

GAZİ

EĞİTİM BİLİMLERİ DERGİSİ

GAZİ

JOURNAL OF EDUCATION SCIENCES

Matematik Öğrenme Güçlüğüne Sahip Öğrencilerin Kesir Kavramına İlişkin Kavrayışlarının İncelenmesi

Cansu BAKIRCI SAYMAZ^a, Ziya ARGÜN^b

Yükleme: 25.04.2022; Kabul: 10.09.2022; Yayınlanma: 30.11.2022

DOI: 10.30855/gjes.2022.08.03.001

ÖZET

Anahtar Kelimeler:
Matematik Öğrenme
Güçlüğü,
Kesirler
Öğrenci Kavrayışı

Keywords:
Mathematics Learning
Disability,
Fractions,
Students' understanding

^a Gazi Üniversitesi,
Gazi Eğitim Fakültesi,
Ankara, Türkiye
Orcid: 0000-0003-3627-7434
cansubkrc@gmail.com
Sorumlu Yazar

^b Gazi Üniversitesi,
Gazi Eğitim Fakültesi,
Ankara, Türkiye
Orcid: 0000-0001-8101-7215
ziya@gazi.edu.tr

Bu çalışmanın amacı, matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramlara ait düşüncelerini, kavrayışlarını ve anlayışlarını derinlemesine incelemektir. Araştırma nitel desene sahip bir durum çalışmasıdır. Çalışmanın katılımcıları, 5., 6. ve 7. sınıflarda öğrenim gören matematik öğrenme güçlüğüne sahip amaçlı örneklem ile seçilmiş yedi öğrencidir. Çalışmanın verileri araştırmacı tarafından hazırlanan kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramlar ile ilgili 48 sorunun yer aldığı yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yoluyla toplanmış ve bu veriler betimsel analiz yöntemiyle analiz edilmiştir. Bu analiz sonucu elde edilen bulgulara göre, öğrencilerin, eşit paylaşımın (bir bütün için) bütünü eş parçaya bölünüp parçaların paylaşımı anlamına geldiğinin farkında oldukları, bütünü parçalama ve kontrol için parçayı tekrarlama eylemlerini yapabildikleri, modeller ile temsil eden kesirleri sözel olarak birim kesirle ifade edebildikleri, ekleme yapıldığında basit kesir ile ifade edilen parçalar koleksiyonunu bütün ile karşılaştırabildikleri ve kesirleri sembolik olarak doğru yazdıkları tespit edilmiştir. Bununla birlikte; birim, birimleştirme gibi ölçme kavramlarındaki eksikliklerinin kesrin ölçme anlamının oluşturulması için engel teşkil ettiği, belirli sayıda verilen nesnelere verilen sayıda kişiye/nesneye eş pay düşecek şekilde ayırmada zorluk yaşadıkları, bütüne ait parçalar koleksiyonu verildiğinde eş parça olup olmadıklarına karar verirken parçaların göz önüne alınan niteliğinin miktarlarının eşit olmasından ziyade parçaların fiziki görünüşüne göre karar verdikleri, pay ve paydanın anlamı ile ilgili anlayışlarının sınırlı olduğu, birden büyük sayıları temsil eden kesirleri sözel olarak ifade etmede ve model oluşturmada zorluk yaşadıkları, kesrin sadece parça-bütün anlamına odaklandıkları, kesirlerin denkliği kavramında, kesrin temsil ettiği miktarları karşılaştırmada ve sıralamada zorluk yaşadıkları belirlenmiştir.

Examination of Students with Math Learning Difficulties' Understanding Related to the Concept of Fraction

ABSTRACT

This study aims to deeply analyze the thinking, conception, and understanding of the preliminary concepts involved in the formation fraction concept of students with mathematics learning difficulties. The research was designed with a case study, one of the qualitative research methods, and the participants in the study participants consisted of seven students with mathematics learning difficulties. Participants studying in the 5th, 6th, and 7th grades were selected by purposive sampling. The Data was collected through semi-structured clinical interviews with 48 questions about the preliminary concepts involved in the formation fraction concept. Questions were prepared by the researcher and analyzed by the descriptive analysis method. As a result of the analysis, students were found to be aware equal sharing (for a total) means dividing the sum into equal parts and sharing the parts. They can also split a total and repeat the unite part for control, verbally express the fraction represented by the model as a unit fraction, and compare a collection of parts expressed by a simple fraction with the total when adding. Results indicated that participants could compare and correctly write fractions symbolically. In addition, the deficiencies in measurement concepts such as unit and unitization constitute an obstacle to forming the measurement meaning of fractions for them. They also have difficulty in separating a certain number of given objects in a way that equals a given number of people/things, deciding whether the given collection of parts is equal or no, and determining according to the physical appearance of the parts rather than the equivalent amount of the received quantity. Their understanding of the meaning of the numerator and denominator is also limited. Further, they have difficulty verbally expressing the fractions and creating a model of the fractions that represent numbers greater than one, focusing only on the part-sum meaning of the fraction and acquiring the concept of equivalence of fractions in comparing and ordering the quantities represented by the fraction.

GİRİŞ

Amerika Birleşik Devleti'nde ortaöğretimde genel kanun olarak bilinen "Her Çocuk Geride Kalmasın Yasası"nda (*No Child Left Behind Act*) (NCLB) matematikten, "öğrenme gücüne sahip öğrenciler de dahil olmak üzere, tüm öğrencilerin müfredatça belirlenen yeterliliğe ulaşması gereken bir alan" şeklinde bahsedilmiştir (NCLB, 2001 (Sec. 1001 ve Sec. 1005)). Ülkemizde de gerek Türk Milli Eğitim Sistemi'nin genel amaçlarında, gerekse Türk Milli Eğitim Sistemi'nin temel aldığı ilkeler olan "Genellik ve Eşitlik" prensibinde tüm öğrencilerin arzu edilen seviyede öğrenmeye ve bunu mümkün kılacak bir öğretime dahil olmaları gerektiği vurgulanmıştır (Millî Eğitim Temel Kanunu [MEB], 1973, md. 23/1-2). Sürdürülen genel eğitimden tüm bireylerin eğitime dahil olan değişkenler sebebiyle aynı yollarla ve aynı verimlilikte yararlanabilmesi mümkün olmadığından, bazı bireyler için farklı yöntemler ve uygulamalar seçilmelidir. Bunlardan bazıları da matematik öğrenme gücüne sahip olan bireylerdir. Milli Eğitim Bakanlığı tarafından öğrenme gücüne sahip öğrencilere yönelik hazırlanan Destek Eğitim Programı'nın matematik modülünde en temel matematik becerilerine ilişkin kazanımlar yer almaktadır (MEB, 2021a). Çeşitli uzmanlık alanlarındaki ölçmelerde kullanılmasıyla birlikte, cebir, geometri gibi alanlarda temel olması sebebi ile bu kazanımların arasında kesirler alt öğrenme alanına ait kazanımlar da yer almaktadır. Matematik eğitiminde yapılan araştırmalar, birbiriyle ilişkili bir dizi alt yapıdan oluşan çok yönlü doğası nedeniyle kesirlerin öğrenilmesinin genel olarak tüm öğrenciler için, özelde de matematik öğrenme gücüne sahip öğrenciler için zor olduğunu ortaya koymaktadır (Namkung ve Fuchs, 2019; Namkung vd., 2018; National Center for Education Statistics, 2017; Torbeyns vd., 2015). Bu zorluklar genel olarak tam sayı stratejilerinin aşırı genelleştirilmesini (örneğin, pay ve paydalar arasında toplama) ve kavramsal anlamadaki hataları (örneğin sıralama), kesir temsilleri arasında geçiş yapmadaki güçlükleri (sözel veya sembolik temsiller ile alan-küme-sayı doğrusu vb. modeli temsilleri arasında geçiş yapma) içermektedir (Bottge vd., 2014; Hwang, 2016; Mazzocco vd., 2013). Matematik öğrenme gücüne sahip öğrencilerin temel aritmetik kombinasyonlara verilen cevapları hatırlamada, çarpım tablosunu ezberlemede, temel hesaplama becerilerinde zorluklar yaşamaları (Bryant vd., 2008; Learning Disabilities Association, 2005; Newman, 1998) ve kesirlerle karşılaşıncaya kadarki sayılarla ilgili alt yapılarının tam sayıların özellikleri ve tamsayılarla işlemler ile sınırlı olması, yeni bir sayı türü olan rasyonel sayıların gösterimini üstlenen kesirlerle karşılaştıklarında kesirler ile ilgili bahsedilen güçlükleri yaşamalarına neden olmaktadır.

Matematik öğrenme gücüne ile ilgili literatür incelendiğinde, Nelson ve diğerlerinin (2022) gerçekleştirdiği matematik öğrenme gücüne sahip öğrencilere yönelik 2000-2020 yılları arasında yapılan 245 araştırmanın ele alındığı meta-sentez çalışmasının sonuçlarına göre, çoğunlukla öğrencilerin dört işlem becerilerini inceleyen çalışmaların yoğunlukta olduğu, cebir, kesirler gibi matematiğin diğer alanları ile ilgili çalışmaların ihtiyaca cevap verecek kadar çok olmadığı ve dolayısıyla bu alanda yapılan çalışmaların yetersiz olduğu görülmüştür. Kesirler alanına yönelik son 5 yılda yapılan deneysel çalışmalarda ise öğrenme gücüne sahip bireylere kesir öğretimine yönelik davranışçı kuram çerçevesinde yöntem ve stratejileri, somut-yarı soyut-soyut öğretim stratejisini, teknoloji tabanlı öğretim stratejilerini ve son yıllarda artan sayıları ile bilişsel stratejileri ve öz-düzenlemeli öğrenme uygulamalarını içeren müdahale çalışmalarına yer verilmiştir (örn. Bouck vd., 2018; Barbieri vd., 2020; Ennis ve Losinski, 2019; Fuchs vd., 2020; Hughes, 2019; Losinski vd., 2021; Hwang vd., 2019; Peltier vd., 2020; Satsangi ve Raines, 2022; Sharp ve Shih Dennis, 2017; Shin ve Bryant, 2017; Wang vd., 2019). Kesirleri öğretmede etkili öğretim yöntemlerine ve stratejilere yönelik temel bir ilk adım olarak öğrencilerin düşünme biçimlerine odaklanmak gereklidir (Widodo ve Ikhwanudin, 2019). Bununla birlikte, hem öğrenme gücünün karmaşıklığı hem de bu gücünün bireyin öğrenme kapasiteleri üzerindeki bilişsel etkilerin belirsizliği, öğrencilerin kesirlere yönelik sahip oldukları anlayışları ortaya çıkarmaya yönelik bir ihtiyacı vurgulamaktadır (Hunt vd., 2019). Mevcut literatür incelendiğinde, öğrenme gücüne sahip öğrencilerin kesirlere yönelik düşüncelerini, kavrayışlarını, anlayışlarını inceleyen çalışmalardan öğrencilerin kesirleri temsil eden modelleri oluştururken, kesirlerde karşılaştırma yaparken ve kesirlerde dört işlem yaparkenki düşüncelerini, kavrayışlarını, anlayışlarını inceleyen çalışmaların (Hunt vd., 2019; Ikhwanudin ve Suryadi, 2018; Ikhwanudin ve Wahyudin, 2019; Lewis vd., 2021; Widodo ve Ikhwanudin, 2019) kesirlerin oluşumunda yer alan temel kavramlara ilişkin düşünceleri, kavrayışları, anlayışları ortaya koyma ihtiyacını karşılamada yetersiz olduğu söylenebilir. Kesirlerde öncelikle, kesrin ölçme anlamı, eşit paylaşım, kesir dili, kesir notasyonu, kesrin temsil ettiği büyüklük gibi temel kavramlara ait düşüncelerin, kavrayışların, anlayışların incelenmesinin, öğrencilerin, sıralama, karşılaştırma ve işlem yapma gibi daha karmaşık kesir kavramlarına ilişkin geliştirdikleri veya geliştirebilecekleri düşünce, anlayış ve kavrayışlarını anlamamıza veya öngörmemize yardımcı olabileceği düşünülmektedir. Bu bağlamda, öğrenme gücüne sahip öğrencilerin kesirlerin oluşumunda yer alan öncül kavramlara yönelik düşüncelerinin, kavrayışlarının ve anlayışlarının incelenmesinin bu alanda yapılan

çalışmalara bir nebze katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Ülkemizdeki ilkokul, ortaokul ve ortaöğretim kurumlarında öğrenim gören matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrenciler kaynaştırma/bütünleştirme uygulamaları kapsamında genel eğitim okullarında eğitimlerine devam etmekle birlikte, okullar bünyesinde kurulan Bireyselleştirilmiş Eğitim Planı (BEP) Geliştirme Biriminin kararı ile haftalık toplam ders saatinin %40'ına kadar destek eğitim odalarında eğitim alabilmektedirler (MEB, 2021b). Öğrencilerin özellikleri ve gereksinimleri göz önüne alınarak hazırlanan Bireysel Eğitim Programları (BEP) çerçevesinde bu öğrencilere matematik dersleri verilmektedir. Öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilere yönelik hazırlanan Bireysel Eğitim Programları ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, BEP'in hazırlanmasında, amaç yazımında, ekip üyelerinin işbirliği içinde hareket etmelerinde, ailelerle birlikte çalışmada, destek hizmetleri ile öğretim ve öğretimsel uyarlamaların planlaması ve uygulamasında, ilgili kaynaklara ve materyale ulaşmada, seçilen hedef davranışlarda ulaşılan noktayı belirlemede, amaçların değerlendirilmesinde ve öğrencinin sınıfa kabulünde sorun yaşadıkları, BEP'in uygulanmasında ise, öğretmenlerin eğitim eksikliği, araç-gereç eksikliği, fiziki alt yapı eksikliği, destek personelinin yetersizliği, yetersiz danışmanlık hizmetleri, mevzuattaki eksiklikler, öğretmen direnci ve veli duyarsızlığı gibi etmenlerin olduğu saptanmıştır (Çıkılı vd., 2020; Söğüt ve Deniz, 2018; Şahin ve Gürler, 2018; Özan ve Sarıca, 2021; Toprak, 2018; Yazıcıoğlu, 2019). Bu şekilde hazırlanan ve uygulanan BEP'lerin matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin matematik eğitimine dair gereksinimleri karşılama ve bireyin gelişiminde yetersiz kalacağı aşikârdır. Bu ise öğretmenlerin matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerinin matematiksel gelişimini nasıl destekleyebileceği sorusunu beraberinde getirmektedir. Bu halde, öğrencilerin gereksinimlerini karşılayabilecek öğretimin planlanmasında ve uygulanmasında öğretmenlere yardımcı olmak için atılacak öncelikli adımlardan biri, matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin mevcut düşünme, kavrayış ve anlayışlarının ortaya çıkarılmasıdır. Bu nedenle bu çalışmada; matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin kesir kavramına ilişkin düşüncelerinin, kavrayışlarının ve anlayışlarının derinlemesine incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu bağlamda bu araştırmanın problemi "Matematik öğrenme güçlüğüne sahip ortaokul öğrencilerinin kesir kavramına ilişkin düşünceleri, kavrayışları ve anlayışları nasıldır?" şeklinde ifade edilmiştir.

Kesir Kavramı

Kesirler; çeşitli uzmanlık alanlarındaki ölçmelerde kullanılmasıyla birlikte cebir ve birçok ileri matematik çalışmalarında önem arz ettiğinden, öğrenciler için kritik öneme sahip temel bir alt öğrenme alanıdır (Van de Walle vd., 2009). Kesir kavramı, ilköğretim matematik programında doğal sayıların gösterilmesinden hemen sonra incelenmektedir. Bunun önemli bir nedeni, günlük hayatta kesirlerin yaygın kullanımınıdır. Öğrenciler kavramları önceki bilgileri üzerine inşa ettiğinden, öğrenciler kesirlerin dahil olduğu durumlarla karşılaştığında problemleri çözmek için doğal sayıları kullanırlar. Öğrenciler kesir kavramının yapılandırılmasında hazırbulunuşluğu oluşturan temel kavramları tam geliştiremedikleri zaman bazen doğal sayılardan ve tam sayılardan edindikleri birtakım bilgileri kesirlere de yanlış olarak genelledebilmektedir (Stavy ve Tirosh, 2000) (ör, kesirlerde toplama işleminde paydaların toplanması, birim kesirleri karşılaştırırken paydası büyük olan kesri büyük olarak düşünme). Bu durum, öğrencide var olan doğal sayılara ait bilgilerin kesirlerde kullanılmasını hem desteklemekte hem de engellemektedir. Bunun nedeni olarak, kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramların (örn. bütünün eşit parçalara ayrılması, birimin tespiti gibi) öğrencilere kavratılmadan sayı ve sembolik gösterim ile işlemlere erken geçiş olarak söylenebilir (Wijaya, 2017). Burada öncül kavramdan kasıt kavramın öğrenilmesine zemin teşkil eden kavramlardır (Mumcu, 2018). Bu noktada kesirleri anlamak için kesirlerin matematiksel yapısında var olan bütün öncül kavramları anlamak gerekir. Bu bağlamda bu çalışmada, öğrencilerin kesir kavramına ilişkin düşünceleri, kavrayışları ve anlayışları kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramlar çerçevesinde incelenmiştir. Literatür incelendiğinde, Van de Walle ve diğerleri (2009), kesir kavramının kavramsal gelişimi için kesrin anlamları, kesrin model ile temsili, eşit paylaşım, kesir dili, kesrin temsil ettiği büyüklükler, kesirsel parçaları tekrarlama, kesir notasyonu, 1'den büyük sayıları temsil eden kesirler, kesirleri karşılaştırma, kesirleri sıralama ve kesirlerin denkliği kavramlarını ele almıştır. Jordan ve diğerleri (2013) öncül kesir kavramlarını kesrin parça bütün anlamı, kesir notasyonu ve kesrin temsil ettiği büyüklük olarak belirtmiştir. Lamon (2007) ise kesir kavramının bileşenleri olarak ölçüm, birim, birimleştirme, paylaşım, karşılaştırma, kesrin bölme, işlemci, parça-bütün ve oran anlamları, kesirlerin sayıları temsil etmesi ve kesirlerin denkliği kavramlarını ele almıştır. Benzer olarak Barnett-Clarke ve diğerleri (2010) kesrin öncül kavramları olarak birim, birimleştirme, parçalara ayırma, tekrarlama ve kesrin denkliği kavramlarını işaret etmiştir. Simon ve diğerleri (2018) ise öğrencilerin kesirleri yapılandırırken izledikleri tahmini öğrenme yol haritalarında, sırasıyla kesrin

ölçüm anlamı, birim, bileşik kesir, kesirleri karşılaştırma, bileşik kesir- tam sayılı kesir arasındaki ilişki, bir küme olarak kesirler (bir çokluğun belirli kesir kadarı), birimi tekrar birimleştirme, kesirlerin denkliği ve toplama-çıkarma-çarpma olmak üzere kesirlerde işlemler kavramlarını yörüngeye dahil etmiştir. Bu araştırmada öncül kesir kavramları bahsedilen literatür göz önüne alınarak belirlenmiştir. Tablo 1’de özetlenen bu öncül kavramlar: ölçme ve birim, eşit paylaşım, kesir dili, bir bütünün eş parçalarını sayma, kesir notasyonu, 1’den büyük sayıları temsil eden kesirler, kesrin kullanımları, kesirlerin temsil ettiği miktarlar, kesirlerin karşılaştırılması ve kesirlerin denkliğidir.

Tablo 1

Kesir Kavramının Oluşumunda Yer Alan Öncül Kavramlar ve Öncül Kavramların Kazanımına Yönelik Hedef Davranışlar ve Açıklamalar

Kesir Kavramının Oluşumunda Yer Alan Öncül Kavramlar	Kavrama Yönelik Fiziksel ve Zihinsel Eylemler	Açıklama
Ölçme ve Birim	Bir nesnenin ölçülebilen bir niteliği ile aynı niteliğe sahip başka bir nesneyi (birim olarak göz önüne alınan) karşılaştırma ve ölçülen nesnenin niteliğinin miktarını birim olarak kullanılan nesnenin niteliğinin miktarı cinsinden belirleme	Ölçme, bir nesnenin ölçülebilen bir niteliği ile aynı niteliğe sahip bir başka nesnenin (birim nesnenin) bu niteliğini karşılaştırma eylemidir. (Lehrer, 2003; Güven Akdeniz ve Argün, 2019). Bu eylemde ölçüm; ölçülen nesnenin ölçülmekte olan niteliğinin miktarı, birim olarak kullanılan nesnenin aynı niteliğinin miktarı cinsinden ifade edilir ve doğal olarak sayılar kullanılır (Clements ve Stephan, 2004). Bu karşılaştırmada sonuç her zaman tam sayılarla ifade edilemez. Bu durumlarda kesirlerle temsil edilen rasyonel sayılara ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısıyla bu karşılaştırma eylemlerinde sık sık kesirlerin kullanımıyla karşı karşıya gelinmektedir.
Eşit Paylaşım	Verilen bir veya birden fazla bütünü farklı yollarla eş parçalara ayırma	Bir bütün için eşit paylaşım, bütünün eş parçalara bölünüp parçaların paylaşımı anlamına gelir (Empson, 1999). Eşit paylaşım kavramını anlamlandırmak, bütünü temsil eden bir ve ya belirli bir sayıdaki nesnelere verilen sayıda kişiye/ nesneye eş pay düşecek şekilde ayırmayı ve eş parçaları oluştururken parçaların şeklinden (fiziki görünüm) ziyade parçaların göz önüne alınan niteliğinin miktarlarının eşit olması gerektiğini fark etmeyi gerektirir. Eşit paylaşım sonucunda öğrenciler birim kesirler üretirler. Üretilen bu birim kesirleri kesir dili ile temsil etmeden önce, öğrencilerin eşit paylaşım kavramını anlamlandırmaları gerekir (Van de Walle vd., 2009).
Kesir Dili	Verilen birim kesirleri, sözel olarak ifade etme ve model ile gösterme	Eşit paylaşım ile üretilen birim kesirler kesir dili ile temsil edilir. Bir bütünün kendisi bütün (tam), bütünü oluşturan parçalar ise yarım, çeyrek, ikide bir, üçte bir, dörtte bir, beşte bir vb. şeklinde sözel olarak ifade edilir. Sözel olarak ifade edilen bir kesrin alan, uzunluk niteliklerine sahip modellerle ve küme modelleri ile temsil edilmesi beklenir.

Tablo 1

Devam

Bütünün Parçalarını Sayma	Eş	Ekleme kullanarak sayıda bütününü karşılaştırma	eylemini verilen parçayı	Bütünü oluşturan parçalardan birini ikide bir, üçte bir, dörtte bir, beşte bir gibi birim kesir şeklinde sözel olarak ifade edilmesinden sonra bütünün diğer eş parçalarını ekleme eylemi ile sayarak elde edilen parçalar koleksiyonu bütün ile karşılaştırılır. Örneğin, dörtte üç gibi bir kesir dörtte bir denilen üç parçanın sayılması olarak görülür (Post vd., 1985; Siebert ve Gaskin, 2006; Tzur, 1999). Bir bütünün eş parçalarından oluşan parçalar koleksiyonu verildiğinde bu koleksiyon ile bütün arasındaki ilişkinin istendiği durumlar, koleksiyon birden az ise basit kesir, bir ise bütün veya birden daha fazla bütün oluşturacak şekilde ise bileşik kesir kavramları ile ilgili ön bilgi oluşturur.
Kesir Notasyonu		Sözel veya verilen bir sembolik olarak ifade etme, sembolik olarak verilen kesre karşılık model oluşturma	modelle kesri sembolik olarak verilen kesre karşılık model oluşturma	Kesir dili kullanılarak parçalar koleksiyonu ile bütün arasındaki ilişkiler ortaya çıkarıldıktan sonra bu ilişkiler "sembolik kesir notasyonu" ile ifade edilir. Bu sembolik gösterimde yer alan pay ve paydanın ne anlama geldiğinin sözel olarak açıklanması kesirlerde karşılaştırma ve işlem yapılabilmesi için önem taşır.
1'den Sayılar Eden Kesirler (Bileşik Kesir/ Tam Kısmı Kesir)	Büyük Temsil	1'den büyük sayıları temsil eden kesirleri tanıma, modelle gösterme, birimini belirleme ve sayılı kesri halinde ifade etme	sayıları kesirleri tanıma, modelle gösterme ve tam kesri bileşik kesir halinde ifade etme	Bir bütünün eş parçalarından oluşan parçalar koleksiyonu verildiğinde, koleksiyon bir bütünden fazla ise bu koleksiyon ile bütün arasındaki ilişki birden büyük sayıları temsil eden kesirler ile ortaya konulur. Birden büyük sayıları temsil eden kesirler bileşik kesir ve tam sayılı kesir kavramı ile ifade edilir.
Kesrin Kullanımları: Parça-bütün, bölüm, oran, ölçü		Kesirlerin bütün, bölüm, ve göstermede kullanıldığını fark etme ve bağlam içerisinde kullanma	parça-bütün, bölüm, oran ölçüleri fark etme ve bağlam içerisinde kullanma	Ders kitaplarında yer alan örnekler incelendiğinde kesrin parça-bütün anlamının diğer anlamlarına göre daha yaygın olarak kullanıldığı görülmektedir. Öğrencilerin kesir kavramını tam olarak anlamaları kesrin diğer anlamlarına vurgu ile sağlanabilir (Clarke vd., 2008; Lamon, 2007; Siebert ve Gaskin, 2006). Kesirlerin temsil ettiği anlamlar parça-bütün, ölçme, bölme ve oran olarak sınıflandırılabilir (Lamon, 2007).
Kesirlerin Temsil Ettikleri Miktarlar, Kesirlerin Karşılaştırılması ve Kesirlerin Denkliği		Öğrencilerde sayı hissi geliştirmede kesir gösteriminin kullanımı, belirli bir kesrin temsil ettiği miktarın azlığı/çokluğu hakkında bilgiye sahip olma	sayı geliştirmede kesir gösteriminin kullanımı, belirli bir kesrin temsil ettiği miktarın azlığı/çokluğu hakkında bilgiye sahip olma	Kesirler tek başına bir miktar belirtmez. Kesirler, nesnelere niteliklerinin miktarlarını temsil eden gösterimlerdir. Aynı sembolik gösterime sahip kesirler, referans olarak alınan bütüne göre değişik miktarları temsil edebilir. Kesir gösteriminin kullanımı sayı hissini geliştirmesine yardımcı olur (Van de Walle vd., 2009).

YÖNTEM

Yukarıda da ifade edildiği gibi bu araştırmanın amacı matematik öğrenme güçlüğüne sahip ilköğretim öğrencilerinin kesir kavramına ilişkin düşüncelerini, kavrayışlarını ve anlayışlarını derinlemesine incelemektir. Bu amaca ulaşmada araştırmacı tarafından bir veya birkaç durumun (öğrenci düşünceleri, kavrayışları, anlayışları) çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları (görüşme, doküman, rapor) ile bir müdahale olmadan derinlemesine incelendiği, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı ve zengin bir şekilde betimlenmeye çalışıldığı bir desen olması nedeniyle durum çalışması araştırma deseni olarak belirlenmiştir (Chmiliar, 2010; Creswell, 2007; Hancock ve Algozzine, 2006; Yin, 1984).

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları, 5., 6. 7. sınıflarda öğrenim gören matematik öğrenme güçlüğüne sahip yedi öğrenciden oluşmaktadır. Bu öğrencilerden ikisi 5. sınıfa, biri 6. sınıfa, diğer üçü ise 7. sınıfa devam etmektedir. Amaçlı örneklem seçimi zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına olanak verdiğinden (Büyüköztürk vd., 2009) araştırmanın katılımcıları, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir (Patton, 2005). Çalışmaya katılmak için öğrencilerin önkoşul becerilere sahip olması gerekmektedir. Önkoşul beceriler belirlenirken Rehberlik Araştırma Merkezi'nin (RAM) raporları baz alınmıştır. Katılımcıların belirlenmesinde dikkate alınan ölçütler;

- a. Rehberlik ve Araştırma Merkezi tarafından öğrenme güçlüğüne sahip olduğu onaylanmış olmak,
- b. Duyma, görme ve ortopedik gibi alanlarda eşlik eden başka bir soruna ya da yetersizliğe sahip olmamak,
- c. Öğretimsel seviyede okuma ve yönergeleri takip etme becerisine sahip olmak şeklindedir.

Analiz ve Bulgularda, öğrencilerden yapılan doğrudan alıntılar her öğrenciye bir takma isim verilerek yapılmıştır.

Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış klinik görüşmeler yoluyla toplanmıştır. Öğrencilerin matematiksel eylem sırasında ne söylediği ve ne yaptığının betimlenmesi, öğrencilerin matematiğe ait zihinsel yapıları hakkında bilgi vermesi ve bu bilgileri

kullanarak öğrencilerin matematiksel düşünme modellerini oluşturmayı sağlaması açısından klinik görüşmeler yapılmıştır (Clement, 2000; Steffe ve Thompson, 2000). Klinik görüşmeler, araştırmacı tarafından öğrencilerin belirli bir matematiksel bağlam üzerinde yeterince düşünüp yanıtlar verecekleri problem durumlarının hazırlandığı ve bu problem durumlarının çözümü kapsamında araştırmacı ile öğrenci arasındaki konuşmaları içeren bir görüşme türü olarak tanımlanmaktadır (Ginsburg, 1997). Böylece araştırmacı, öğrencilerin var olan bilgilerine, o anki akıl yürütmelerine, matematiksel düşüncelerine, düşünme ve kavrayışlarındaki farklılıklara, bir kavrama dair ön bilgilerine, kullandıkları kavramlara, kavramlar üzerindeki eylemlerine, stratejilerine ve sezgisel fikirlerine dair çıkarımlara ulaşabilmektedir (Clements ve Battista, 2000; Steffe ve Thompson, 2000). Bu bağlamda, her bir öğrenme güçlüğüne sahip öğrenci ile “Klinik Görüşme Soruları” kullanılarak bireysel klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler 50-60 dakikalık 2 veya 3 seans olarak gerçekleşmiş ve kamera ve ses kaydına alınmıştır. Çalışmanın verilerini kamera kayıtları, öğrenci etkinlik kâğıtları ve öğrenciler tarafından etkinlik kâğıtları üzerine tutulan notlar oluşturmuştur.

Klinik Görüşme Sorularının oluşturulmasının ilk aşamasında, matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin eğitim ihtiyaçlarının değerlendirilmesi veya öğretme ve öğrenme etkinlikleri, öğrencilerin performansları ve öğretmenlerin yeterlikleri ile ilgili mevcut durumu analiz etmek için ön-uç analizi yapılarak uzman görüşleri alınmıştır. Bunun ardından mevcut ilköğretim matematik öğretim programı ve kavramsal çerçevede bahsedilen literatür göz önüne alınarak kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramlar ile ilgili 48 soru hazırlanmıştır. Hazırlanan sorular üç matematik alan eğitimcisi, bir Türkçe öğretmeni olmak üzere dört uzmana gösterilerek görüşleri alınmıştır. Uzman görüşleri çerçevesinde bazı soruların ifadeleri değiştirilmiş, bazı sorular çıkarılmış veya yeni sorular eklenmiş, böylelikle görüşme soruları nihai halini almıştır. Öğrencilerin kesirlerin oluşumunda yer alan öncül kavramlara ilişkin fiziksel ve zihinsel eylemlerinin gözlenebilmesini sağlayan durumlar oluşturulmuş ve tahta parçası, birim küp, ip, kürdan ve uzunluk niteliğine sahip diğer nesnelere, farklı kesirleri temsil eden kartondan yapılmış modeller, fotoğraflar, dairesel kesir takımı ve tahta kesir şeritleri gibi materyaller görüşme sırasınca hazır bulundurulmuştur (Şekil 1). Bu öncül kavramlardan biri olan ölçme ve birim öncül kavramına ait bir soru örneği aşağıdaki gibidir:

(Elindeki tahta parçasını göstererek) Sence bu tahta parçasının uzunluğunu ne ile ölçebiliriz? (Öğrencinin üzerinde düşünmesi ve fikrini ifade etmesi için yeterli zaman verdikten sonra) (Birim küp, ip, kürdan gibi nesnelere öğrencinin önüne konularak)

Bunların hangileriyle bu tahta parçasının uzunluğunu ölçebilirsin? Neden ölçebiliriz/ölçemeyiz? (Ölçülebiliriz kararını verdiği uzunluk niteliğine sahip nesnelere, ölçüm sonucunun birim olarak tam sayı ile ifade edildiği birini vererek) Ölçüm yaparak sonucu paylaşıyor musun? O zaman bu tahta parçasının uzunluğu için ne diyeceksin? Birimin ne olmuş oldu? (Ölçüm sonucunun birim olarak tam sayı çıkmadığı durumlarda) Bu yaptığın ölçümün sonucunu nasıl ifade edersin?

Eşit paylaşım öncül kavramına ait bir soru örneği aşağıdaki gibidir:

Paylaşmak kelimesinden ne anlıyorsun? Evde veya okulda herhangi bir şeyi başka bir kimseyle paylaşıyor musun? Nasıl paylaşıyorsun? (Öğrenci eşit paylaşım kavramına odaklanmamışsa) Daha önce eşit paylaşımın ne olduğunu duydun mu? (Elindeki kare şeklindeki kâğıdı göstererek) Bu kâğıdı iki eşit parçaya ayırır mısın? Başka yolları var mı? Paylaşıyor musun?

Şekil 1

Görüşmelerde Hazır Bulundurulmuş Materyaller



Verilerin Analizi

Verilerin analizi, öğrencilerin kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramlara ilişkin kavrayışlarına dair önceden belirlenmiş bir çerçeveye bağlı olarak nitel verilerin işlenmesi, bulguların tanımlanması ve tanımlanan bulguların yorumlanması adımlarını içeren bir analiz yöntemi olan betimsel analiz ile yapılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Çalışmada da görüşmelere ait video kayıtlar izlenerek her bir öğrenciye ait görüşmenin çözümlemesi yapılmış, çalışmanın kavramsal yapısı olan kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramlar çerçevesinde öğrencilere ait fiziksel ve zihinsel eylemler kodlanarak kategorilere ulaşılmıştır. Ölçme ve Birim temasına ait örnek kodlama Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2

Ölçme ve Birim Temasına ait Kategori ve Kodlama Örneği

Temalar	Kategoriler	Kodlar
Ölçme ve Birim	Ölçmede birim seçimi	<ul style="list-style-type: none"> Birim nesnenin niteliği ile ölçülen nesnelerin niteliği bakımından birbirleriyle uyumlu olduklarının farkında olma Eş birim-standart birim-standart olmayan birim kavramlarında eksiklik Farklı birimler kullanarak ölçülen aynı nesneye ait ölçüm sonuçlarının farklı olmasının, birim olarak göz önüne alınan nesnelerin niteliklerinin miktarının farklı olmasından kaynaklandığının farkında olma Birimi santimetre ve metreye aşırı özelleme
	Birimi yineleme	<ul style="list-style-type: none"> Birimi yinelerken araya parmak koyma Birimi yinelerken yinelemenin başlangıç ve bitiş noktasına dikkat etmeden yineleme yapma Birimi yinelerken birimin uzunluğunu sabit tutmama (karış)
	Birimi tekrar birimleştirme	<ul style="list-style-type: none"> Birimi tekrar birimleştirmede güçlük
	Ölçüm sonucunu sayı ile ifade etme	<ul style="list-style-type: none"> Ölçüm sonucunu tam sayı ile ifade etme Ölçüm sonucunun tam sayı ile ifade edilemediği durumlarda tam sayıya yuvarlama Ölçüm sonucunun tam sayı ile ifade edilemediği durumlarda yarım ve çeyrek kavramlarını bilinçsiz kullanma Ölçüm sonucunu ifade ederken birim kullanmama

Araştırmanın geçerliliği klinik görüşme sorularının dört uzmandan görüş alınarak ve klinik görüşmelerin detaylı sunulması ile sağlanmıştır. Klinik görüşmeler, araştırmacı ve öğrencinin birebir görüşme yapmasına uygun bir destek eğitim odasında, her bir öğrenci için bireysel olarak gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşme sorularının cevaplanmasında olabilecek bir etkilenmeyi önlemek için katılımcıların birbirini tanımaması ve iletişim içerisinde olmamaları sağlanmıştır. Bu çalışmada, katılımcıların önkoşul becerilere sahip olmasını gerektiren ölçüt örneklem ile belirlenmesi ve ön koşul becerilerin açıklanması, aynı zamanda klinik görüşmelerin içeriğinin detaylı sunulması ile transfer edilebilirliği, aynı zamanda çalışmanın benzer çalışmalara uyarlanabilirliği sağlanmıştır.

Veri analizinin güvenilirliği için bir matematik eğitimcisi uzmandan görüş alınmıştır. Araştırmacı ve uzman kodlamaları bağımsız olarak gerçekleştirmiş, ardından bir araya gelerek gerçekleştirdikleri kodlamaları ve gerekçelerini karşılıklı olarak sunup fikir birliğine varmışlardır. Bu sayede iç tutarlığın sağlanması amaçlanmıştır.

Etik Kurul İzin Belgesi

Bu araştırma Gazi Üniversitesi Ölçme Değerlendirme Etik Alt Çalışma Grubu'nun 04.02.2020 tarihinde aldığı 166903 sayılı karar ile etik yönden uygun bulunmuştur.

BULGULAR

Bu bölümde, elde edilen bulgular, matematik öğrenme gücüne sahip yedi öğrenci ile bireysel olarak gerçekleştirilen klinik görüşmeler yoluyla toplanan verilerin her bir görüşme için ayrı ayrı yapılan içerik analizi sonucunda elde edilmiştir. Klinik görüşmeler öğrencilerin kesir kavramına ilişkin zihinlerindeki yapıyı keşfetmek, var olan düşünme, anlayış ve kavrayışlarını belirlemeye yönelik gerçekleştirilmiştir. İlköğretim öğrencilerinin düşünceleri, kavrayışları ve anlayışlarına ait bulgular, kesir kavramının oluşumunda yer alan öncül kavramlar çerçevesinde verilecektir.

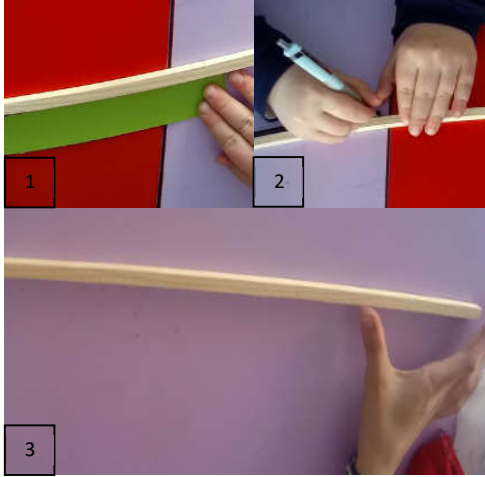
Ölçme ve Birim

Öğrencilerle yapılan görüşmelerde, öğrenciler, ölçmede kullanılan birim nesnenin niteliği ile ölçülen nesnelere niteliği bakımından birbirleriyle uyumlu olmaları kavrayışına sahip olsalar da öğrencilerin birim, eş birim, standart birim gibi kavramlarında eksiklik olduğu belirlenmiştir. Örneğin; Emre'nin "Sonuç üç... (Birimi kastederek) Üç ama şeyinin ne olduğunu bilmiyorum." ve "Bununki ne onu bilmiyorum.. Karış her halde.. Ne ki bu.." söylemlerinde birim kavramı eksikliği; Zehra'nın araştırmacının yönelttiği tahtanın uzunluğunu cetvel ile ölçerek ve ölçüm sonucu için 75 cm'dir dediğinde, kendisinin de elindeki cetvelle ölçüp aynı ölçüm sonucunu elde edemeyeceği sorulduğunda "Elde edemeyebilirim.. Çünkü büyük cetvel var küçük cetvel var." söylemi ile standart birim kavramı eksikliği açıkça ortaya koyulmaktadır. Görüşmelerde öğrencilerin ölçümde birimi yinelerken yinelemenin başlangıç ve bitiş noktasına dikkat etmeden yineleme yaptıkları ve birimi yinelerken her bir yineleme arasına parmak koydukları gözlemlenmiştir. Parmak koymayan öğrencilerin ise karışları ile ölçüm yaparken ölçümün miktarının tam sayı olmadığı durumlarda tam sayıya yuvarlamak için karışlarının uzunluğunu sabit tutmaya çalışmadıkları gözlemlenmiştir. Bu öğrencilere eş birim verilerek bir nesnenin ölçülebilen bir niteliğini ölçmesi istendiğinde birimi yinelerken bu sefer de yinelemenin başlangıç ve bitiş noktasına dikkat etmeden yineleyerek ölçüm sonucunu yine tam sayıya yuvarladıkları ve hangi eş birim kullanılırsa kullanılsın birim olarak sadece metre veya santimetre kullandıkları gözlemlenmiştir. Örneğin, Önder'den tahtanın uzunluğunu elindeki pipet ile ölçmesi istenmiştir. Önder'in pipeti yineleyerek ölçüm sonucunu "3 metre.." ile ifade etmesi ölçüm sonucunda birimin sadece santimetre/metre ile ifade edileceği anlayışına

sahip olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla öğrencilerin birimi standart birim olan santimetreye veya metreye aşırı özellediği söylenebilir.

Şekil 2

Sırasıyla Önder'in (1 ve 2) ve Meral'in (3) Verilen Tahta Çubuğun Uzunluğunu Karış ve Diğer Birim Görevi Gören Nesnelere Ölçme Eylemleri



Eş birim verilerek bir nesnenin niteliğini ölçmesi istenen öğrencilerden birimi doğru bir şekilde yineleyenler bu sefer de ölçüm fazlalığını yarıma veya çeyreğe yuvarlamışlardır. Örneğin, ölçüm yapılacak olan çubukla aynı nitelikte ama uzunluğu daha kısa bir çubuk verilerek ölçüm sonucunu ifade etmesi istenen Emre, ölçüm sonucunu "Bu bir buçuk birimdir hatta bir çeyrek birimdir.." ve "Bu bir birim, (kısa çubuğu yineleyerek) burası tam bu da işte buçuk.." söylemleriyle ifade etmiş, ölçüm sonucunu buçuk veya çeyrek ile nasıl ifade edebildiği sorulduğunda "Arttı çünkü.." ifadesiyle ölçüm fazlalığını yarıma veya çeyreğe yuvarlama eğilimini açıkça göstermiştir. Burada öğrencinin sadece hatırladığı veya öğrenme ortamında gördüğü kavramları anlamını bilmeden kullanarak ezbere dayalı akıl yürüttüğü söylenebilir. Birim olarak kullanılan tahta çubuğun aşan kısmının öğrencilerin tahmin ettiği gibi yarım birim olup olmadığını kontrol etmeleri için birimi tekrar eş parçalara ayırmayı (birimi tekrar birimleştirmeyi) kolaylaştıracak başka birimler öğrencilere temin edilse de öğrencilerin diğer birimler ile birimi tekrar birimleştirerek ölçüm sonucunu bulmaya çalışmadıkları gözlemlenmiştir.

Öğrenciler, farklı birimler kullanarak ölçtükleri aynı nesneye ait ölçüm sonucunun farklı olmasının nedeni olarak kullandıkları birimin farklı olduğu cevabını verebilmişlerdir. Dolayısıyla öğrencilerin ölçüm sonucu farklılığının birim olarak göz önüne alınan nesnelerin niteliklerinin miktarının farklı olmasından kaynaklandığının farkında oldukları söylenebilir.

Eşit Paylaşım

Öğrencilerle yapılan görüşmelerde, öğrencilerin, eşit paylaşımın (bir bütün için) bütünün eş parçaya bölünüp parçaların paylaşımı anlamına geldiğinin farkında olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum Meral'in "Böyle..her birini eşit bir şekilde bölmek, kesmek, ya da çizmek." söylemi, Emre'nin "Ortadan ikiye keserek veya bölerek.." söylemi, Nur'un "Kaç kişiysek o kadar eşit parçaya böleriz." söylemi, Buse'nin "Eşit olarak bölüşmek.." söylemi, Harun'un "Eşit şekilde.. Örneğin dört kişi var, dördünü de aynı boyda kesmek demek." söylemi ve Zehra'nın "O zaman 4 kişiyse 4'e bölmemiz gerekiyor." söyleminde açıkça görülmektedir.

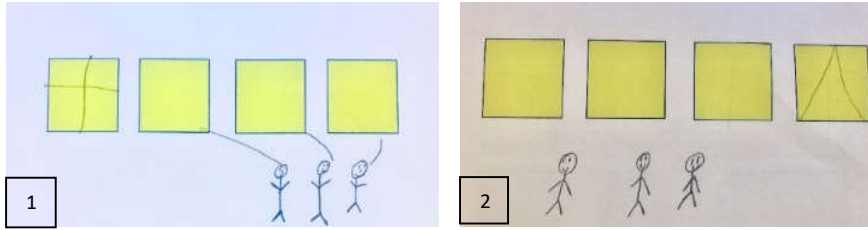
Öğrencilere ip verilerek iki ve dört eş parçaya ayırmaları istendiğinde ise üç öğrencinin ipin iki ucunu birleştirerek iki, daha sonra iki eş parçanın tekrar uçlarını birleştirerek dört eş parçaya ayırabildiği fakat diğerlerinin ipin yarısı veya dörtte biri olarak tahmin ettikleri bir noktadan ipi eş olmayan parçalara ayırdıkları gözlemlenmiştir. Dolayısıyla öğrenciler, günlük hayatlarında bir bütünü veya çokluğu paylaşırma eyleminde iki ya da dört eş parçaya ayırma bilgisine sahip olsalar da, daha önce bütünü temsil eden modelleri belli bir referans noktasına göre tahminde bulunarak iki veya dört eş parçaya ayırmaları, somut bir model verildiğinde de aynı akıl yürütme ile aynı eylemde bulunmalarına neden olmuş olabilir. Verilen uzunluk niteliğine sahip başka bir somut nesneyi iki ve katlarından farklı sayıda (örneğin; beş) eş parçaya ayırmaları istendiğinde öğrenciler, nesne üzerinde istenilen eş parçaya karşılık gelen miktarı göz kararıyla işaretledikleri ve parçayı istenilen eş parça sayısı kadar yineleyerek gösterdikleri miktarın doğru olup olmadığını kontrol ettikleri gözlemlenmiştir. Bu durumda öğrencilerin bütünü parçalama ve kontrol için parçayı tekrarlama eylemlerini yapabildiği söylenebilir.

Öğrencilerin, belirli bir sayıda verilen nesnelere verilen sayıda kişiye/nesneye eş pay düşecek şekilde ayırmada zorluk yaşadıkları görülmüştür. Dört tane kare şeklinde keki temsil eden modelin üç arkadaş arasında eşit bir şekilde paylaşılması istenen bir soruda, öğrencilerin keki temsil eden kare modelleri kişi sayısı yerine dört eş parçaya bölme eğiliminde oldukları gözlemlenmiştir (Şekil 3.1). Öğrencilerden biri keki temsil eden kare modelini üç parçaya bölmeye çalışsa da eş parça oluşturamadığı görülmüştür (Şekil 3.2). Dolayısıyla öğrencilerin, verilen nesnelere istenilen sayıda kişiye/nesneye paylaşırken, paylaştırılan nesne sayısı paylaşılacak nesne/kişi sayısından çok ise nesnelere nesne/kişilere eşit bir şekilde birer birer paylaştırdıktan sonra geri kalan nesnelere kişi sayısı kadar eş parçalara ayırıp paylaşırma ilişkilendirmesini yapamadıkları söylenebilir.

Bu ilişkilendirmeyi yapan bir öğrencinin ise kare modelini üç eş parçaya ayıramamasının nedeni olarak öğrencilerin genel olarak bütünü temsil eden modelleri 3, 5, 7 gibi tek sayıda eş parçaya ayırmada güçlük yaşamaları gösterilebilir.

Şekil 3

Sırasıyla Emre'nin ve Önder'in Keki Temsil Eden Kare Modelleri Üç Kişiye Eş Olarak Paylaştırma Eylemleri

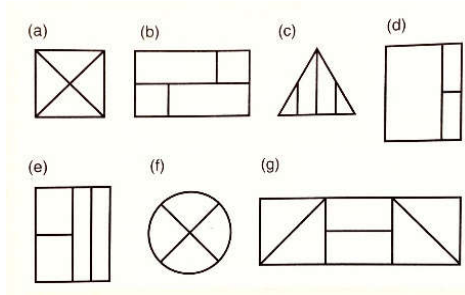


Kare modelleri dört parçaya bölen öğrencilere üç kişiye paylaştırdıktan sonra kalan parçayı ne yapacakları sorulduğunda Emre "Yok, yine de bir tane kalıyor..", Zehra "Eşit bir şekilde paylaşılamaz bence." ve Buse "Onu da dörde bölerim.. (Tekrar kalan parça için) Onu da dörde bölerim hep bir parça kalacak." söylemleriyle belirli bir sayıda verilen nesnelere verilen sayıda kişiye/nesneye eş pay düşecek şekilde ayıramayacaklarını ifade etmişlerdir. Paylaşılacak kişi sayısına göre verilen sayıdaki bütünü nasıl paylaşacağına dair ilişkiyi kuramamaları öğrencilerin böyle bir çıkarımda bulunmalarına neden olmuş olabilir.

Öğrencilere alan niteliğine sahip farklı bütünlere ait parçalar koleksiyonu gösterilerek bütünlere hangisinin eş parçalara ayrıldığını belirlemeleri istenmiştir. Öğrenciler Şekil 4'teki bütünlere ait parçalar koleksiyonlarından sadece (a) ve (f) bütünlüklerinin eş parçalara ayrıldığını belirtmişlerdir. (e) ve (g) bütünlüklerinin eş parçalara ayrılmadığını ifade eden öğrencilerin bütüne ait parçalar koleksiyonu verildiğinde eş parça olup olmadıklarına karar verirken parçaların göz önüne alınan niteliğinin miktarlarının eşit olmasından ziyade parçaların şekline (fiziki görünüm) göre karar verdikleri belirlenmiştir. Bu durumda öğrencilerin, eş parçaların şekillerinin de eş olması gerektiği algısına sahip olduklarından bir bütünün farklı şekillere sahip aynı miktardaki parçaların eş parça olmadıkları fikrini ileri sürmeleri olağandır. Bununla birlikte öğrencilerin alan, hacim gibi ölçme kavramlarındaki eksikliklerin aynı bütünü farklı stratejiler ile eş parçalara ayıramamalarına sebep olduğu söylenebilir.

Şekil 4

Alan Niteliğine Sahip Farklı Bütünlere Ait Parçalar Koleksiyonları



Kaynak: Van de Walle vd., 2009 : 294.

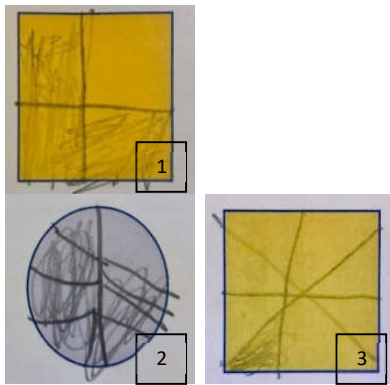
Kesir Dili

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde kesir kavramının onlarda çağrıştırdığı ilk şey sorulduğunda öğrencilerden Emre “Şöyle iki ve altı geliyor aklıma ($2/6$ kesrini sembolik olarak yazar..)” ve Önder “Şöyle bunlar aklıma geliyor ($\frac{13}{7}$ kesrini sembolik olarak yazar)” söylemleri ile kesrin sembolik gösterimini, Meral “Eşit şekilde bölmek...parçalara ayırmak, bölme işlemi.” söylemi ve Nur “Bir tane pastayı parçalara bölmek..” söylemi ile parçalara ayırma kavramını, Buse’nin “Bir şeyi bölerek paylaştırmak..” söylemi ve Harun’un “Bir şeyi paylaştırmak, bölmek” söylemi ile hem parçalara ayırma hem de eşit paylaşım kavramını, Zehra ise “Mesela üç bölü beşini yemiş. Beşe böleceğim parçayı bölerim, üç taneymiş ya üçünü boyarım.” söylemi ile parça-bütün ilişkisini kesir ile ilişkilendirmişlerdir. Öğrencilere bütün, yarım, çeyrek kavramları ile günlük hayatlarında nerelerde karşılaştıkları sorulduğunda, öğrencilerin kesir ile günlük hayat ilişkisine kısıtlı örnekler verdiği belirlenmiştir. Bu örneklerden biri olarak Emre “10’u çeyrek geçer derler..” söylemi ile kesirlerin saatlerde kullanımını göstermiş, Önder ise “Mesela bir pasta yarım..” söylemi ile bütünü temsil eden bir pastanın yarısını işaret etmiştir. Günlük hayatlarında yarım, bütün kavramları ile ilgili sezgisel bilgiye sahip olsalar da, öğrencilerden bazılarının, bir bütünün ölçülebilen niteliğinin çeyreğinin yarımından az fakat birden fazla büyüklükte olduğu kavram yanılgısına sahip oldukları görülmüştür. Bu kavram yanılgısı, Emre’nin “Bir yarımın küçük bir şeyi çeyrek oluyor..” söyleminde, Meral’in “Yarımın daha şeyi.. Böyle kısası..” söyleminde, Önder’in “Çeyrek böyle az olan yani çok fazla bölünmüş..” söyleminde, Harun’un “Çeyrek oluşturmak istediğimizde 3 ya da 4’e bölüyoruz.” söyleminde ve Zehra’nın “(Daire şeklinde bir model çizer, sekiz eş parçaya ayırır.) İkiye boyarsan, üçe boyarsan çeyrek olur.” söyleminde açıkça görülmektedir. Yarımı sezgisel olarak bir bütünün “ikide biri” olarak sözlü ifade edebilen öğrencilerden geneli, bir bütünün çeyreğini kesir dili ile sözel olarak ifade

edememişlerdir. Bunun altında yatan neden, öğrencilerin bir bütünün çeyreğinin birden fazla büyüklükte olduğu dolayısıyla birden fazla kesir ile temsil edilebileceği düşüncesi olabilir. Genel olarak öğrencilere kesirleri temsil eden modeller gösterildiğinde, öğrenciler modelin temsil ettiği kesri sözel olarak dörtte bir, beşte bir, sekizde bir vs. şekilde birim kesir olarak ifade edebilseler de öğrencilerden bazılarının beşte bir veya sekizde bir yerine beş bölü bir veya sekiz bölü beş olarak hatalı kesir dilini kullandıkları görülmüştür. Bu durumda öğrencilerin pay ve payda kavramlarını anlamlandıramadıkları söylenebilir. Sözel olarak ifade edilen bir kesri uzunluk ve alan niteliklerine sahip modellerle veya küme modelleri ile temsil etmeleri istendiğinde ise öğrencilerden bazılarının model oluştururken eş parçalar oluşturamadığı veya eş parça oluşturanların ise yanlış sayıda eş parçayı taradığı gözlemlenmiştir (Şekil 5). Burada öğrencilerin bütünü temsil eden modelleri eş parçalara ayırırken şeklin merkez noktasını dikkate almadıkları söylenebilir. Öğrencilerinden hiçbiri sözel olarak ifade edilen kesri küme modeli ile gösterememiştir. Öğrencilerden biri, verilen çokluğun altıda birlerini küme modeli ile göstermesi istendiğinde çokluğa ait altı adet nesneyi birleştirerek bir nesneyi ayırmış ve onu altıda bir olarak ifade etmiştir. Bu durumda öğrencinin önceki öğrenme ortamlarında genellikle alan niteliğine sahip modellerle karşılaşması ve alan niteliğine sahip modellerin sürekli bir bütün olup birim kesrin bir parçadan oluşması, öğrencinin, bütünü temsil eden çokluklarda da bütünün payda kadar parçadan, birim kesrin ise bir parçadan oluştuğu anlayışına sahip olması bu güçlüğü yaşamasına sebep olabilir.

Şekil 5

Sırasıyla Emre'nin (1 ve 2) ve Önder'in (3) Dörtte Bir (Üstteki) ve Sekizde Bir (Alttaki) Kesirlerini Model ile Temsil Etme Eylemleri



Öğrencilere uzunluk niteliğine sahip bütünü temsil eden bir model ve bütüne ait parçalar koleksiyonundan bir parça verilerek bütünün niteliği ile parçanın niteliğini karşılaştırıp sonucu kesir dili ile ifade etmesi istenmiştir. Öğrenciler sezgisel olarak parçanın bütünün

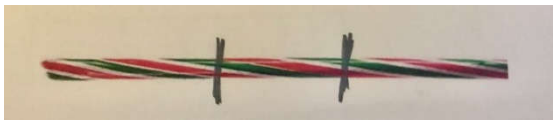
dörtte biri olduğunu ifade edebilseler de öğrencilerden yalnızca biri görüşme sırasında hazır bulunan aynı niteliğe sahip başka araçları kullanarak bilfiil eylemle gösterilen parçanın niteliğinin bütünün niteliğinin dörtte biri olduğunu gösterebilmiştir. Gösterilen bir parçanın ait olduğu bütünün kaçta kaçı olduğu ile ilgili akıl yürüterek çıkarımda bulunsalar da, öğrencilerin, parça ile aynı niteliğe sahip başka bir nesneyi kullanarak çıkarımlarının doğruluğunu göstermede güçlük yaşadıkları söylenebilir.

Bütünün Eş Parçalarını Sayma

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde model ile temsil edilen bütün ve bütüne ait parçalar koleksiyonu gösterilip ekleme yaparak parçalar koleksiyonunu bütün ile karşılaştırması istendiğinde, genel olarak öğrenciler parçalar koleksiyonunun miktarını ekleme yaparak kesir dili ile ifade edebilmişlerdir. Bununla birlikte; bütün gösterilmeden bütüne ait parçalar koleksiyonundan dörtte birlik parçalardan üç tanesi ve daha sonra on tanesi gösterilerek öğrencilerin ekleme yaparak parçalar koleksiyonunu bütün ile karşılaştırması beklendiğinde öğrenciler parçalar koleksiyonunun miktarını ifade edememişlerdir. Burada, öğrencilerin kesrin parça-bütün anlamına fazla odaklanması bütünü görmeden sadece bütüne ait parçaları görerek parçalar koleksiyonunun miktarı ile ilgili fikir öne sürmelerini güçleştirmiş olabilir. Parçalar koleksiyonunu temsil eden model verildiğinde, Harun'un dörtte birlik parçalardan üç tanesi için "on ikide üç" söylemi, bir bütünü oluşturan eş parçaların sayısından ziyade koleksiyondaki her bir parçanın ait olduğunu varsaydığı farklı bütünlerdeki toplam eş parça sayısını payda olarak aldığını göstermektedir. Bu durum ileride Harun'da kesirlerde toplama işleminde paydaları toplama kavram yanılması oluşmasına yol açabilir. Uzunluk niteliğine sahip bir bütün model verilip üçte ikilik parçasının gösterilmesini istendiğinde öğrenciler kolaylıkla bütünün istenilen miktardaki parçasını verilen model üzerinde gösterebilmişlerdir (Şekil 6).

Şekil 6

Öğrencilerin Uzunluk Niteliğine Sahip Bir Modelin Üçte İkilik Parçasını Gösterme Eylemi

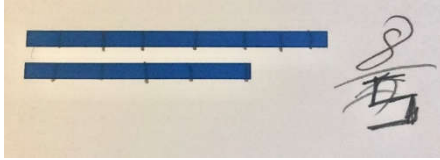


Öğrencilere kısa olan, uzun olanın (bütün olarak ele alınan) dörtte üçü uzunluğunda olacak şekilde iki tane farklı uzunlukta çizilmiş şerit gösterilerek bütün olarak ele alınan uzun şeridin uzunluğu ile kısa şeridin uzunluğunun karşılaştırıp sonucu ifade etmesi

istenmiştir. Öğrencilerin, miktarları birbirinin tam sayılı katı olmayan bu iki şeridin uzunluğunu birbirine göre karşılaştırmada ve sonucu birbiri cinsinden sayı ile ifade etmede zorluk yaşadıkları görülmüştür. Emre'nin yaşadığı bu zorluk "(Her iki şeridi de rastgele eş olmayan parçalara ayırarak) Bu bundan iki tane fazla herhalde. (Üstteki şeridi 8 parça, alttaki şeridi 5 parçaya ayırdığı için) Sekizde beş..(Sekizi paya, beşi paydaya yazar)..(Şekil 7.)" söyleminde açıkça görülmektedir. Diğer öğrencilerin bu soru üzerinde bir fikir ileri süremedikleri gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, öğrencilerin, kesrin ölçüm anlamına sahip olmamaları, iki nesnenin uzunluğunu kıyaslayıp birbiri cinsinden miktarı kesir dili ile ifade edememelerinin nedenlerinden biri olabilir.

Şekil 7

Öğrencinin Kısa Şerit ile Uzun Şeridi Karşılaştırma Eylemi

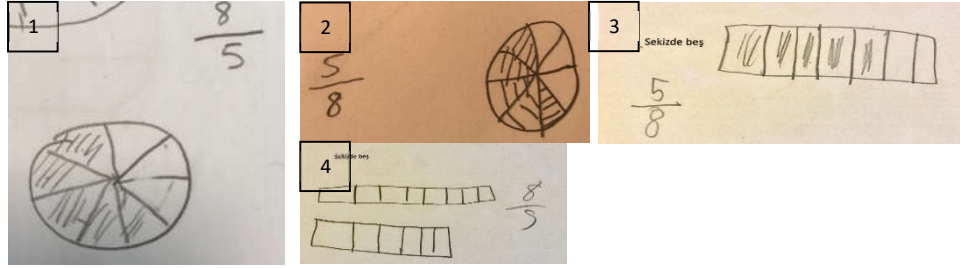


Öğrencilere, bir çikolata paketinin beşte dördü gösterilerek bütün çikolatanın ne kadar uzunlukta olduğunu model ile temsil etmesi istenmiştir. Öğrencilerden hiçbiri model oluşturamamıştır. Yani, bir bütüne ait bir nesne tarafından temsil edilen parçalar koleksiyonu verildiğinde bütünü temsil eden bir model oluşturmada zorluk yaşamışlardır.

Öğrencilerden sekizde beş kesrini temsil eden bir model oluşturmaları istendiğinde ise, bir öğrenci dışında tüm öğrenciler bu kesri temsil eden bir model üretebilmişlerdir (Şekil 8.). Sözel olarak verilen kesri model ile temsil edemeyen öğrenci ise "sekizde beş" kesri için birini sekiz diğerini beş parçaya bölerek modeli iki tane dikdörtgen vasıtasıyla oluşturmuştur. Bu durumda öğrencinin bir önceki soruda verilen modeli $\frac{8}{5}$ şeklinde sembolik olarak ifade etmesi, bir sonraki soruda sözel olarak verilen "sekizde beş" kesrini de aynı model ile temsil etmesine neden olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, onlardan istenmemesine rağmen, öğrencilerden bazılarının "sekizde beş" kesrin sembolik gösterimini yazdıkları fakat bu gösterimde pay yerine paydayı, payda yerine de payı yazarak hata yaptıkları gözlemlenmiştir. Bu doğrultuda, öğrencilerin pay ve payda kavramlarını anlamlandıramadıkları söylenebilir.

Şekil 8

Sırasıyla Meral, Zehra, Önder, Enes'in Sekizde Beş Kesrini Model ile Temsil Etme Eylemi

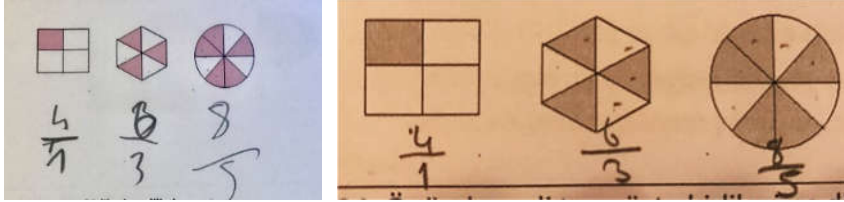


Kesir Notasyonu

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde öğrencilere kesirlerin sembolik gösterimini hatırlayıp hatırlamadıkları sorulmuş öğrenciler birer kesir örneğini sembolik olarak yazmışlardır. Kesirleri pay ve paydayı yer değiştirerek yazdıkları veya okudukları gözlemlenmiştir. Bununla ilgili Zehra'nın "Altıda üç, üçte altı. Fark etmiyor." söylemi ve Emre'nin, Meral'in, Harun'un ve Buse'nin ise model ile temsil eden kesirleri yazarken payı ve paydayı yer değiştirerek yazması (Şekil 9.) öğrencilerin kesrin sembolik notasyonu ile ilgili kavram yanlışlarına sahip olduğunu göstermektedir. Kesrin sembolik notasyonunda pay ve paydanın ne anlam ifade ettiğini "(Paydayı kastederek) Büyük olduğunu..(Payı kastederek) Bu da küçük olduğunu ifade eder.." söylemi ile dile getiren Emre'nin paydanın hep paydan büyük sayıları temsil ettiği anlayışına sahip olduğu söylenebilir. Meral'in "(Payda için) Taranmış kısım. (Pay için) Bunun bütünü." söylemi, Harun'un "(Payda için) Yenmiş kısmı, yani.. Örneğin bir pizza var kaçının yendiğini gösterir, (Pay için) O pizzanın kaç dilim olduğunu gösterir." söylemi ve Buse'nin "(Payda için) Sekiz parça alındığını söylüyor, (Pay için) 12 parçaya bölündüğünü söylüyor." söylemi ile kesrin sadece parça-bütün anlamına odaklandıkları fakat pay ve paydayı yer değiştirerek yazdıkları için pay ve paydanın anlamlarını da karıştırdıkları, Önder'in ise "(Dokuzda yedi kesrini örnek vererek) Yani mesela bunun gibi, (parça sayısını kastederek) bu dokuz olacak, yedi tanesini karalayacağım." söylemi ve Nur'un "(Pay için) Alınan parça sayısını.. (Payda için) Bütünün kaç bölündüğünü ifade eder." söylemi ile kesrin parça-bütün anlamına odaklandıkları, böylelikle kesirlerde paydanın parça sayısını payın ise taralı alanı ifade ettiği anlayışına sahip oldukları söylenebilir.

Şekil 9

Sırasıyla Emre'nin ve Meral'in Model ile Temsil Edilen Kesirlerin Sembolik Notasyonunu Yazma Eylemleri



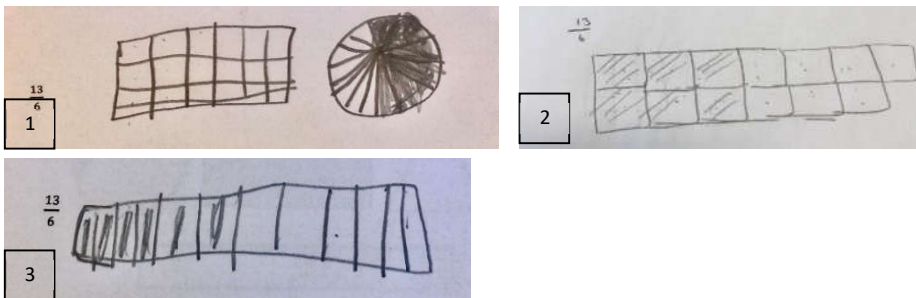
Öğrenciler model ile temsil edilen kesirleri sembolik olarak yazarken bazı öğrencilerin pay ve paydayı yer değiştirerek yazmaları dışında kesirleri sembolik olarak doğru yazdıkları görülmüştür.

Birden büyük sayıları temsil eden kesirler

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde birden büyük sayıları temsil eden parçalar koleksiyonu sözel olarak verildiğinde (örneğin; 7 tane üçte birlik pizza kaç pizza eder?) ekleme eylemini kullanarak kesir dili ile sözel olarak ifade etmede zorluk yaşadıkları görülmüştür. Birden büyük sayıları temsil eden parçalar koleksiyonu model olarak verilip modeli temsil eden kesri sözel olarak ifade etmeleri istendiğinde ise öğrencilerin ekleme yaparken bütüne ait parça büyüklükleri yerine parça sayısını yazdıkları gözlemlenmiştir (örneğin, 21 parça dörtte birlik pizza için "21 tane/dilim yazmaları gibi). Sembolik olarak verilen bir kesri ($\frac{13}{6}$) model ile temsil etmeleri istendiğinde ise, öğrencilerin hepsinin pay ve paydayı yer değiştirip kesri basit kesre dönüştürerek bu basit kesri temsil eden modeli oluşturmaya çalıştıkları görülmüştür (Şekil 10.). Dolayısıyla, öğrencilerin kesrin sadece parça-bütün anlamına odaklanmaları, paydayı bütünü oluşturan parça sayısı ve payı ise bütünden alınan parça sayısı olarak görmelerine dolayısıyla birden büyük sayıları temsil eden kesirlerin onlar için bir anlam ifade etmemesine neden olmuş olabilir.

Şekil 10.

Sırasıyla Emre, Medine ve Önder'in $\frac{13}{6}$ Kesrini Model ile Temsil Etme Eylemleri



Kesrin Kullanımları

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde günlük yaşantılarında kesri hangi amaçlar için kullandıkları sorulduğunda öğrencilerin ikisi “parça-bütün” anlamına odaklanmış diğerlerinin ise sadece altında ve üstünde birer sayı olan bir kesir çizgisi olarak gördükleri gözlemlenmiştir. Parça-bütün anlamına odaklanan öğrencilerden Meral’in “*Taranmış kısım (pay)..Bunun bütünü (payda)*” söylemi ile, Önder’in ise “*(Dokuzda yedi kesrini örnek vererek) Yani mesela bunun gibi, (parça sayısını kastederek) bu dokuz olacak, yedi tanesini karalayacağım.*” söylemi ile bir bölgeyi tarama eylemini kastederek kesrin parça- bütün anlamına odaklandıkları görülmektedir.

Öğrencilerin “*Ölçme ve Birim*” öncül kavramında betimlendiği üzere bir nesnenin niteliğini ölçmede zorluk yaşamalarının ve birim, birimleştirme gibi ölçme kavramlarındaki eksikliklerinin kesrin ölçme anlamının oluşturulması için engel teşkil ettiği söylenebilir.

Öğrencilere sınıflarındaki arkadaşlarının yaklaşık kaçta kaçının erkek olduğu sorulmuş, öğrencilerden tek cevap verebilen Emre ise “*Erkekler 14, kızlar 12.. O zaman 14 bölü 12 olur.*” cevabı ile kesrin oran anlamındaki parça- parça oranına (kız-erkek) odaklanarak, asıl istenen parça-bütün (erkek- tüm sınıf) oranını kuramamıştır.

Kesirlerin Temsil Ettiği Miktarlar, Kesirlerin Karşılaştırılması ve Kesirlerin Denkliği

Öğrenciler ile yapılan görüşmelerde öğrencilere farklı irilikte iki elma gösterilerek bu iki elmadan birisinin yarısını bir kişinin, diğerinin yarısını da bir diğer kişinin yemesi durumunda “bu kişilerin eşit miktarda elma yiyip yemedikleri” sorulmuş, öğrencilerden biri hariç diğer hepsi aynı miktarda elma yediklerini ifade etmişlerdir. Aynı ölçülebilen niteliğe, fakat bu niteliğin farklı miktarlarına sahip iki nesnenin aynı kesir ile temsil edilen parçalarının eşit olup olmadığı sorulduğunda, öğrencilerin eşit olduğunu ifade etmesi, paylaşılan parçaların niteliğinin miktarının eşit olması gerektiğini kavrayamadıklarını göstermektedir. Öğrencilerden Emre’nin ise “*Yok farklı... Biri büyük biri küçük elmaların...*” söylemi ile aynı niteliğin farklı miktarlarına sahip bütünlerin ikide birlik parçalarının aynı miktarda olamayacağı bilgisine sahip olduğu söylenebilir. Öğrencilerden bir pastanın $\frac{1}{3}$ 'i ile başka bir pastanın $\frac{1}{4}$ 'ini karşılaştırmaları istendiğinde ise referans alınan bütünün niteliğinin miktarına göre $\frac{1}{3}$ 'lük ve $\frac{1}{4}$ 'lük parçalarının miktarlarının da değişebileceği o yüzden karşılaştırma yapılamayacağı ile ilgili fikir ileri sürmedikleri görülmüştür.

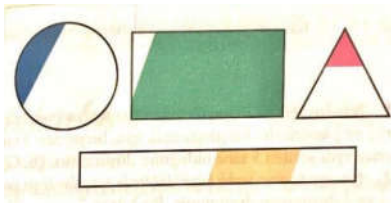
Eşit Paylaşım öncül kavramına yönelik hazırlanan sorular arasında Şekil 4’te verilen alan

niteliğine sahip farklı bütünlere ait parçalar koleksiyonları gösterilerek bütünlere hangisinin eş parçalara ayrıldığını belirlemeleri istenmişti. Öğrenciler bütüne ait parçalar koleksiyonu aynı miktarda ve aynı şekilde ise parçaların eş parça olduğunu ifade edebilseler de aynı miktarda fakat farklı şekildedeki parçaların eş olamayacağı anlayışına sahiptiler. Öğrencilerin şeklin değil nesnelere göz önüne alınan niteliğinin miktarının önemli olduğunu anlamamaları öğrencilerin “kesirlerin temsil ettiği miktarların azlığı/çokluğu” kavramına dolayısı ile sayı hissine sahip olmadıklarına ve gelecekte kesirlerin denkliği kavramı ile ilgili sorunlar yaşanacağına işaret olabilir. Nitekim öğrencilerin hepsi kesirlerin denkliği kavramı ile ilgili bir bilgiye sahip olmadıklarını ifade etmiştir.

Öğrencilere kendi sınıflarının yaklaşık kaçta kaç gözlüklü olduğu ile ilgili günlük yaşantılarına dair bir soru yöneltilmiş, öğrenciler herhangi bir fikir ileri sürmemiştir. Bu daha önce de karşılaşılan bir durum olmakla birlikte, öğrencilerin, genel olarak, yöneltilen sorulardaki verileri model ile temsil etmeden sadece zihinsel imgeler kullanarak akıl yürütemediği söylenebilir. Öğrencilere dört tane model gösterilerek (Şekil 11.) modellerde taralı alanların miktarını temsil eden kesrin ne olduğu ile ilgili fikirleri sorulmuştur. Öğrenciler daire modelinin temsil ettiği kesir için “Dörtte biri, yarısı, biri”, dikdörtgen modelinin temsil ettiği kesir için “Beşte biri, çeyreği, dörtte biri”, üçgen modelinin temsil ettiği kesir için “üçte biri, çeyreği, ikide biri”, ve şerit modelinin temsil ettiği kesir için ise “Dörtte biri, birde dördü, biri” şeklinde ifade etmişlerdir.

Şekil 11

Kesirleri Temsil Eden Model Örnekleri



Bunlar göz önüne alındığında, öğrencilerin ileri sürdüğü fikirlerinde tutarsız olduğu, dolayısıyla ifade ettikleri kesirlerde bilinçli davranmadıkları söylenebilir. Aynı şekilde sayı doğrusu üzerinde işaretlenen yeri temsil eden kesir hakkında fikir ileri sürmeleri istendiğinde öğrenciler kesirlerin temsil ettiği sayıların sayı doğrusunda gösterimi ile ilgili hiçbir bilgiye sahip olmadıklarını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte, öğrenciler sayı doğrusunda 0 ile 1 arasında bir sayı olmadığı anlayışına da sahiptirler. Bu bulgular öğrencilerin kesirler için sezgisel hislere sahip olmadığını göstermektedir. Sezgisel hisse

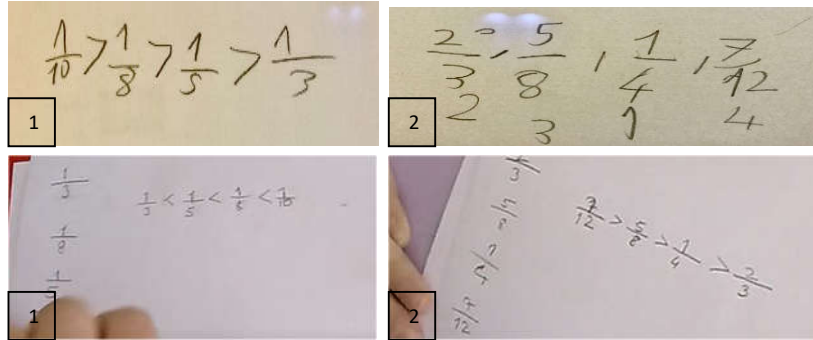
sahip olmayan öğrencilerin belirli bir kesrin ifade ettiği miktarın ne kadar fazla veya az olduğu ile ilgili bilgiye sahip olamayacağı ve iki kesirden hangisinin temsil ettiği miktarın daha fazla veya az olduğunu ifade edemeyeceği öngörülebilir. Nitekim öğrencilere bir pastanın $\frac{1}{4}$ 'i ile aynı pastanın $\frac{1}{6}$ 'ini karşılaştırmaları istendiğinde, öğrencilerden biri hariç diğerleri bir pastanın $\frac{1}{6}$ 'inin $\frac{1}{4}$ 'e göre daha fazla miktarı temsil ettiğini ifade etmişlerdir. Bu durumu Emre "Altıda biri tabi ki de. Çünkü onda altı parça var, diğerinde dört parça var. Altı parça olan bir tane yemiş beş kalmış, diğerinde bir parça yemiş üç kalmış. Altı parça olan daha büyük. Bence böyle.." söylemi ile dile getirmiştir. Bu söylemden yola çıkarak bu öğrencinin altıda birlik ve dörtte birlik pasta parçalarının miktarları yerine o söz konusu parçaları ayırdıktan sonra kalan pastaların miktarına göre karşılaştırma yaptığı söylenebilir. Harun'un "İkisi de pastanın bir dilimini yemiş, eşit miktarda yemişler." söylemi eşit paylaşım kavramı için eşit miktarda parçaların yerine, miktarları eşit olmayan ama aynı sayıda parçaların paylaşımı olduğu anlayışına sahip olmasından kaynaklanabilir. Pastanın $\frac{1}{4}$ 'lik parçasının daha fazla miktarı temsil ettiğini ifade eden öğrenci ise pastaları temsil eden iki bütün çizerek birini dörtte birlik parçalara diğerini ise altıda birlik parçalara ayırmış, " (Dört eşit parçaya ayırdığı pastanın bir parçasını göstererek) Bu daha çok yiyor. Çünkü bu pastanın daha... Nasıl diyeyim... Altıya bölüyor ama bu sadece dörde bölüyor." söylemi ile dörtte birlik parçanın daha fazla miktarı temsil ettiğini belirtmiştir.

Öğrencilere cep telefonundaki pil göstergesine ait bir resim gösterilerek, pilin $\frac{3}{10}$ 'ü dolu ise pilin doluluk miktarı sıfıra mı daha yakındır yoksa yarıya mı daha yakındır diye sorulduğunda, öğrencilerin hepsi sıfıra yakın olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerdeki $\frac{5}{10}$ kesrinin yarıya denk olduğu bilgisinin eksikliği öğrencilerin model ile temsil edilen bir kesri iki referans noktasına yakınlığına göre karşılaştırmalarında zorluk yaşamalarına sebep olmuş olabilir.

Öğrenciler paydaları eşit olan basit kesirleri sıralayabilmişlerdir. Fakat $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ birim kesirlerinin temsil ettiği sayıları büyükten küçüğe doğru sıralamaları istendiğinde, öğrencilerin hepsinin paydadaki sayıların büyüklüğüne göre sıralama yaptıkları (Şekil 12.1), aynı sıralamayı $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}$ basit kesirlerinin temsil ettiği sayılar için yapmaları istendiğinde ise, bazı öğrencilerin paydadaki bazılarının paydaki sayıların büyüklüğüne göre sıralama yaptıkları gözlemlenmiştir (Şekil 12.2). Öğrencilerin, kesirler ile ilgili temel kavramları tam geliştirememeleri tam sayılardan edindikleri fikirleri kesirlere de yanlış olarak genellemelerine sebep olmuş olabilir.

Şekil 12

Öğrencilerin Kesirlerinin Temsil Ettiği Sayıları Sıralama Eylemleri



TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kesir kavramının matematiksel yapısında yer alan öncül kavramlara ilişkin matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrenci düşünceleri, kavrayışları ve anlayışları incelenmeye çalışılmıştır. Çalışmada, Newton ve diğerlerinin (2022) çalışmalarında da belirttiği üzere öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerinin, literatürde rastlanan öğrenme güçlüğüne sahip olmayan akranlarında görülen benzer hatalar yaptıkları, benzer anlayışlara ve kavram yanılgılarına sahip oldukları, fakat bununla birlikte daha az tahmin edilebilir bir model izleyen hatalar yapabildikleri görülmüştür. Bu çalışma 5, 6, 7. sınıf öğrencileri ile yapılmış olmasına rağmen öğrencilerin sınıf düzeyi fark etmeksizin benzer düşüncelere, kavrayışlara, kavram yanılgılarına ve anlayışlara sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum, Mazzocco ve diğerleri (2013) tarafından matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerle yapılan, öğrencilerin 3. sınıfta tanıtılan kesir kavramlarını başlangıçta öğrenmekte zorlandıkları ve bu temel kavramları 8. sınıfa kadar öğrenmekte zorluk çekmeye devam ettikleri sonucuna ulaştığı çalışması ile paralellik göstermektedir.

Professional Development Service for Teachers'ta (2014) belirtildiği üzere temel olarak kesirlere iki durumda daha sık ihtiyaç duyulmaktadır: Birincisi, ölçüm yaparken, bir nesnenin uzunluğu, yüksekliği, genişliği, kapasitesi vb. ardışık iki tam sayı arasına düşebilir. Bu durumda ölçümde kullanılan birim başka birimler aracılığıyla tekrar birleştirilerek ölçüm sonucu birim cinsinden sayı ile ve dolayısıyla bu sayıyı temsil eden kesirle ifade edilir. Bu çalışmada, öğrencilerin, ölçümede kullanılan birim nesnenin niteliği ile ölçülen nesnelerin niteliği bakımından birbirleriyle uyumlu olması gerektiğinin farkında oldukları fakat standart olmayan birimleri yineleyerek ölçüm yapmaya çalışsalar da, farklı uzunluktaki ölçü birimlerini birlikte kullanarak ölçüm yapamadıkları ortaya konulmuştur. Başka bir ifade ile literatürde de belirtildiği gibi diğer birimler ile birimi

tekrar birimleştirerek ölçüm yapamamışlardır (Mills, 2016; Simon vd., 2018). Bu durum, Hunt ve diğerlerinin (2019) matematik öğrenme güçlüğüne sahip bir öğrenci ile yaptıkları çalışmada, öğrenciden uzunluk niteliğine sahip bir nesneyi aynı niteliğe sahip birim olarak görev yapan bir nesne ile ölçülmesi istendiğinde öğrencinin ona temin edilen başka nesnelere birimi tekrar birimleştirmeyi düşünemediği dolayısıyla ölçüm sonucunu birim cinsinden ifade edemediği sonucu ile uyum göstermektedir. Bu da, öğrencilerin, ölçme kavramına ait karakteristiklerden birim kavramı ile ilgili hedef davranışlara sahip olmadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin birim, birimleştirme gibi ölçme kavramlarındaki eksiklikleri, literatürde de belirtildiği gibi, matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerde kesrin ölçme anlamının oluşturulması için engel teşkil etmektedir (Hacker vd, 2019). Kesirlerin kavramsal anlamı için ölçüm fikri ile başlanması, birim yinelemenin zihinsel aktivitesine dayanarak, öğrencilerin doğal sayılar üzerinde çalışma şekillerinin yeniden düzenlenmesi yoluyla kesirlerin inşası için temel sağlar (Simon vd., 2018; Wilkins and Norton, 2018). Fuchs ve diğerleri (2013), çalışmalarında ölçüm anlamına dayalı öğretimin, matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin kesirleri sıralama gibi kesrin daha karmaşık kavramlarını anlamalarını desteklediğini tespit etmiştir. Dolayısıyla ölçüm ve birim öncül kavramları temel alınarak öğrencilerde kesir kavramlarının inşa edilmesi önerilebilir.

İkincisi ise, miktarların paylaşıldığı durumlar çoğu zaman tam sayılar dışındaki sayıları gerektiren durumlardır. Günlük hayatlarında bir bütünü veya çokluğu paylaşırma eyleminde bulduklarından öğrencilerin eşit paylaşım kavramına aşina oldukları gözlemlenmiştir. Öğrenciler bir bütünü iki ya da dört eş parçaya ayırma bilgisine sahip olsalar da bütünü temsil eden şekilleri 3, 5 gibi farklı sayıda eş parçaya ayırmada güçlük yaşamışlardır. Bu güçlük, Lewis (2014) tarafından matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrenciler ile yapılan çalışmanın sonuçlarıyla benzer olarak öğrencilerin bütünü temsil eden bir şekli tek sayıda parçaya bölmek için imkânsız olduğu sonucuna varmasına neden olmuştur. Öğrencilerin, belirli bir sayıda verilen nesnelere verilen sayıda kişiye/nesneye eş pay düşecek şekilde ayırmada zorluk yaşadıkları görülmüştür. Örneğin, öğrencilere 4 kekin 3 arkadaş arasında eşit olarak paylaşılması istenmiş, bütün öğrenciler birer keki 3 öğrenciye paylaştırdıktan sonra öğrencilerden biri hariç diğerleri kalan keki dört eş parçaya bölmüş ve kalan parçayı tekrar dört eş parçaya bölerek tekrarlı kalan parçalar oluşturmuşlardır. Benzer şekilde Hunt ve diğerleri (2019) tarafından yapılan çalışmada, matematik öğrenme güçlüğüne sahip bir öğrenciden 7 çikolata barını 6 kişiye eşit olarak paylaşılması istenmiş, öğrenci şekerleri altı eş parçaya ayırmak yerine sekiz eş parçaya

ayırarak kalan parçalar oluşturmuş, eşit paylaşım yapamamıştır. Bir bütüne ait parçalar koleksiyonu verildiğinde, öğrencilerin, aslında eş ama fiziksel görünüş olarak eş görünmeyen parçaların eş parça olmadığı anlayışına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu durum öğrencilere bütünü ve bütüne ait parçalar koleksiyonunu temsil eden modeller gösterildiğinde genellikle aynı şekle ve büyüklüğe sahip şekiller gördüklerinden eşit paylaşımların aynı şekle sahip olması gerektiğini düşünmelerinden kaynaklanabilir (Van de Walle vd., 2009). Bu noktada, öğrencilere eş parçalar oluşturulurken parçaların şeklinden (fiziki görünüm) ziyade parçaların göz önüne alınan niteliğinin miktarlarının eşit olması gerektiğinin gerekçelerinin öğrencilere keşfettirilmesi önerilebilir.

Çalışmada, öğrencilerin, eşit paylaşımın, bütünün eş parçalara bölünüp parçaların paylaşımı anlamına geldiğini fark edebildikleri tespit edilmiştir. Öğrenciler günlük hayatlarında yarım, bütün kavramları ile ilgili sezgisel bilgiye sahip olsalar da öğrencilerden bazılarının, literatürde öğrenme güçlüğüne sahip olmayan öğrencilerde de rastlanan (Empson, 1999), bir bütünün ölçülebilen niteliğinin çeyreğinin yarımından az fakat birden fazla büyüklükte olduğu yanılgısına sahip oldukları görülmüştür. Öğrenciler genel olarak model ile temsil edilmiş kesirleri kesir dili ile sözel olarak ifade etmede ve sözel olarak verilen kesri model ile temsil etmede zorluk yaşamışlardır. Bu güçlük, Ikhwanudin ve Wahyudin (2019) tarafından matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerle gerçekleştirilen çalışmada öğrencilerin kesirleri temsil etmede güçlük yaşadığı tespiti ile paralellik göstermektedir. Bununla birlikte, öğrencilerden biri ile yapılan görüşmede, dörtte bir kesrini temsil eden bir model oluşturması istendiğinde bir daire modelini dört eşit parçaya ayırıp bir parçasını tarayan öğrenciye parçalardan birinin bütünün kaçta kaç olduğu sorulduğunda dörtte üçü olduğunu ifade etmiş ve nedeni olarak taralı parçayı göstererek “çünkü biri çıktı, dörtte üçü kaldı” cevabını vermiştir. Bu yanılgı, Lewis, Thompson ve Tov (2021) tarafından matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerle yapılan çalışmada da gözlemlenmiş, yanılgının nedeni olarak, öğrencilerin dörtte üç kesrini temsil eden modeli oluştururken, modeli dört eş parçaya ayırarak üçünü tarayıp “üçü alındı, biri kaldı” şeklinde ifade etmesi ile taralı parçayı “alındı” veya “gitti” olarak ve taralı olmayan parçaya “kalan” parça olarak atıfta bulunma anlayışına sahip olmalarından kaynaklandığı belirtilmiştir. Öğrencilerin sözel olarak verilen kesri model ile temsil etmede yaşadıkları zorluk ise bütünü parçalara ayırırken oluşturulan parçaların eş olup olmadığına dikkat etmemelerinden kaynaklanmıştır. Bir kesri temsil eden model için bütün parçaların eşit olması beklense de bu öğrencilerde gelişimi kendiliğinden olmayan, öğretimde özellikle dikkat edilmesi gerek bir konudur (Haser ve Ubuz, 2002).

Model ile temsil edilen bütün ve bütüne ait parçalar koleksiyonu gösterilip, öğrencilerden ekleme yaparak parçalar koleksiyonunu bütün ile karşılaştırmaları istendiğinde, genel olarak öğrenciler parçalar koleksiyonunun miktarı birden büyük değil ise ekleme yaparak kesir dili ile ifade edebilseler de sadece bütüne ait parçalar koleksiyonundan bir veya birkaç parça model olarak verildiğinde bütün ile karşılaştırıp sonucu ifade etmede zorluk yaşamışlardır. Öğrencilere model kullanmadan, sadece zihinsel imgeler kullanmalara izin vererek 3 tane dörtte birlik parçanın ne kadar ettiğini kesir dili ile ifade etmesi istenmiş, öğrencilerden biri “on ikide üç” cevabını vermiştir. Bu durumda, öğrencinin parçalara ayırma ve parçaları tekrarlama kavramlarını oluşturamadığı ve öğrencide, ileride kesirlerde toplama işleminde paydaları toplama kavram yanılgısı oluşmasına yol açabileceği düşünülmektedir. Bu yüzden parçalara ayırma ve tekrarlama eylemleri, öğrencilerin kesirlerin anlamını, özellikle pay ve paydayı anlama yollarını da etkilemektedir (Van de Walle vd., 2009). Bununla birlikte, Lewis’in (2016) belirttiği üzere parçalara ayırma ve tekrarlama eylemi kesirlerin temsil ettiği nesnelere niteliklerinin miktarını anlamının temelini oluşturmakla birlikte matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrenciler bu gelişim modelini takip etmekte güçlük yaşayabilirler. Kesirlerin tekrarlı olduğu görüşü, yani $\frac{3}{4}$ gibi bir kesri dörtte bir denilen üç parçanın sayılması olarak görme, öğrencilerin geliştirmesi gereken önemli bir fikirdir (Common Core State Standards Initiative, 2010; Post vd., 1985; Siebert ve Gaskin, 2006; Tzur 1999). Bu fikir, ileride birden büyük sayıları temsil eden bileşik kesirleri oluşturmak için temel oluşturur. Nitekim öğrencilerde bu fikir oluşmadığından bir bütünden fazla parçalar koleksiyonu verildiğinde öğrenciler ekleme eylemini kullanarak parçalar koleksiyonunu bütün ile karşılaştırıp miktarı kesir dili ile ifade edememişlerdir.

Öğrencilere kesrin sembolik notasyonunda pay ve paydayın ne anlam ifade ettiği sorulduğunda genel olarak öğrenciler, payın “alınan parça sayısı” olduğunu, paydayın ise “bir bütün yapmak için kaç parça gerektiğini ya da bütünün kaç parçaya ayrıldığını” ifade ettiğini söylemişlerdir. Van de Walle ve diğerlerine (2009) göre bu anlayış her zaman yanlış olmamakla birlikte örneğin, bütün bir kekten $\frac{1}{6}$ ’lik bir parça kesilirken, geri kalan $\frac{5}{6}$ ’lik parçasında herhangi bir dilimleme yapılmadığında bütün kek $\frac{1}{6}$ ’lik ve $\frac{5}{6}$ ’lik parça olmak üzere iki parçadan oluşur. Dolayısıyla kekin $\frac{1}{6}$ ’lik parçası bütün kekin kaç parçaya ayrıldığını söylemez. Bütün kekin sadece iki parçadan oluşması ise alınan parçanın bütünün $\frac{1}{6}$ ’lik parçası olduğunu değiştirmez. Başka bir deyişle, bir bütün ve bütüne ait farklı miktardaki parçalar koleksiyonundan bir parçanın miktarını ifade eden kesirde

payda her zaman o bütünü paydadaki sayı kadar eş parçaya bölündüğünü ifade etmez. Pay ve payda ile ilgili bu anlayışın diğer bir eksikliği ise $\frac{7}{5}$ gibi bir bileşik kesir düşünüldüğünde, bütünü oluşturan beş parçadan yedi parça almak öğrencilere imkânsız gibi görünmektedir (Thompson and Saldanha, 2003; Tzur, 1999). Bu durum öğrencilerin genel olarak kesirlerin parça-bütün anlamına odaklandığından kaynaklanabilir. Çünkü parça-bütün kesir kavramına sahip öğrenciler için, birim kesirler bir bütünü parçalarıdır, bir bütünü oluşturan parça sayısı ise sonludur (ör; $\frac{7}{5}$ kesrinde bütünü oluşturan parça sayısı 5'tir). Bu nedenle, bu öğrenciler için, bileşik kesir diğer bir deyişle birden büyük sayıları temsil eden kesir bir anlam ifade etmez. Nitekim sözel olarak birden büyük kesri temsil eden parçalar koleksiyonu veya birden büyük kesrin sembolik gösterimi verildiğinde öğrenciler bileşik kesri ifade etmede ve model ile göstermede zorluk yaşamışlardır. Öğrenciler verilen bileşik kesri pay ve paydanın yerini değiştirip basit kesre dönüştürerek, bu basit kesri temsil eden model oluşturmaya çalışmışlardır. Bu durumda öğrencilere bir bütünden daha büyük miktarların birimin tekrarı ile ölçülebileceğini keşfettirilmesi önerilebilir. Bununla birlikte öğrencilerin kesri dolayısıyla 1'den büyük sayıları temsil eden kesirleri, kesirlerde karşılaştırma ve sıralamayı daha iyi anlamaları için kesrin parça-bütün anlamı dışında diğer anlamları olan bölüm, oran, ölçü (Lamon, 1999) anlamlarına vurgu yapılması önerilebilir (Clarke vd., 2008; Siebert ve Gaskin, 2006). Ayrıca, Lewis'in (2014) matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerle yaptığı çalışma sonucunda öğrencilerin kesir kavramlarını öğrenmeleri için uygulanacak müdahalelerde sadece parça-bütün yaklaşıma odaklanılmaması, sayı doğrusu gibi teknikleri kullanarak ölçüm anlamında kesir yaklaşımının da ele alınması gerektiği vurgulanmıştır. Böylelikle kesirlerin sayı doğrusu aracılığıyla ölçüm anlamında yorumlanmasına dayalı öğretim, matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin tam sayıları ve kesirleri bütünleştirmelerine ve sayılar bilgilerini genişleterek sayıların sürekliliğini kavramsallaştırmalarına yardımcı olabilir (Namkung ve Fuchs, 2019).

Öğrencilere farklı irilikte iki elma gösterilerek bu iki elmadan birisinin yarısını bir kişinin, diğerinin yarısını da bir diğer kişinin yemesi durumunda "bu kişilerin eşit miktarda elma yiyip yemedikleri" sorulmuş, öğrencilerden biri hariç diğer hepsi aynı miktarda elma yediklerini ifade etmişlerdir. Aynı ölçülebilen niteliğe, fakat bu niteliğin farklı miktarlarına sahip iki nesnenin aynı kesir ile temsil edilen parçalarının eşit olup olmadığı sorulduğunda, öğrencilerin eşit olduğunu ifade etmesi, paylaşılan parçaların niteliğinin miktarının eşit olması gerektiğini kavrayamadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin

kesirlerin temsil ettiği miktarın referans olarak alınan bütüne bağlı olması gerektiğini kavraması için aynı kesirleri somut malzemeler kullanılarak, öğrencilerin, değişik nitelikteki veya aynı nitelikte fakat farklı miktardaki bütünlere referans verilebileceğini görmelerinin sağlanması önerilebilir.

Öğrenciler kesirlerin temsil ettiği miktarlara yönelik sayı hissine sahip değildirler. Kesirler öğretimi, kesirlerin temsil ettiği miktarları anlamayı vurgulamaya başlamıştır. Böyle bir vurgunun, matematik öğrenme güçlüğü çeken öğrencilerin kesirleri öğrenmesini iyileştirdiği de bulunmuştur (Fazio vd., 2016; Fuchs vd., 2013, 2014). Öğrencilerin kesirlerin temsil ettiği miktarlara yönelik sayı hissine sahip olmamaları gelecekte kesirlerin denkliği kavramı ile ilgili sorunlar yaşanacağına işaret eder. Nitekim öğrencilerin hepsi “denk olma” kavramı ile ilgili bir bilgiye sahip olmadıklarını ifade etmiştir.

Öğrenciler belirli bir kesrin ifade ettiği miktarın ne kadar fazla veya az olduğu ile ilgili bilgiye sahip değildirler ve iki kesirden hangisinin temsil ettiği miktarın daha fazla veya az olduğunu ifade edememişlerdir. Ikhwanudin ve Wahyudin (2019) tarafından matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerle gerçekleştirilen çalışmada benzer şekilde öğrencilerin kesirlerin temsil ettiği miktarları tahmin etmede, karşılaştırma ve sıralamada hata yaptıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerden bazıları kesirlerin temsil ettiği miktarları karşılaştırırken veya sıralarken kesrin paydadaki veya paydaki sayının büyük olanının daha fazla miktarı temsil ettiği anlayışına sahiplerdir. Bir öğrencinin ise dörtte bir ve üçte bir kesrini karşılaştırırken “Çünkü onda dört parça var, diğerinde üç parça var. Dört parça olan bir tane yemiş üç kalmış, diğerinde bir parça yemiş iki kalmış. Dört parça olan daha büyük.” söylemi ile Lewis ve diğerlerinin (2021) matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrenciler ile yaptığı çalışmasında da görülen benzer bir anlayışa sahip olduğu saptanmıştır. Bu kavram yanılığının giderilmesi için somut veya somut olmayan modeller ve zihinsel imgeler ile matematik öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilere görselleştirme becerisi kazandırılarak kesirlerin ne anlama geldiğinin fark ettirilmesi ve kesirlerin temsil ettiği miktarların iyice anlaşılmasının sağlanması önerilebilir (Mazzocco vd., 2013).

KAYNAKLAR

- Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N., & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology, 112*(3), 628–648.
- Barnett-Clarke, C., William, F., Rick, M., Sharon, R., & Rose, M. Z. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3–5*. Reston.
- Bryant, R. A., Mastrodomenico, J., & Felmingham, K. L. (2008). Treatment of acute stress disorder: A randomized controlled trial. *Archives of General Psychiatry, 65*, 659- 667.
- Bouck, E. C., Satsangi, R., & Park, J. (2018). The concrete–representational–abstract approach for students with learning disabilities: An evidence-based practice synthesis. *Remedial and Special Education, 39*(4), 211–228.
- Bottge, B. A., Ma, X., Gassaway, L., Toland, M. D., Butler, M., & Cho, S. J. (2014). Effects of blended instructional models on math performance. *Exceptional Children, 80*, 423-437.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Pegem Yayınları.
- Chmiliar, L. (2010). Multiple-case designs. In A. J. Mills, G. Eurepas & E. Wiebe (Eds.), *Encyclopedia of case study research* (pp 582-583). Sage.
- Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). Ten practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(7), 373-380.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 308-327). Hillsdale.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (2000). Designing effective software. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 761-776). Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in preK-2 mathematics. In D. Clements, J. Sarama, A. M. Di-Biase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 299- 321). Lawrence Erlbaum.
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. [http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math %20Standards.pdf](http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)
- Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (2nd Ed.). Sage.
- Çıkılı, Y., Gönen, A., Aslan Bağcı, Ö., & Kaybar, H. (2020). Özel eğitim alanında görev yapan öğretmenlerin bireyselleştirilmiş eğitim programı (bep) hazırlama konusunda yaşadıkları güçlükler. *Uluslararası Toplum Araştırmaları Dergisi, 15*, 5123-5148.
- Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction

- concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, 17(3), 283-342.
- Ennis, R. P., & Losinski, M. (2019). Interventions to improve fraction skills for students with disabilities: A meta-analysis. *Exceptional Children*, 85, 367-386.
- Fazio, L. K., Kennedy, C. A., & Siegler, R. S. (2016). Improving children's knowledge of fraction magnitudes. *Plos One*, 11(10), e0165243. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0165243>
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C.L., & Cirino, P.T. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, 105(3), 683-700.
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Sterba, S. K., Long, J., Namkung, J., & Malone, A. (2014). Does working memory moderate the effects of fraction intervention? An aptitude-treatment interaction. *Journal of Educational Psychology*, 106, 499-514.
- Fuchs, L. S., Wang, A. Y., & Preacher, K. J. (2020). Addressing challenging mathematics standards with at-risk learners: A randomized controlled trial on the effects of fractions intervention at third Grade. *Exceptional Children*, 87(2), 163-182.
- Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge University Press.
- Güven Akdeniz, D., & Argün, Z. (2019). İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin uzunluk kavrayışlarına dair bir durum çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13(2), 807-836.
- Hacker, D., Kiuahara, S. A., & Levin, J. R. (2019). A metacognitive intervention for teaching fractions to students with or at-risk for learning disabilities in mathematics. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 51, 601-612.
- Hancock, R.D., & Algozzine, B. (2006). *Doing case study research*. Teachers College Press.
- Haser, Ç., & Ubuz, B. (2002). Kesirlerde kavramsal ve işlemsel performans. *Eğitim ve Bilim*, 27, 53-61.
- Hughes, E. (2019). Point of view video modeling to teach simplifying fractions to middle school students with mathematical learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 17, 41-57.
- Hunt, J. H., Silva, J., & Lambert, R. (2019). Empowering students with specific learning disabilities: Jim's concept of unit fraction. *Journal of Mathematical Behaviour*, 56(2), 100738.
- Hwang, J. (2016). *An examination of error patterns associated with middleschool students' solution pathways when solving fraction computation involving addition*. Unpublished Doctoral Dissertation, The Pennsylvania State University, Pennsylvania, PA.
- Hwang, J., Riccomini, P. J., Hwang, S. Y., & Morano, S. (2019). A systematic analysis of experimental studies targeting fractions for students with mathematics difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, 34(1), 47-61.
- Ikhwanudin, T., & Suryadi, D. (2018). How students with mathematics learning

- disabilities understands fraction: A case from the Indonesian inclusive school. *International Journal of Instruction*, 11(3), 309-326.
- Ikhwanudin, T., & Wahyudin, S. P. (2019). The error pattern of students with mathematics learning disabilities in the inclusive school on fractions learning. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 18(3), 75-95.
- Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116(1), 45-58.
- Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Erlbaum.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Information Age Publishing.
- Learning Disabilities Association (2005). *Types of learning disabilities*. <https://ldaamerica.org/disabilities/dyscalculia/?audience=Parents>
- Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifer (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lewis, K. E. (2014). Difference not deficit: Reconceptualizing mathematical learning disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396.
- Lewis, K. E. (2016). Understanding mathematical learning disabilities as developmental difference: A fine-grained analysis of one student's partitioning strategies for fractions. *Infancia y Aprendizaje*, 39(4), 812-857.
- Lewis, K. E., Thompson, G. M., & Tov, S. A. (2021). Screening for characteristics of dyscalculia: Identifying unconventional fraction understandings. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 14(3), 243-267.
- Losinski, M., Ennis, R. B., Shaw, A., & Gage, N. A. (2021). Supporting students within an MTSS framework using SRSD fractions: Results of a regression discontinuity design. *Learning Disabilities Research & Practice*, 36(3), 213-223.
- Mazzocco, M. M., Myers, G. F., Lewis, K. E., Hanich, L. B., & Murphy, M. M. (2013). Limited knowledge of fraction representations differentiates middle school students with mathematics learning disability (dyscalculia) versus low mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 115(2), 371-387.
- Milli Eğitim Bakanlığı (1973, Haziran). *Milli Eğitim Temel Kanunu*. <https://www.mevzuat.gov.tr/MevzuatMetin/1.5.1739.pdf>
- Milli Eğitim Bakanlığı (2021a). *Öğrenme güçlüğü olan bireyler için öğretim programı*. https://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2021_05/21130110_Ogrenme_Guclugu.pdf
- Milli Eğitim Bakanlığı (2021b). *Özel öğrenme güçlüğü olan bireyler: Aileler için rehber kitapçık*.

https://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2021_02/04102620_OYRENME_GUC_LUYU_OLAN_BYREYLER_TR.pdf

- Mills, J. (2016). Developing conceptual understanding of fractions with year five and six students. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, Paper presented at the Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) (39th, Adelaide, South Australia, 2016).
- Mumcu, H. Y. (2018). Matematiksel ilişkilendirme becerisinin kuramsal boyutta incelenmesi: Türev kavramı örneği. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 9(2), 211-248.
- Namkung, J., & Fuchs, L. (2019). Remediating difficulty with fractions for students with mathematics learning difficulties. *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal*, 24(2), 36-48.
- Namkung, J. M., Fuchs, L. S., & Koziol, N. (2018). Does initial learning about the meaning of fractions challenging for students with adequate whole-number skill? *Learning and Individual Differences*, 61, 151-157.
- National Center for Education Statistics (2017). *The condition of education 2017*. <https://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=2017144>.
- Nelson, G., Crawford, A., Hunt, J., Park, S., Leckie, E., Duarte, A., Brafford, T., Ramos-Duke, M. & Zarate, K. (2022). A systematic review of research syntheses on students with mathematics learning disabilities and difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, 37(1), 18-36.
- Newman, R. M. (1998). *Gifted & math learning disabled: The dyscalculia syndrome*. <https://www.dyscalculia.org/dyscalculia/dyscalculia-syndrome>
- Newton, K. J., Jansen, A., & Puleo, P. (2022). Elements of instruction that motivate students with learning disabilities to learn fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 24(4), 1-20.
- Özan, S., & Sarıca, A. D. (2021). Bireyselleştirilmiş eğitim programı: Sınıf ve rehberlik öğretmenlerinin deneyimleri. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Özel Eğitim Dergisi*, 22(1), 147-174.
- Patton, M. Q. (2005). *Qualitative research*. Wiley Online Library.
- Peltier, C., Sinclair, T. E., Pulos, J. M., & Suk, A. (2020). Effects of schema-based instruction on immediate, generalized, and combined structured word problems. *The Journal of Special Education*, 54(2), 101-112.
- Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 18-36.
- Professional Development Service for Teachers (2014). *Fractions's teachers handbook*. <https://pdst.ie/sites/default/files/Fractions%20Teacher%20Handbook%20FINAL.pdf>

- Satsangi, R. & Raines, A. R. (2022). Examining virtual manipulatives for teaching computations with fractions to children with mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, Advance online publication. <https://doi.org/10.1177/00222194221097710>
- Sharp, E., & Shih Dennis, M. (2017). Model drawing strategy for fraction word problem solving of fourth-grade students with learning disabilities. *Remedial and Special Education*, 38(3), 181-192.
- Shin, M., & Bryant, D. P. (2017). Fraction interventions for students struggling to learn mathematics: A research synthesis. *Remedial and Special Education*, 1-14.
- Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, naming and justifying fractions. *Teaching Children Mathematics*, 12, 394-400.
- Simon, M. A., Placa, N., Kara, M., & Avitzur, A. (2018). Empirically-based hypothetical learning trajectories for fraction concepts: Products of the Learning Through Activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, 52, 188-200.
- Sögüt, D. A., & Deniz, S. (2018). Sınıf öğretmenlerinin bireyselleştirilmiş eğitim programı (bep) hazırlamada karşılaştıkları güçlükler ve kaynaştırma uygulamalarına ilişkin görüşlerinin değerlendirilmesi. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(2), 423-443.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: intuitive rules*. Teachers College Press.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267- 306). Lawrence Erlbaum.
- Şahin, A., & Gürler, B. (2018). Destek eğitim odasında ve kaynaştırma ortamlarında çalışan öğretmenlerin bireyselleştirilmiş eğitim programı hazırlama sürecinde yaşadıkları güçlüklerin belirlenmesi. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 29, 594-625.
- Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). Reston.
- Toprak, Ö. F. (2018). *Bireyselleştirilmiş eğitim programı hazırlama sürecine ilişkin ekip üyelerinin deneyimleri: bir ortaokul örneği*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.
- Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, 37, 5-13.
- Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-416.

- Van De Walle, J. A., Karp-Karen, S., & Bay-Williams, J.M. (2009). *Elementary an middle school mathematics: teaching developmentally* (7th Ed). Pearson Education.
- Wang, A. Y., Fuchs, L. S., Fuchs, D., Gilbert, J. K., Krowka, S., & Abramson, R. (2019). Embedding self-regulation instruction within fractions intervention for third graders with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 52(4), 337-348.
- Widodo, S., & Ikhwanudin, T. (2019). Students with mathematics learning disabilities and their ways of thinking in fraction learning. In Misciagna S. (Eds.), *Learning Disabilities - Neurological Bases, Clinical Features and Strategies of Intervention*, 1-13.
- Wijaya, A. (2017). The relationships between Indonesian fourth graders' difficulties in fractions and the opportunity to learn fractions: A snapshot of TIMSS results. *International Journal of Instruction*, 10(4), 221-236.
- Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fractions. *International Journal of STEM Education*, 5(27), 1-11.
- Yazıcıoğlu, T. (2019). Rehberlik öğretmenlerinin bireyselleştirilmiş eğitim programı (bep) biriminin işleyişine ilişkin görüşleri. *Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(5) 225-234.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (8. baskı). Seçkin Yayınevi.
- Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods* (3rd Ed.). Sage.