_{\mathrm{mod}(n)}$$

genel sayı dizisi elde edilir.

Verilen teoremler için; $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni tanımında ifade edilen, bir daire üzerinde eşit aralıklı *n* nokta alınıp herhangi bir noktadan itibaren her *k*. noktasının sırasıyla eş doğru parçaları ile bağlanarak düzgün yıldız çokgen oluştuğundan elde edilen iki genel formdaki sayı dizisinin ispatı açıktır. $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgen şekli sarmal yapıda değil ise $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni *n* ve *k* nın tam sayılarda en sade formundaki düzgün yıldız çokgeninin $\mathrm{Ebob}(n,k)$ değeri kadar üst üste eşit açılarla yerleştirilmesi ile oluştuğundan buradaki genel sayı dizisi parçalı bir yapıdadır.

Örnek: $\{12/4\} \Rightarrow \mathrm{Ebob}(12,4)=4 \Rightarrow \underrightarrow{1-5-9-1}\ /\ \underrightarrow{2-6-10-2}\ /\ \underrightarrow{3-7-11-3}\ /\ \underrightarrow{4-8-12-4}$

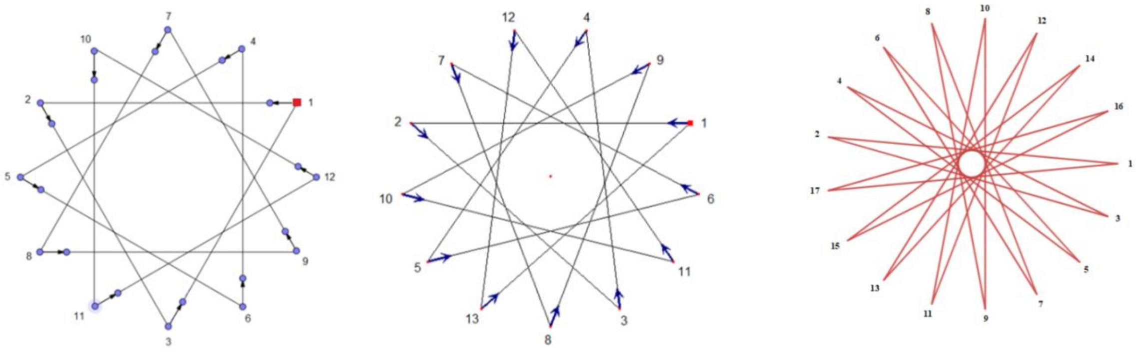
$\{18/8\} \Rightarrow \mathrm{Ebob}(18,8)=2 \Rightarrow \underrightarrow{1-9-17-7-15-5-13-3-11-1}\ /$
$\underrightarrow{2-10-18-8-16-6-14-4-12-2}$

Elde edilen teoremler sayesinde bahse konu olan sayı dizisini ve dizinin herhangi sıradaki bir terimini düzgün yıldız çokgen şeklini çizmeden elde edebilmek mümkün olmaktadır.

B.2. Köşe Noktalarında Sayı Dizileri

$\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeni üzerinde herhangi bir noktadan başlanarak saat yönünün tersinde tanıma uygun olarak ok yönünde sarmal çizgiler takip edilip tüm köşeler 1, 2, ... , *n* sayıları ile işaretlenir. Burada başlangıç noktasından saat yönünün tersinde ardışık köşelerdeki sayılarla sayı dizileri elde edilir.

Herhangi bir $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeninde 1 sayısı ile başlayıp μ kadar artarak devam eden sayı dizileri, μ artış miktarına göre yorumlandığında, *n* hariç tüm elemanlara mod(*n*) uygulanır. Tekrar 1 sayısına ulaşıldığında sayı dizisi tamamlanır. Şekil 8'de bu durum açıkça görülmektedir.



Şekil 8. $\{12/4\}$, $\{13/5\}$ ve $\{17/8\}$ *düzgün yıldız çokgenlerinde sayı dizileri.*

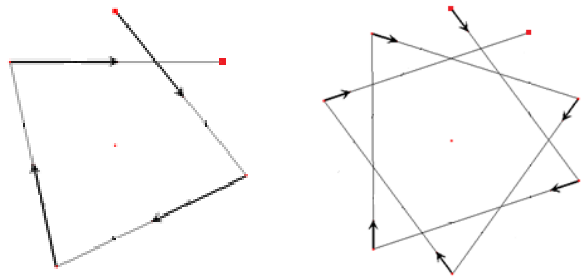
$\{12/4\}$, $\{13/5\}$ ve $\{17/8\}$ düzgün yıldız çokgenlerinde 1 ile başlayıp sırasıyla μ=3, μ=8 ve μ =15 artarak devam eden sayı dizileri:

1, 4, 7, 10, 1, 2, 5, 8, 11, 2, 3, 6, 9, 12, 3   mod(12),

1, 9, 4, 12, 7, 2, 10, 5, 13, 8, 3, 11, 6, 1   mod(13) ve

1, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1   mod(17).

şeklindedir. Burada Şekil 9'da örneklendirilen μ artış miktarı, $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeninde herhangi bir köşedeki noktanın saat yönünde veya tersinde devamındaki noktaya ulaşırken çizdiği oluşum çizgileri sayısıdır.



Şekil 9. $\{7/2\} \Rightarrow \mu = 4$, $\{10/3\} \Rightarrow \mu = 7$

B.2.1. Düzgün Yıldız Çokgen Şekli Çizmeden Sayı Dizilerinin Eldesi

Herhangi bir $\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgenin köşelerinde oluşan *n* terimli sayı dizisi düzgün yıldız çokgen şekli çizilmeden elde edilebilir. Bu yöntem büyük *n* ve *k* değerleri için kolaylık sağlar. Burada öncelikle *n*, *k*'ye bölünür.

$$\begin{array}{r|l} n & k \\ \cline{2-2} & \delta \\ - & \\ \hline \lambda & \end{array}$$

Bu bölme işleminde; δ, oluşan sayı dizisinin her biri (*k*-1) adet sayıdan oluşan aralık sayısını ve (λ-1) son aralıktan sonra gelen sayı adedini temsil etmektedir. Tablo 2'de de görüleceği gibi sayı dizisinde önce δ tane (*k*-1) adet sayıya ait boşlukları oluşturacak biçimde 1'den (1+δ)'ye ardışık sayılar yerleştirilir. (1+δ)'den sonra (λ -1) tane sayı gelecektir. Bu şekilde elde edilen 1, 2, … , δ, δ +1 dizi terimleri temel sınır noktalarını verir.

Tablo 2. *$\{n/k\}$ düzgün yıldız çokgeninde sayı dizisi oluşumu*

$\{n/k\}$	1	**(k-1)** tane sayı	2	**(k-1)** tane sayı	3	…	**(δ +1)**	**(λ -1)** tane sayı
		(1+ μ) ***(1+2μ)*** **…**		**…**				
Sıra No:	1	2 3 **…**		**…**		**…**		**…** ***n***

Dizideki temel sınır noktalarını belirledikten sonra; (δ +2), (δ +1)'den sonraki k. adımdaki kutuda; (δ +3), (δ +2)'den sonraki k. adımdaki kutudadır. Bu şekilde (δ +2), (δ +3), (δ +4), … , n belirlenebilir. Ayrıca oluşturmaya çalışılan sayı dizisindeki ardışık terimlerden ilk ortaya çıkan herhangi ikisinden dizinin μ artış miktarı elde edilirse, mod(n)'e göre ilk teriminden itibaren sırasıyla eklenerek sayı dizisi oluşturabilir.

Sayı dizilerini oluşturabilmek için diğer bir yöntem de n kutu için 1'den başlayıp 1'den sonra k. kutuya 2, 2'den sonra k. kutuya 3, 3'ten sonra k. kutuya 4, …, n şeklindedir.

Burada sayı dizisini düzgün yıldız çokgeni çizmeden elde edebilmek mümkün olmaktadır.

Örnek: {18/5} düzgün yıldız çokgeni için Tablo 3'te oluşan dizide mod(18) için artış miktarı μ=11 olur.

Tablo 3. *{18/5} düzgün yıldız çokgeninde sayı dizisi oluşumu.*

{18/5}	1	k-1=4				2	k-1=4				3	k-1=4				4=δ +1	λ -1=2	
		12	5	16	9		13	6	17	10		14	7	18	11		15	8
Sıra No:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Oluşan, 1, 12, 5, 16, 9, 2, 13, 6, 17, 10, 3, 14, 7, 18, 11, 4, 15, 8, 1 dizisinde mod(18)'e göre artış miktarı μ =11 olur. Bu yöntemle {18/5} düzgün yıldız çokgeni çizilmeden 18 terimli sayı dizisi elde edilebilir.

IV. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, pozitif tam sayılar kümesinde çalışılmış olan düzgün yıldız çokgenler ilk kez rasyonel sayılarda tanımlanmış ve analiz edilmiştir. Düzgün yıldız çokgenler Schläfli sembolü ile ifade edilirken kullanılan iki değişken için tanım aralığı rasyonel sayılar kümesine yükseltilmiştir. En sade formlarının eşit bir açıyla üst üste gelmesiyle oluşan düzgün yıldız çokgenler için bu açıyı veren bağıntı elde edilmiş ve görseller kullanılarak sözsüz ispat tekniği ile ispatlanmıştır. Düzgün yıldız çokgenler için oluşum çizgilerinin ya da köşe noktaları izinde genel sayı dizileri oluşturulmuştur. Düzgün yıldız çokgen şekli çizmeden sayı dizilerinin elde edilebileceği metotlar ortaya çıkartılmıştır.

V. KAYNAKLAR

[1] R. R. Baumback, "Star-Polygons." *Mathematics and Computer Education,* vol. 18, no. 1, pp. 111-18, 1984.

[2] D. Danner, "Learning with LOGO: Learning about Star Polygons with LOGO" *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* vol. 3, no. 4, pp. 49-53, 1984.

[3] T. Bradwardine, *Geometria speculativa*, Stuttgart, Germany: Steiner-Verl. Wiesbaden, 1989, pp. 5–10.

[4] J. Kepler, *Harmonices Mundi*, Vol. 1, Gottfried Tampach, 1619; English transl., The Harmony of the World, USA: American Philosophical Society, 1997, pp. 6-35.

[5] H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry, Star polygons,* 2nd ed., New York, USA: Wiley, 1969, pp.36-38.

[6] H.S.M. Coxeter, Regular Complex Polytopes, London, England: Cambridge University Press, 1974, pp. 3-8.

[7] R.S. Wilson, (2001). *Regular Star Polygons,* [Online]. Available: http://web.sonoma.edu/users/w/wilsonst/papers/stars/default.html.

[8] B. Grunbaum, B. and G.C. Shephard, "Tilings by Regular Polygons", *Mathematics Magazine*, vol. 50, pp. 227–247 and vol. 51, pp. 205–206, 1977.

[9] S. Mülayim, *Anadolu Türk Mimarisinde Geometrik Süslemeler*, Ankara, Türkiye: Kültür Bakanlığı Yayınları, 1982, ss. 50-59.

[10] A. Khamjane and R. Benslimane, "A computerized method for generating Islamic star patterns", *Computer-Aided Design*, vol. 97, pp. 15-26, 2018.

[11] M. Arslan and Y. Tuncel, "Battalgazi Ulu Camii ve Geometrik Analizler", *Yeditepe Üniversitesi Tarih Bölümü Araştırma Dergisi*, vol. 2, no. 5, pp. 104-123, Jan. 2019.

[12] M. Arslan, "Düzgün yıldız çokgenlerde çizgiler ve koordinatlar", *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, vol. 11, no. 2, pp. 522-529, 2021.