



Periyodik yığılı kütleli kirişlerde eğilme dalgalarının yayılımı Propagation of flexural waves in beams with periodic lumped mass

Aydın Özmutlu^{1,*} 

¹ Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Çorlu Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 59860 Tekirdağ Türkiye

Öz

Bu çalışmada, periyodik yığılı kütleli Euler-Bernoulli kirişinde dispersiyon analizi yapılmakta ve periyodikliğin etkileri araştırılmaktadır. Önce sonsuz uzunlukta periyodik yığılı kütleli bir kiriş için yayılma matrisi yöntemi kullanılarak dispersiyon ilişkisi türetilmiş ve kütle oranına bağlı olarak oluşan bantlı frekans spektrumunu verilmiştir. Daha sonra sonlu sayıda periyodik yığılı kütle olması durumunda dalga yayılımına olan etki araştırılmış ve iletkenlik fonksiyonu elde edilmiştir. Son olarak bu yığılı kütlelerden oluşan bariyerin yer değiştirme mod şekilleri, geçme ve durma bantı frekans değerleri için elde edilmiştir. Sonuçlar, periyodik yığılı kütleler ile yapılacak tasarımların dalga bariyeri olarak kullanılmasının mümkün olduğunu göstermektedir.

Anahtar kelimeler: Eğilme dalgası, Periyodik yapı, Yığılı kütle, Bant boşluğu, Yayılma matrisi yöntemi

1 Giriş

Periyodik yapıların mühendislik alanında kullanılması ve teknolojik alanda sağladığı katkılar son yıllarda hızla artmaktadır. Bu yapıların en önemli özelliği frekans spektrumunda bantlı bir yapı ortaya çıkartarak dalga yayılımının belirli frekans aralıklarında oluşmasına izin vermeleridir. Bu özellik sonucunda "durma bantı" olarak isimlendirilen frekans aralıklarında dalga zayıflaması görülürken, bu aralıkların dışında kalan diğer frekanslarda ise iletim devam eder. Periyodik yapıların bu özelliği, mühendislik uygulamalarında çok geniş bir yelpazede kullanılması olanağını sağlar. Örneğin inşaat mühendisliği alanında binalarda ve yapılarda titreşim azaltımı, titreşim yalıtımı, titreşim filtreleme amacıyla periyodik yapı tasarımına gidilebilir.

Periyodik yapılar konusundaki ilk çalışmaların 19. yy. sonlarında Floquet [1], Rayleigh [2] tarafından yapılanlarla başladığı, Bloch [3], Brillouin [4] ile devam ettiği görülmektedir. Periyodik örgü yapıları, elektrik devreleri ve sürekli iletim hatları gibi problemlerin çözümleri üzerine 1960'lara kadar yoğunlaşmış ve gerekli teorik altyapı kurulmuştur. Özellikle yapı mühendisliği anlamında periyodik yapıların araştırılması konusundaki çalışmaların, 1950'li yılların ortasından sonra başladığı görülmektedir [5]. Periyodik yapılar üzerine çalışmalar sınıflandırıldığında iki kategoride; geometrik ve malzeme periyodikliği üzerine bunların toplandığı ortaya çıkmaktadır.

Abstract

In this study, dispersion analysis is carried out in the Euler-Bernoulli beam with periodic lumped mass, and periodicity effects are investigated. First, the dispersion relation is derived using the propagator matrix method for an infinitely long periodic beam with lumped mass. The banded frequency spectrum is given depending on the mass ratio. Then, in the case of a finite number of periodic lumped masses, the effect on wave propagation was investigated and the transmission function was obtained. Finally, the displacement mode shapes of the barrier consisting of these lumped masses were obtained for the pass and stop band frequency values. The results show that it is possible to use designs made with periodic lumped masses as wave barriers.

Keywords: Flexural wave, Periodic structure, Lumped mass, Bandgap, Propagator matrix method

Mikro ölçekteki kirişlerden [6], köprüler [7], geniş açıklıklı yapılar [8] ve binalar [9] gibi makroskobik yapılara kadar çeşitli mühendislik alanlarında karşılaşılabilecek periyodik yapılarda eğilme dalga yayılımı ve titreşimleri ortaya çıkar. Mekanik dalgaların veya titreşimlerin kontrol edilmesinde en önemli yapılar yerel rezonatörler [10] veya fononik kristallerdir [11]. Mekanik özellikleri arasında büyük kontrast bulunan iki veya daha fazla elastik malzemeden oluşan fononik kristaller olarak adlandırılan periyodik malzemelerde ortaya çıkan boşluklu frekans bantı spektrumu, bu yapılarda elastik dalga yayılımına olan ilginin yenilenmesine yol açmıştır. Uç uca bağlanmış özdeş elemanların oluşturduğu periyodik eğilme yapılarındaki bant boşlukları üzerine yapılan hem teorik hem de deneysel çalışmalar göstermiştir ki uygun periyodik tasarımlarla, frekans spektrumunda bantlı bir yapı oluşması sağlanarak akustik ve elastik dalgalar için bir filtre mekanizması oluşturulabilmekte ve titreşim azaltımı sağlanabilmektedir [12,13].

Periyodik yapılarda ortaya çıkan empedans uyumsuzlukları, yani geometrik veya malzeme süreksizlikleri yapının bir ucundan diğerine dalga yayılmasını azaltmaktadır [14]. Araştırmacılar tarafından, periyodik yapıların sağladığı faydalar sebebi ile dalga yayılımını incelemek, bu yapılarda bant boşluğu özelliklerini ortaya çıkarmak ve dispersiyon ilişkisinin hesaplanması için birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Periyodik yapılarda spektral bant yapısını analiz etmekte kullanılan en yaygın yöntemlerden bazıları şunlardır: sonlu elemanlar yöntemi

* Sorumlu yazar / Corresponding author, e-posta / e-mail: aozmutlu@nku.eu.tr (A. Özmutlu)

Geliş / Received: 09.05.2022 Kabul / Accepted: 04.07.2022 Yayımlanma / Published: 14.10.2022

doi: 10.28948/ngumuh.1114041

(FEM) [10,15], spektral elemanlar yöntemi (SEM) [16,17], taşıma matrisi yöntemi (TMM) [5-7,11,18-25], çoklu yansıma yöntemi (MRM) [22] ve yayılma matrisi yöntemi (PMM) [26].

Bantlı frekans spektrumu, uygun periyodik tasarımlarla hedeflenen frekans aralığında, yapıda mekanik titreşim yalıtımı yapılabilmesine imkan sağlar [24]. Kirişlerin mekanik titreşimleri üzerine literatürde pek çok çalışmaya rastlamak mümkün olup, konu hem doğrusal hem de yaddoğrusal problemler yönünden etraflıca incelenmiştir. Yukarıda verilen yöntemlere ek olarak adomian ayrıştırma yöntemi (ADM), varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM), homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM) yaddoğrusal kirişlerin titreşim analizinde tercih edilmektedir [27-29]. Torabi ve diğ. [30], iki yığılı kütleye sahip değişken kesitli bir kirişin, farklı mesnet koşulları altında serbest titreşim analizini VIM kullanarak yapmıştır. von Kármán tipi yadoğrusallığa sahip periyodik değişken kesitli bir Timoshenko kirişi tolerans modelleme yöntemi (TMT) kullanılarak analiz edilmiş ve yapısal titreşim kontrolüne ait sonuçlar verilmiştir [31].

Periyodik çubuklar, periyodik kirişler ve elastik zemine oturan periyodik kirişler gibi tek boyutlu periyodik yapılar, çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Lee ve diğ. [32], iki farklı malzemeden yapılmış malzeme periyodikliğine sahip sonsuz uzunluktaki bir Euler-Bernoulli (EB) kirişinde eğilme dalgalarının yayılımını araştırmışlardır. Başka bir çalışmada ise L_e ve K_e [33], geometrik periyodikliğine sahip sonsuz uzunluktaki bir EB kirişini incelemişlerdir. Periyodikliğin etkisi ile dalga dispersiyonu ve bantlı frekans spektrum yapısı gösterilmiştir. Belytschko ve Mindle [34], EB kirişinde dalga yayılımını FEM ile incelemiş olup, çalışmada kiriş elemanın kütlesi hem yığılı kütle hem de sürekli kütle şeklinde birlikte dikkate alınarak sonuçlar kesin çözümlerle karşılaştırılmıştır. Leamy [35], periyodik yapılarda dalga yayılımını incelemek için kesin dalga esaslı analiz yaklaşımını kullanmıştır. Belirsiz dalga yayılım katsayıları, süreksizliklerde yazılan koşullardan elde edilen yansıma ve geçiş matrisleri arasındaki ilişkiler yoluyla elde edilir. Rezonatörler gibi periyodik yapısal süreksizlikler bulunan bir kiriş boyunca yayılan dalgaların titreşim analizinde bu yöntem güçlü bir araç olarak kullanılır [36].

Son yıllarda deprem mühendisliği açısından dalga bariyeri olarak kullanılması ve deprem dalgalarının etkilerinin azaltılması için periyodik yapı araştırmalarına

yönelik çalışmalar hız kazanmıştır. Özellikle metamalzeme denilen malzemelerle oluşturulan periyodik yapılarla sismik dalgaların yıkıcı etkisi azaltılmaya veya kontrol edilmeye çalışılmaktadır [37,38]. Tarihi binalar, kullanım önemi yüksek yapılar (hastaneler, kamu binaları vb.) ve stratejik yapıların (enerji santralleri, kimyasal tesisler vb.) korunması için metamalzemelerle oluşturulmuş periyodik bariyerler, sismik dalgaları engellemek için inşaat mühendisliğinde kullanılır [39-43].

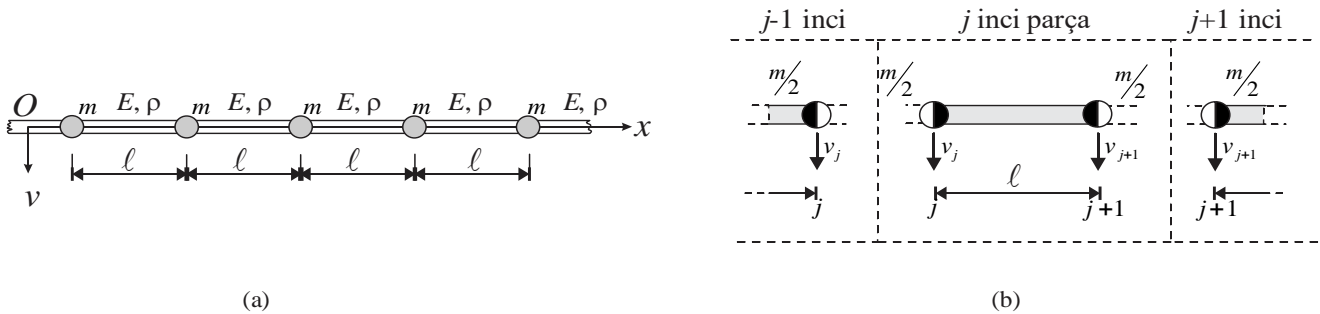
Bu araştırmada, metamalzeme olarak düşünülen periyodik yığılı kütleli Euler-Bernoulli kirişinin dinamik davranışını ortaya koymak ve kütlelerin dalga yayılımına olan etkisini göstermek amaçlanmaktadır. Önce kiriş parçası için alan yayılım matrisi doğrudan türetilmiş sonra yığılı kütleler için nokta yayılım matrisi elde edilmiştir ve bu matrisler kullanılarak birim hücre için genelleştirilmiş yayılım matrisine geçilmiştir. Kullanılan sınır koşulları ile bir özdeğer problemine indirgenerek, bulunan dalga sayıları ile kirişin bantlı frekans bantlı yapısı ortaya konmuştur. Son olarak sonsuz kirişte periyodik yığılı kütlelerin sonlu bir bölgedeki periyodik yığılı kütlelerin dalga yayılımına etkisi grafikler yardımı ile verilmiştir.

2 Materyal ve metod

Çalışmanın bu bölümünde Euler-Bernoulli kirişinin yönetici denklemi, kiriş parçasının için alan yayılım matrisi ve yığılı kütleler için nokta yayılım matrisi, birim hücre için genelleştirilmiş yayılım matrisi ve dispersiyon denklemi verilmiştir. Sonlu bölgedeki periyodik yığılı kütlelerin dalga yayılımına etkisi dalga katsayıları yöntemi ile incelenmiş, kütlelerin dalga bariyeri olarak iletkenlik cevabı elde edilmiştir.

2.1 Analitik model

Ekseni boyunca malzeme, geometri, sınır koşulu ve yığılı kütleler arasındaki açıklığı periyodik olan bir EB kirişi göz önüne alalım (Şekil 1). Periyodik kirişi oluşturan kiriş parçaları ve yığılı kütleler arasında tam bir yapışmanın olduğu varsayılmıştır. Kirişin yapıldığı malzeme homojen, izotrop ve lineer elastik kabul edilmiş olup küçük şekildeğiştirme teorisi göz önüne alınmakta ve düzlem kesitler eğilmeden sonra da düzlem kalmaktadır. Malzemede ρ kütle yoğunluğu, E elastisite modülü, ℓ periyodik açıklık, A en kesit alanı ve I eylemsizlik momentidir.



Şekil 1. Analitik Model: (a) Periyodik yığılı kütleli EB kirişi; (b) birim periyodik hücre

Euler-Bernoulli kiriş elemanı için hareket denklemi **Denklem (1)**'deki gibi elde edilmektedir [44].

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

Burada $v(x;t)$ düşey yerdeğiştirme, $T(x;t)$ kiriş eleman kesitindeki kesme kuvvetidir. EB kiriş elemanı için kinematik ilişkiden $\frac{\partial v}{\partial x} = \theta$, bünye bağıntısından

$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{M}{EI}$, moment dengesinden $\frac{\partial M}{\partial x} = T$ ilişkisi elde edilir. Burada $\theta(x;t)$ kesit dönmesi, $M(x;t)$ kiriş eleman kesitindeki eğilme momentidir.

2.2 Kiriş parçaları için alan yayılım matrisi

Kirişteki düşey yerdeğiştirme, dönme, eğilme momenti ve kesme kuvveti $v(x;t)$, $\theta(x;t)$, $M(x;t)$ ve $T(x;t)$ olmak üzere ortamın $e^{-i\omega t}$ yapısında, $\omega =$ açısal frekansı ile zamana bağlı harmonik bir hareket yaptığı göz önüne alınırsa, bu büyüklükler **Denklem (2)**'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} v(x;t) &= V(x)e^{-i\omega t} \\ \theta(x;t) &= \Theta(x)e^{-i\omega t} \\ M(x;t) &= \tilde{M}(x)e^{-i\omega t} \\ T(x;t) &= \tilde{T}(x)e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

Bu durumda, bu büyüklerin oluşturduğu durum vektörü $\mathbf{f}(x) = \{V, \Theta, \tilde{M}, \tilde{T}\}^T(x)$ şeklinde yazılır. Ayrıklaştırılmış büyüklüklerin yönetici denklemde, kinematik ilişkide, bünye bağıntısında ve moment denge denklemine yerine koyulursa, aşağıdaki 1. mertebeden diferansiyel bağıntılar matris formunda durum vektörü ile **Denklem (3)**'deki gibi ifade edilir.

$$\frac{d\mathbf{f}}{dx} = \mathbf{B}\mathbf{f}(x) \quad (3)$$

Burada \mathbf{B} sabit katsayılı bir matris olup ifadesi aşağıda **Denklem (4)**'de verilmiştir.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\rho A \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

\mathbf{B} matrisi, her bir kiriş parçası için x 'in sürekli bir fonksiyonuysa, herhangi bir kiriş parçasında $x = x_0$

noktasındaki belirli başlangıç koşulları için x noktasında **Denklem (3)**'ün tek bir çözümü vardır [26]. Şimdi, \mathbf{B} 'nin ayrık özdeğerlerinin var olduğunu ve bunlara karşılık gelen \mathbf{X} doğrusal bağımsız özvektörleri olduğunu kabul edelim. Bu durumda, **Denklem (3)**'ün köşegenleştirme yöntemi ile çözümü aşağıdaki gibi yapılır.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x) &= e^{\mathbf{B}(x-x_0)} \mathbf{f}(x_0) \\ &= \mathbf{X} e^{\mathbf{\Lambda}(x-x_0)} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{f}(x_0) \\ &= \mathbf{P}_f(x, x_0) \mathbf{f}(x_0) \end{aligned} \quad (5)$$

Burada $\mathbf{P}_f(x, x_0)$, kiriş parçası için "alan" yayılım matrisi olup, açık hali **Denklem (6)**'da verilmiştir.

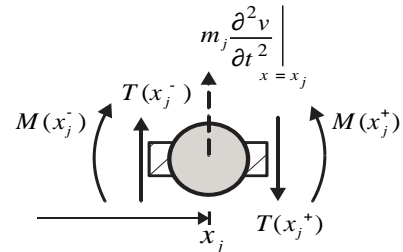
$$\begin{aligned} \mathbf{P}_f(x, x_0) &= \mathbf{X} e^{\mathbf{\Lambda}(x-x_0)} \mathbf{X}^{-1} \\ &= \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}_f \mathbf{X}^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Burada $\mathbf{\Lambda}_f$, **Denklem (7)**'de verilmiştir.

$$\mathbf{\Lambda}_f = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(x-x_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3(x-x_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4(x-x_0)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.3 Yığılı kütleler için nokta yayılım matrisi

Modelde kiriş parçaları arasında yığılı kütleler bulunmaktadır. Kiriş ve kütlelerin birbirine tam bağlı olduğu varsayımından hareketle yığılı kütleler için nokta yayılım matrisi elde edilecektir [45]. Herhangi bir j numaralı kiriş parçasında uç yerdeğiştirme vektörleri **Şekil 1b**'de görülmektedir. Herhangi bir j ve $j+1$ inci hücrelerin ortak sınırında, $x = x_j$ noktasındaki yığılı kütle ve buna etkileyen kesit zorları ile atalet kuvveti **Şekil 2**'de verilmiştir.



Şekil 2. j noktasındaki yığılı kütle için serbest cisim diyagramı

Bu noktada yazılacak hareket denklemi ve süreklilik koşulları üzerinden nokta yayılım matrisi türetilenektir. **Denklem (8)**'de dinamik denge denklemi verilmiştir.

$$\tilde{T}(x_j^+) = \tilde{T}(x_j^-) - \omega^2 m_j V(x_j^-) \quad (8)$$

Burada m_j , j noktasındaki yığılı küttedir. Sırası ile yerdeğiştirme, dönme ve moment süreklilik koşulları ise [Denklem \(9\)](#)'da verilmiştir.

$$\begin{aligned} V(x_j^+) &= V(x_j^-) = V(x_j) \\ \Theta(x_j^+) &= \Theta(x_j^-) = \Theta(x_j) \\ \tilde{M}(x_j^+) &= \tilde{M}(x_j^-) \end{aligned} \quad (9)$$

Yukarıda verilen dinamik denklem ve süreklilik bağıntıları ayrıklaştırma yapıp düzenlenirse, bu noktanın sağındaki ve solundaki durum vektörleri ile nokta yayılım matrisi arasındaki ilişki [Denklem \(10\)](#)'da olduğu gibi elde edilir.

$$\mathbf{f}(x_j^+) = \mathbf{P}_p(x_j)\mathbf{f}(x_j^-) \quad (10)$$

Burada geçen $\mathbf{P}_p(x_j)$ ifadesi "nokta" yayılım matrisi olup açık hali [Denklem \(11\)](#)'de verilmiştir.

$$\mathbf{P}_p(x_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 m_j & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

2.4 Birim hücre için genelleştirilmiş yayılım matrisi ve dispersiyon denklemi

Bir alan yayılım matrisi ve iki nokta yayılım matrisinden oluşan bir periyodik birim hücre için başlangıç noktasından bitiş noktası arasında durum vektörleri ilişkisi [Denklem \(10\)](#)'da verilmiştir.

$$\mathbf{f}(x_0 + \ell) = \mathbf{P}_c(\ell)\mathbf{f}(x_0) \quad (10)$$

Burada \mathbf{P}_c "hücre" yayılım matrisi olup açık ifadesi [Denklem \(11\)](#)'de verilmiştir.

$$\mathbf{P}_c(\ell) = \mathbf{P}_p(m/2)\mathbf{P}_f(\ell)\mathbf{P}_p(m/2) \quad (11)$$

Birim hücre kendisini ℓ aralıklı olarak tekrar eden bir periyodik yapı oluşturur. Bu n hücreli periyodik yapı boyunca durum vektörü [Denklem \(12\)](#)'deki gibi yazılır.

$$\mathbf{f}(x_0 + n\ell) = \mathbf{P}_c^n(\ell)\mathbf{f}(x_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

Ele alınan sonsuz uzun kirişin kararlı hal çözümü için geçerli, periyodik sınır koşulları [Denklem \(13\)](#)'de verilmiştir.

$$\mathbf{f}(x_0 + n\ell) = \mathbf{f}(x_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

Periyodiklik gereği zamana göre davranış harmonik ise Floquet-Bloch teoremi [4] kullanılarak [Denklem \(14\)](#)'deki gibi yazılır.

$$\mathbf{f}(x_0 + n\ell) = e^{ik_c n\ell} \mathbf{f}(x_0) \quad (14)$$

Burada k_c kiriş parçası ve oluşturduğu periyodik yapı için dalga sayısıdır. Tam periyodik yapılarda $\mathbf{P}_c^n(\ell)$ matrisi bütün hücrelerde aynıdır, dolayısı ile $n = 1$ alınır ve [Denklem \(12\)](#) ve [Denklem \(14\)](#) kullanılarak yayılım matrisinin özdeğer problemi [Denklem \(15\)](#)'deki gibi elde edilir.

$$\det(\mathbf{P}_c(\ell) - e^{ik_c \ell} \mathbf{I}) = 0 \quad (15)$$

Periyodik hücre için özdeğerler ve özvektörler [Denklem \(15\)](#) yardımı ile hesaplanabilir. Burada Λ_c periyodik hücre için özdeğerlerdir. Periyodik hücre için dispersiyon ilişkisini veren bu denklemin $\Lambda_{c,12} = e^{\pm ik_{c,1}\ell}$ ve $\Lambda_{c,34} = e^{\pm ik_{c,1}\ell}$ şeklinde dört tane ayrık kökü vardır. Özdeğerler ω frekansına bağlı olup, her frekans değerine karşılık periyodik hücrenin özdeğerleri hesaplanabilir. Hesaplanan özdeğerleri kullanılarak, k_c [Denklem \(16\)](#) yardımı ile bulunur.

$$k_{c,34} = \frac{1}{\ell} \arg(\Lambda_{c,34}) \quad (16)$$

Burada $\Lambda_{c,12}$, pozitif ve negatif yönde üstel olarak bozulan dalgalara karşılık gelir ve sönen dalgalar olarak bilinir. $\Lambda_{c,34}$ ise pozitif ve negatif yönde ilerleyen harmonik dalgalara karşılık gelir ve bu dalgalar bozulma olmadan yayılırlar. Bulunan k_c değerleri incelendiğine belli frekans aralığında k_c 'nin sürekli değerler aldığı görülür. k_c 'nin bu değerleri izinli dalga sayısı olarak adlandırılır. Dalga sayısı spektrumundaki bantlar, farklı kütlelerden saçılan dalgaların girişiminin sonucudur. İzinli k_c değerleri, kendini $2\pi/\ell$ periyodu ile tekrarlar ve dalga sayısı uzayında Brillouin bölgeleri diye isimlendirilen bir örgü oluşturur. Faz ve grup hızları sırası ile, $c_c^{ph} = \omega/k_c$ ve $c_c^{gr} = d\omega/dk_c$ bağıntıları ile hesaplanabilir.

2.5 Sonlu periyodik bölgede dalga hareketi

Bu bölümde, bir boyutlu (1B) sonlu bir bölgede periyodik yığılı kütlelerin bulunması haline bunların bariyer etkisinin araştırılmasına, iletim fonksiyonun elde edilmesine dair ve dalga hareketi ile ilişkili yer değiştirme mod şekillerinin nasıl hesaplanacağı ile ilgili bir formülasyon sunulmaktadır. Bunun için önce, böyle bir ortamda dalga hareketini tanımlamak için gerekli ifadeler elde edilmiştir.

2.5.1 Durum vektörü dalga katsayıları ilişkisi

Homojen, izotrop ve doğrusal elastik bir kirişte $\mathbf{f}(x)$ durum vektörü ve \mathbf{a} dalga katsayıları arasındaki ilişki kurulmak istensin [46]. Bu durumda yerdeğiştirme ifadesi aşağıda Denklem (17)'de verilmiştir.

$$v(x,t) = (A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx} A_+^N e^{kx} + A_-^N e^{-kx}) e^{-i\omega t} \quad (17)$$

A_+ ve A_- kompleks dalga katsayıları olup, $A_+ e^{ikx-i\omega t}$ ve $A_- e^{-ikx-i\omega t}$ sırası ile pozitif ve negatif x -doğrultularında yayılan harmonik dalgalardır. A_+^N ve A_-^N yakın alan terimleri olup, üstel olarak sönen dalgalardır. Burada k dalga sayısı olup Denklem (18)'de verilmiştir.

$$k = \sqrt[4]{\omega^2 r_g c_L} \quad (18)$$

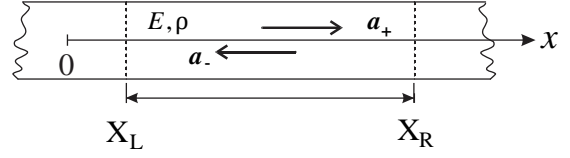
Burada $r_g = \sqrt{I/A}$ kiriş parçası için eylemsizlik yarıçapı ve $c_L = \sqrt{E/\rho}$ kiriş parçasındaki boyuna dalga hızıdır. Dalga katsayıları bilindiğinde kirişin herhangi bir noktasındaki yer değiştirmesi bulunabilir, bununla birlikte yukarıda tanımlanan kinematik bağıntı, bünye bağıntısı ve denge ilişkisinden sırası ile kirişin eğimi, eğilme momenti ve kesme kuvveti hesaplanabilir. Herhangi bir kiriş parçasında kararlı hal çözümü için geçerli durum vektörü matris formunda Denklem (19)'daki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}(x) \mathbf{a} \quad (19)$$

Burada geçen ifadelerin açık hali Denklem (20)'de verilmiştir.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik & k & -ik & -k \\ EIk^2 & -EIk^2 & EIk^2 & -EIk^2 \\ iEIk^3 & -EIk^3 & -iEIk^3 & EIk^3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Lambda}(x) = \begin{bmatrix} e^{ikx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{kx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ikx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-kx} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} A_+ \\ A_+^N \\ A_- \\ A_-^N \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Şimdi aynı kiriş parçasında $x = X_L$ ve $x = X_R$ gibi iki noktada tanımlı durum vektörleri ve dalga katsayıları arasındaki ilişkiyi kuralım (Bk. Şekil 3).



Şekil 3. Tanımlı sınırlar arasında dalga yayılımı

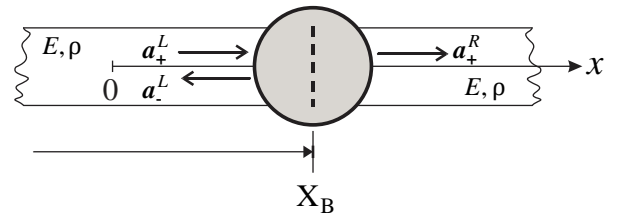
$x = X_L$ noktasındaki $\mathbf{f}(X_L)$ durum vektörünün bilindiğini kabul edelim. O zaman Denklem (19) uyarınca $\mathbf{f}(X_L) = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}(X_L) \mathbf{a}$ şeklinde yazılabilir. $x = X_R$ noktasındaki $\mathbf{f}(X_R)$ durum vektörü Denklem (21)'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(X_R) &= \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}(X_R) \mathbf{a} \\ &= \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}(X_R - X_L) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{f}(X_L) \\ &= \mathbf{P}_f(X_R - X_L) \mathbf{f}(X_L) \end{aligned} \quad (21)$$

Burada $\mathbf{P}_f(X_R - X_L)$, aynı ortamda $x = X_L$ noktasındaki durum vektörünü soldan sağa taşıyan matristir.

2.5.2 Sınırdan yansımaya ve geçiş

Şimdi m yığılı kütlelerinin olduğu $x = X_B$ gibi bir sınırdaki durumu inceleyelim. Bu noktanın sağındaki ve solundaki ortamın özelliklerinin aynı olduğunu ve soldaki ortamdan gelip sınırı geçen dalganın sağdaki ortamdan geri yansımadağını (yutucu sınır) varsayalım (Bk. Şekil 4).



Şekil 4. Sınırdan geçen ve yansıyan dalgalar

Sırası ile soldaki $x < X_B^-$ ve sağdaki $x > X_B^+$ ortamlarındaki yerdeğiştirmeleri Denklem (22)'de tanımlayalım.

$$\begin{aligned} V^L(x) &= A_+ e^{ikx} + A_+^N e^{kx} + A_- e^{-ikx} + A_-^N e^{-kx} \\ V^R(x) &= B_+ e^{ikx} + B_- e^{-kx} \end{aligned} \quad (22)$$

Geçiş ve yansımaya katsayılarını bulmak için dinamik ve geometrik sınır koşulları yazılacaktır. Sınırın sonsuz küçük

solunda $x = X_B^-$ noktası için durum vektörü $\mathbf{f}(X_B^-) = \mathbf{X} \Lambda(X_B^-) \mathbf{a}^L$ ve sonsuz küçük sağında $x = X_B^+$ için durum vektörü $\mathbf{f}(X_B^+) = \mathbf{X} \Lambda(X_B^+) \mathbf{a}^R$ şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{a}^L = \{A_+, A_+, A_-, A_-\}^T$ ve $\mathbf{a}^R = \{B_+, 0, 0, B_-\}^T$ sırası ile sınırın solundaki ve sağındaki ortama ait dalga katsayıları vektörleridir. Yukarıda Denklem (8) ve (9) ile verilen sınır koşulları kullanılırsa dalga katsayısı vektörleri arasında Denklem (23)'de verilen bağıntı elde edilir.

$$\mathbf{a}^R = \bar{\mathbf{P}}(X_B) \mathbf{a}^L \quad (23)$$

Burada geçen $\bar{\mathbf{P}}(X_B)$ sınırdan soldan sağa doğru dalga katsayısı vektörlerini taşıyan matrisi olup açık hali Denklem (24)'de verilmiştir.

$$\bar{\mathbf{P}}(X_B) = [\Lambda(X_B^+)]^{-1} [\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{P}_p(X_B) [\mathbf{X}] [\Lambda(X_B^-)] \quad (24)$$

Bu denklem yutucu sınır koşullarından bağımsız olarak herhangi bir sınırdan geçerlidir.

2.5.3 Periyodik yığılı kütlelerin bariyer etkisi

Bu aşamada η_{mass} adet sonlu sayıda yığılı kütlelerin bulunduğu geometrik ve malzeme özellikleri bakımından periyodik bir kiriş göz önüne alalım (Bk. Şekil 5). Sonlu bölge (bariyer) boyunca $H_{bar}(\omega)$ iletkenlik fonksiyonunu bulalım. Bariyerin uzunluğu L_{bar} , kütle sayısına bağlı olarak Denklem (25)'deki gibi bulunur.

$$L_{bar} = X_R^+ - X_L^- = (\eta_{mass} - 1)\ell \quad (25)$$

Burada, X_L^- : 1 inci kütlelerin sonsuz küçük solundaki noktanın x koordinatı ve X_R^+ : sonuncu kütlelerin sonsuz küçük sağındaki noktanın x koordinatıdır.

Bariyerdeki 1 inci kütlelerin solunda kalan kirişte dalga katsayısı vektörü $\mathbf{a}^L = \{A_+, A_+, A_-, A_-\}^T$ ise sonuncu kütlelerin sağında kalan kirişte dalga katsayısı vektörü $\mathbf{a}^R = \{B_+, B_+, B_-, B_-\}^T$ olur. B_- terimi radyasyon koşulu gereği sıfırdır. Ayrıca sınır koşulları gereği $\lim_{x \rightarrow \infty} V^L = 0 \rightarrow A_-^N = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} V^R = 0 \rightarrow B_+^N = 0$

sağlatılmalıdır. $x = X_L^-$ noktasında durum vektörü Denklem (26)'deki gibi yazılır.

$$\mathbf{f}(X_L^-) = \mathbf{X} \Lambda(X_L^-) \mathbf{a}^L \quad (26)$$

$x = X_R^+$ noktasında ise durum vektörü Denklem (27)'deki gibi yazılır.

$$\mathbf{f}(X_R^+) = \mathbf{X} \Lambda(X_R^+) \mathbf{a}^R \quad (27)$$

$\mathbf{f}(X_L^-)$ ve $\mathbf{f}(X_R^+)$ durum vektörleri arasındaki bağıntı yayılım matrisleri yardımı ile Denklem (28)'deki gibi kurulur.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(X_R^+) &= \mathbf{f}(X_L^- + (\eta_{mass} - 1)\ell) \\ &= \mathbf{P}_p(m/2) [\mathbf{P}_c(\ell)]^{(\eta_{mass} - 1)} \mathbf{P}_p(m/2) \mathbf{f}(X_L^-) \\ &= \mathbf{P}_{bar} \mathbf{f}(X_L^-) \end{aligned} \quad (28)$$

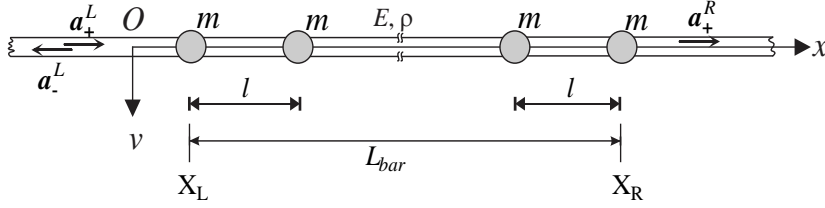
Burada \mathbf{P}_{bar} bariyer yayılım matrisi olup, bariyer boyunca durum vektörünün taşıdığı bilgiyi içerir. Bariyer öncesi ve sonrası dalga vektörleri arasındaki ilişki Denklem (29)'daki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^R &= [\Lambda(X_R^+)]^{-1} [\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{f}(X_R^+) \\ &= [\Lambda(X_R^+)]^{-1} [\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{P}_{bar} \mathbf{X} \Lambda(X_L^-) \mathbf{a}^L \\ &= \mathbf{T}_{bar} \mathbf{a}^L \end{aligned} \quad (29)$$

Burada \mathbf{T}_{bar} soldan sağa doğru dalga katsayısı vektörlerinin iletim matrisidir. Problem bu hali ile dört bilinmeyenli dört denkleme indirgenmiştir. Eğer $A_+ = 1$ seçilirse diğer bilinmeyen dalga katsayıları bu denklem takımı çözülerek belirlenir.

Çözüm sonucunda bariyerden geçen ve yansıyan dalgalar için katsayılar Denklem (30)'daki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} A_+^N &= -\frac{T_{bar}(2,3) \cdot T_{bar}(3,1) - T_{bar}(2,1) \cdot T_{bar}(3,3)}{T_{bar}(2,3) \cdot T_{bar}(3,2) - T_{bar}(2,2) \cdot T_{bar}(3,3)} \\ A_- &= -\frac{T_{bar}(2,1) \cdot T_{bar}(3,2) - T_{bar}(2,2) \cdot T_{bar}(3,1)}{T_{bar}(2,3) \cdot T_{bar}(3,2) - T_{bar}(2,2) \cdot T_{bar}(3,3)} \\ B_+ &= T_{bar}(1,1) + T_{bar}(1,2)A_+^N + T_{bar}(1,3)A_- \\ B_-^N &= T_{bar}(4,1) + T_{bar}(4,2)A_+^N + T_{bar}(4,3)A_- \end{aligned} \quad (30)$$



Şekil 5. Sonlu bölgede periyodik yığılı kütle bariyeri

Ek olarak bu katsayıların kullanılması ile bariyere gelen ve bariyeri geçen dalga arasında genlik ve faz ilişkisini veren iletkenlik fonksiyonu [Denklem \(31\)](#)'de verilmiştir.

$$H_{bar}(\omega) = \frac{V^{out}}{V^{in}} = \frac{A_{\pm}}{B_{\pm}} e^{ik(X_R - X_L)} \quad (31)$$

Burada V^{in} ve V^{out} sırasıyla bariyer öncesi ve sonrası kırışteki giriş ve çıkış yerdeğiştirme değerleridir. [Denklem \(31\)](#) kullanılarak sonsuz periyodik bir yapının frekans bantlılık derecesi ile sonlu bölgede periyodik yapının kıyaslanabilir.

2.5.4 Yerdeğiştirme mod şekilleri

Şimdi bariyer boyunca yerdeğiştirme mod şeklini elde edelim. Bariyer içindeki yapıların dalga katsayı fonksiyonları, $x = X_L$ gibi bir sınır noktasının solundaki ve sağındaki katsayılar arasındaki ilişkiye dayalı olarak özyinelemeli olarak hesaplanabilir. Bariyer içindeki ilk birim hücrede katsayı fonksiyonu [Denklem \(32\)](#)'deki gibi elde edilir.

$$\mathbf{a}^{(1)} = \left[\Lambda(X_L^+) \right]^{-1} \left[\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{P}_p \Big|_{X_L} \left[\mathbf{X} \right] \left[\Lambda(X_L^-) \right] \mathbf{a}^L \quad (32)$$

Yine ilk birim hücrede yerdeğiştirme fonksiyonu [Denklem \(33\)](#)'deki gibi elde edilir.

$$V^{(1)}(x) = \mathbf{a}^{(1)}_{(1,1)} e^{ikx} + \mathbf{a}^{(1)}_{(1,2)} e^{kx} + \mathbf{a}^{(1)}_{(1,3)} e^{-ikx} + \mathbf{a}^{(1)}_{(1,4)} e^{-kx}, \quad X_L^+ < x < X_L^- + \ell \quad (33)$$

Bu hesaplama şekli ($\eta_{mass} - 1$) sayıdaki birim hücre için tekrar edilerek bariyer boyunca yerdeğiştirme mod şeklinin değişimi belirlenmiş olur. Sırasıyla bariyerin solunda ve sağında kalan kırışte yerdeğiştirmeler [Denklem \(34\)](#)'deki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} V^L(x) &= A_+ e^{ikx} + A_+^N e^{kx} + A_- e^{-ikx}, \quad x < X_L^- \\ V^R(x) &= B_+ e^{ikx} + B_-^N e^{-kx}, \quad x > X_R^+ \end{aligned} \quad (34)$$

3 Bulgular ve tartışma

Bu bölümde, örnek bir durum olarak seçilmiş bir birim hücre tasarımına sahip periyodik yığılı kütleli bir kırışın davranışı ele alınmaktadır. Birim hücre, [Şekil 1b](#)'de gösterildiği gibi iki yığılı kütle ve bir kırış parçasından oluşmaktadır. Kırış parçasının uzunluğu $\ell = 1$ m ve malzeme özellikleri $\rho = 2500$ kg/m³, $E = 32$ GPa ve Poisson oranı $\nu = 0.2$ olarak seçilmiştir. Birim hücre için toplam kütle $m_c = m + m_{EB}$ dir. Burada $m =$ yığılı kütle ve $m_{EB} = \rho AL =$ yalnız kırış parçasının kütlesidir. Yığılı kütlelerin toplam kütleyle oranı $\alpha = m / m_c$ bağılı olarak kütlelerin dispersiyona olan etkisi araştırılmıştır.

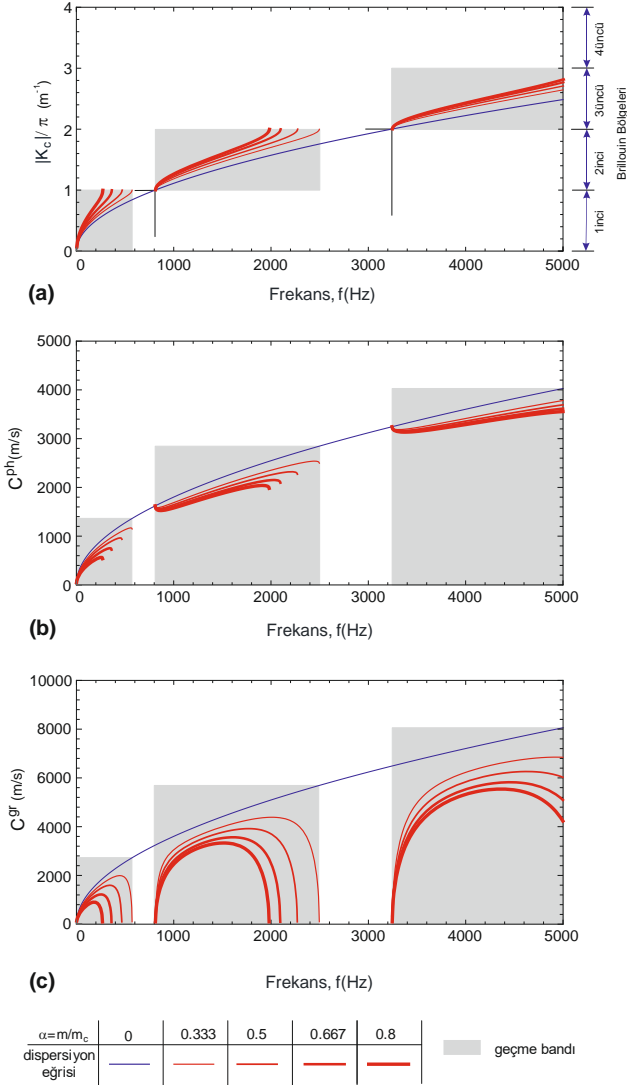
3.1 Sonsuz periyodik kırışın frekans spektrumu

Yalnız EB kırışında eğilme dalgalarının yayılımı dispersif olup bu ilişki [Şekil 6a](#)'da görülmektedir. Sonsuz periyodik yığılı kütleli kırışte yayılan eğilme dalgası, α kütle oranına bağılı olarak bant boşluklu bir dispersiyon ilişkisini göstermektedir ([Şekil 6a](#)). Dalga sayısının $k_c = \pi$ değeri, 1. Brillouin Bölgesi olarak bilinen sınıra karşılık gelir. Yığılı kütlelerin etkisi ile dalga sayılarının belli frekanslar için değer aldığı görülmektedir. Dalga sayılarının değer aldığı frekanslarda dalga yayılımı gerçekleşir (geçme bandı), diğer frekanslarda dalga yayılımı gerçekleşmez (durma bandı). Frekans spektrumunun bantlı yapısı, dalga saçılımı ve dispersiyonuyla oluşan dalga girişim mekanizmalarının bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

Eğilme dalgasının faz hızındaki değişimi, [Şekil 6b](#)'de verilmiştir. Seçilen malzeme özellikleri için boyuna dalga hızı $c_L = 3577.71$ m/s dir. Yığılı kütlelerin faz hızına etkisi, frekans ve kütle oranına bağılı olarak değişmekte ve yalnızca geçme bantlarındaki frekanslar için yayılım gerçekleşmektedir. Kütle oranı ($\alpha > 0$) için dalgalar, yalnız bir kırışe göre daha düşük hızlarda yayılır. Kütle oranı arttıkça geçme bantlarının nispeten daraldığı, kütlelerin bir mekanik filtre işlevi gördüğü ve faz hızlarının da azaldığı anlaşılmaktadır.

Eğilme dalgasının grup hızındaki değişimi, [Şekil 6c](#)'de verilmiştir. Yığılı kütlelerin α oranına bağılı olarak grup hızına etkisinin, frekansa göre değişimi benzer şekilde yayılımın geçme bantlarındaki frekans değerlerinde gerçekleşmektedir. Kütle oranı ($\alpha > 0$) için grup hızları

geçme bantlarının başlangıç ve bitişinde sıfırdır. Yalnız bir kırışte grup hızının, faz hızının 2 katı olduğu görülmektedir. Kütle oranının grup hızının değişimine olan etkisinin faz hızına göre daha fazla olduğu görülmektedir.

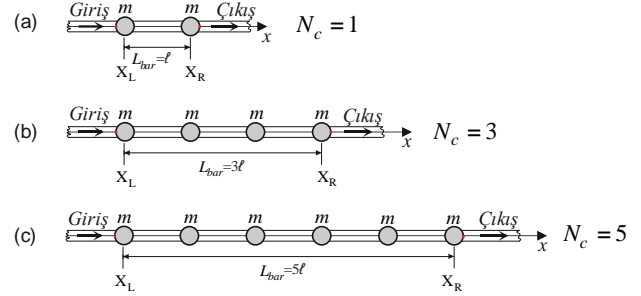


Şekil 6. Bir boyutlu periyodik yapıda, (a) dispersiyon ilişkisinin, (b) faz hızlarının ve (c) grup hızlarının kütle oranına bağlı değişimi

3.2 Sonlu periyodik kırışın iletkenlik cevabı

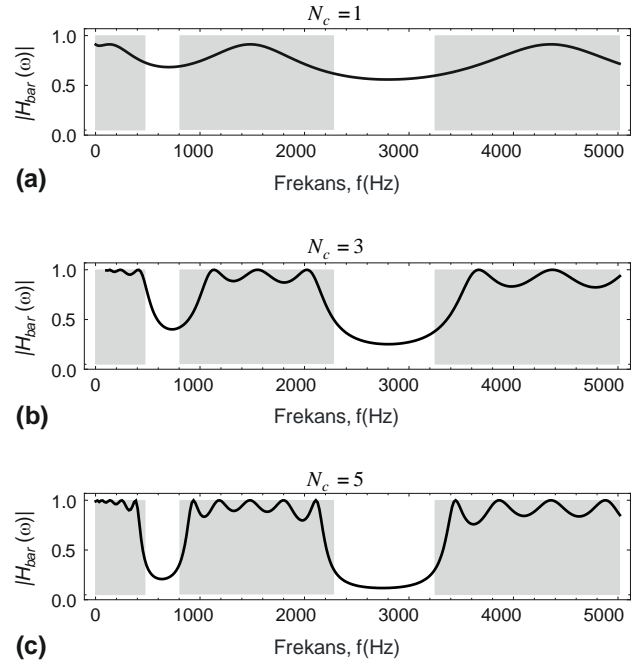
Sonsuz uzunluktaki bir kırışta sonlu bir bölgedeki periyodikliğin etkisi Şekil 7’de gösterildiği gibi, her biri sırasıyla $N_c = 1, 3, 5$ adet birim hücreden oluşan üç farklı bariyer üzerinden incelenecektir. Denklem (31) ile verilen $H_{bar}(\omega)$ iletkenlik fonksiyonu, ele alınan her bir bariyer tipi $\alpha = 1$ kütle oranı için $f \in (0, 5000 \text{ Hz})$ frekans aralığında incelenmiş ve sonuçları Şekil 8’de sunulmuştur. Bu denklem kullanılarak, sonsuz periyodik bir yapının frekans bantlılık cevabı ile birkaç hücreden oluşan sonlu bir bölgedeki periyodik yapı için elde edilen iletim cevabı kıyaslanmak istenmiştir.

Frekans cevabı açısından 1 veya 3 adet birim hücreden oluşan bariyerler için elde edilen bulguların sonsuz periyodik yapıya ait cevaba çok iyi uymadığı açıkça görülmektedir (Şekil 8a Şekil 8b).



Şekil 7. Sonlu bölgede (a) 1, (b) 2 ve (c) 5 hücreli bariyer tasarımı

Bununla birlikte, sadece 5 adet birim hücre ile oluşturulan bariyerin, iletkenlik cevabı, sonsuz ortama karşılık gelen yanıt ile oldukça uyumludur (Şekil 8c). Geçiş bantı frekanslarında iletim değeri yüksekken, durma bantı frekanslarında ise iletim değerleri düşüktür. Bu bulgu, ortaya çıkan Bragg saçılma mekanizmasının sonlu bir periyodiklik derecesinde bile frekans bantlı yapının oluşmasında ne kadar etkili olduğu görülmektedir.



Şekil 8. Sonlu bölgede $H_{bar}(\omega)$ iletkenlik fonksiyonunun kütle oranı $\alpha = 1$ değeri için (a) 1, (b) 3 ve (c) 5 birim hücreli bariyere göre değişimi

3.3 Sonlu periyodik kırışta yerdeğıştirmeler

Bu bölümde sonlu bir bölgede $N_c = 5$ hücreden oluşan bir bariyerde, periyodik yığılı kütlelerin yer değıştirme üzerine etkisi frekansa bağlı olarak incelenmiştir. Yığılı kütle oranı sırası ile $\alpha = 0.333, 0.5, 0.667, 0.8$ alınarak bu

oranlar için x -ekseni boyunca yer değiştirmelerin değişimi verilmiştir. Bariyer öncesinde birim genliğe sahip bir dalga alınmış ve soldan sağa doğru ilerleyen bu dalganın, bariyer de dahil $5L_{bar}$ uzunluğunda bir bölge boyunca, neden olduğu $V(x)$ 'in değişimi incelenmiştir. Bariyerin önünde, $V(x)$ 'in değişimi, gelen ve yansıyan dalganın girişim modelini göstermektedir. Bariyerin arkasında, sağa doğru yayılan tek bir dalga olduğu ve malzeme sönümü olmadığı için yerdeğiştirme genliği sabittir.

1'inci hal olarak $\alpha = 0.333$ "hafif" kütle oranı için bariyeri geçen dalganın yerdeğiştirme genliği, geçme ve durma bantları için araştırılmıştır. İlk iki geçme bandı frekans aralığı $f_{p1} \in (0, 572 \text{ Hz})$ ve $f_{p2} \in (810, 2498 \text{ Hz})$ 1'inci ve 2'nci durma bandı frekans aralığı $f_{s1} \in (573, 809 \text{ Hz})$ ve $f_{s2} \in (2499, 3242 \text{ Hz})$ dir. Geçme ve durma bandı içinde seçilen bir frekans değeri için bariyeri geçen dalganın genliğine bakılmıştır (Şekil 9). Her iki geçme bandı frekansları için gelen dalga neredeyse olduğu gibi iletilmiştir. Hatta 2'nci geçme bandı frekansları için bariyerin içinde genlikler artmıştır (Şekil 9a, Şekil 9c). 1'inci durma bandı frekansları için bariyeri geçince yerdeğiştirme genliği 0.4, 2'nci durma bandı frekansları için genlik 0.2 değerine düşmüştür (Şekil 9b, Şekil 9d). Durma bandında seçilen frekans değerleri için genlikler bariyeri geçince hızla düşmektedir.

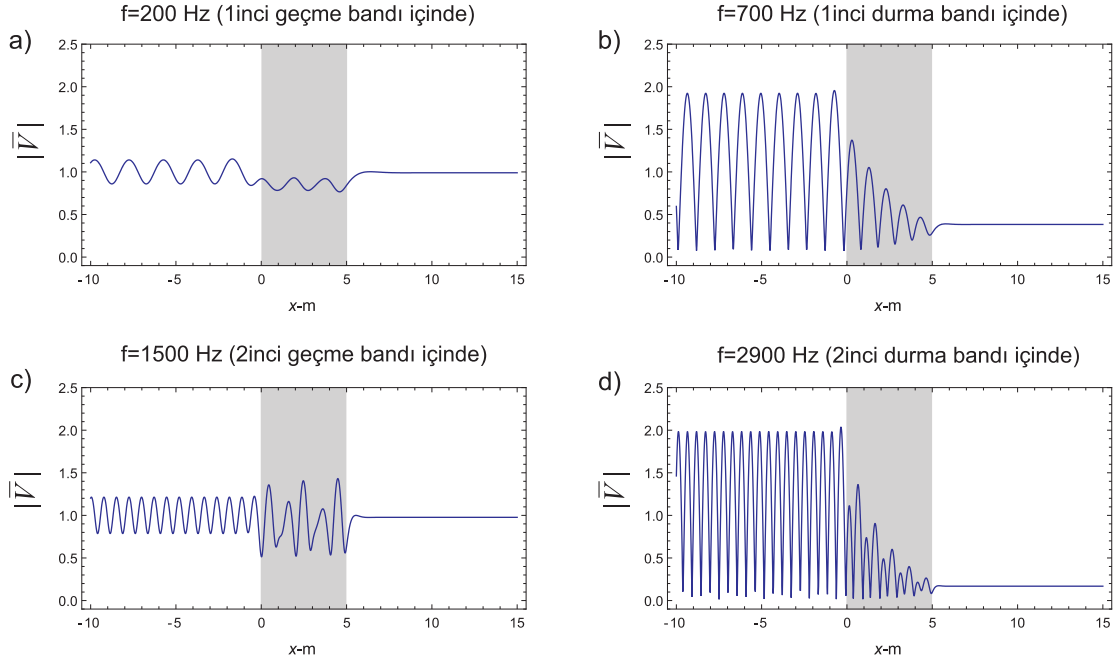
2'nci hal olarak $\alpha = 0.5$ "orta" kütle oranı için bariyeri geçen dalganın yerdeğiştirme genliği, geçme ve durma bantları için araştırılmıştır. İlk iki geçme bandı frekans aralığı $f_{p1} \in (0, 467 \text{ Hz})$ ve $f_{p2} \in (810, 2271 \text{ Hz})$, 1'inci ve 2'nci durma bandı frekans aralığı $f_{s1} \in (468, 809 \text{ Hz})$ ve

$f_{s2} \in (2272, 3242 \text{ Hz})$ dir. Her iki geçme bandı içinde seçilen frekans değerleri için bariyeri geçen dalganın genliğine bakıldığında gelen dalganın neredeyse olduğu gibi iletildiği görülmektedir. Hatta 2'nci geçme bandı frekansları için bariyerin içinde genlikler artmıştır (Şekil 10a, Şekil 10c). 1'inci durma bandı frekansları için yerdeğiştirme genliği bariyeri geçince 0.2, 2'nci durma bandı frekansları için genlik 0.1 değerine düşmüştür (Şekil 10b, Şekil 10d). Durma bandında seçilen frekans değerleri için genlikler bariyeri içinde üstel olarak düşmektedir. Yığılı kütle oranının artması genlikleri bağıl olarak daha da düşürmüştür.

3'üncü hal olarak $\alpha = 0.667$ "yüksek" kütle oranı için bariyeri geçen dalganın yerdeğiştirme genliği, geçme ve durma bantları için araştırılmıştır. İlk iki geçme bandı frekans aralığı $f_{p1} \in (0, 361 \text{ Hz})$ ve $f_{p2} \in (810, 2096 \text{ Hz})$ 1'inci ve 2'nci durma bandı frekans aralığı $f_{s1} \in (362, 809 \text{ Hz})$ ve $f_{s2} \in (2097, 3242 \text{ Hz})$ dir. Her iki geçme bandı içinde seçilen frekans değerleri için bariyeri geçen dalganın genliğine bakıldığında bir miktar azalma görülmektedir. Yer değiştirmesi genliği bariyeri geçince 0.75 değerine düşmüştür (Şekil 11a, Şekil 11c). Her iki durma bandında seçilen frekans değerleri için genlikler bariyeri içinde üstel olarak hızla azalmakta, 1'inci durma bandı frekansları için yerdeğiştirme genliği bariyeri geçince 0.1, 2'nci durma bandı frekansları için genlik 0.05 değerine düşmektedir (Şekil 11b, Şekil 11d).

4'üncü ve son hal olarak $\alpha = 0.8$ "çok yüksek" kütle oranı için bariyeri geçen dalganın yerdeğiştirme genliği, geçme ve durma bantları için araştırılmıştır. İlk iki geçme bandı frekans aralığı sırası ile $f_{p1} \in (0, 268 \text{ Hz})$ ve $f_{p2} \in (810, 1981 \text{ Hz})$ dir. 1'inci ve 2'nci durma bandı

1'inci hal: $N_c = 5$, $\alpha = m / m_c = 0.333$

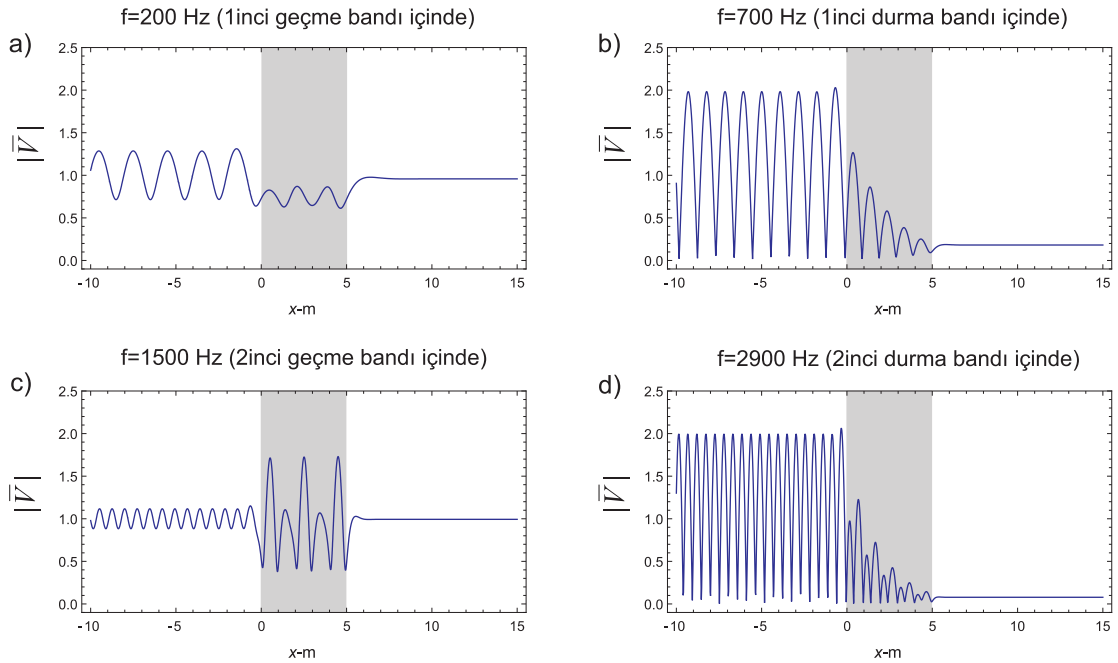


Şekil 9. 1'inci hal için sonlu bölgede bariyer etkisiyle yerdeğiştirme genliklerinin değişimi

frekans aralığı ise sırası ile $f_{s1} \in (269, 809 \text{ Hz})$ ve $f_{s2} \in (1982, 3242 \text{ Hz})$ dir. Her iki geçme bandı içinde seçilen frekans değerleri için bariyeri geçen dalganın

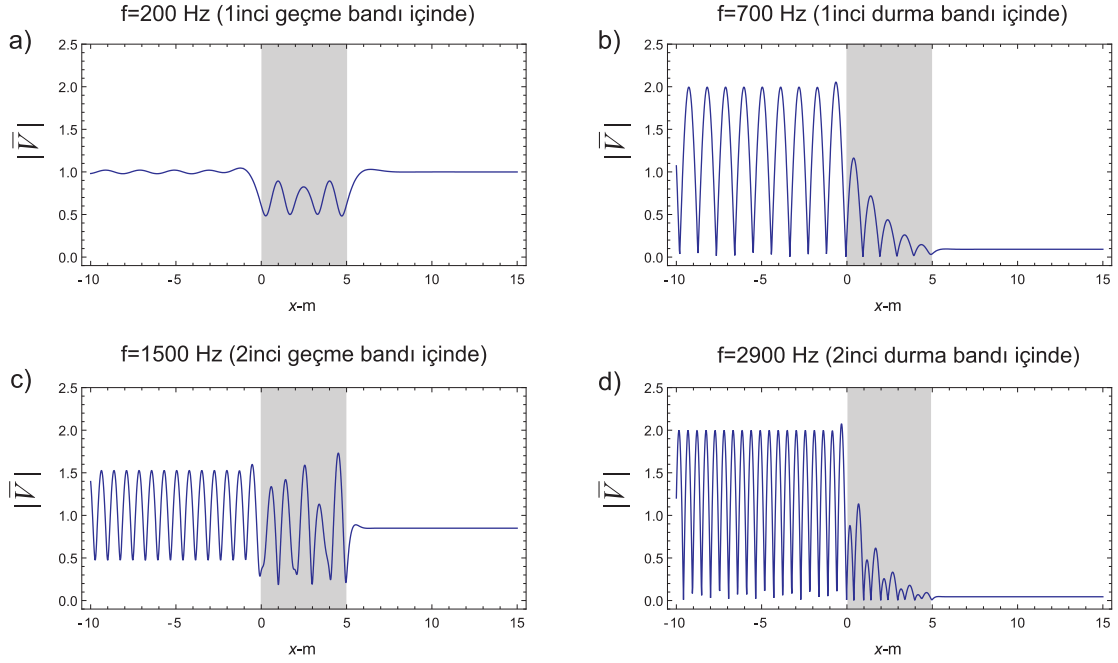
genliğine bakıldığında 0.75 değerine indiği görülmektedir (Şekil 12a, Şekil 12c). Her iki durma bandında seçilen frekans değerleri için genlikler bariyeri içinde üstel olarak hızla azalmakta, neredeyse sıfır değerine yaklaşmaktadır (Şekil 12b, Şekil 12d).

2'inci hal: $N_c = 5$, $\alpha = m / m_c = 0.5$



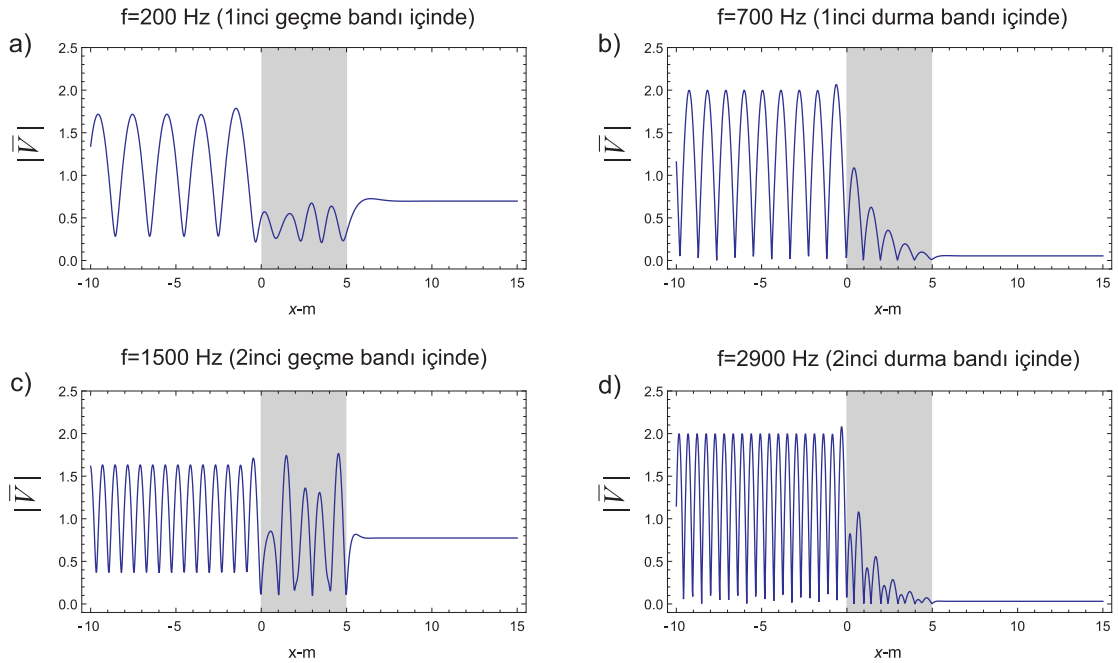
Şekil 10. 2'inci hal için sonlu bölgede bariyer etkisiyle yerdeğiştirme genliklerinin değişimi

3'üncü hal: $N_c = 5$, $\alpha = m / m_c = 0.667$



Şekil 11. 3'üncü hal için sonlu bölgede bariyer etkisiyle yerdeğiştirme genliklerinin değişimi

4'üncü hal: $N_c = 5$, $\alpha = m / m_c = 0.8$



Şekil 12. 4'üncü hal için sonlu bölgede bariyer etkisiyle yerdeğiştirme genliklerinin değişimi

4 Sonuçlar

Bu çalışmada sonsuz uzunluklu periyodik yığılı kütleli, bir EB girişinde meydana gelen dispersiyon olayı ve sonlu bir bölgede periyodik aralıklarla bulunan yığılı kütlelerin

(dalga bariyeri) yerdeğiştirme cevabı incelenmiştir. Ele alınan modelde yığılı kütlelerin ve girişin birbirine mükemmel şekilde yapışarak periyodik bir yapı oluşturduğu varsayılmıştır. Sonsuz periyodik giriş için dispersiyon

ilişkisi çıkarılmış daha sonra sonlu bölgedeki periyodikliğin dalga iletimine etkisi ortaya konmuştur.

Elde edilen sonuçlar şu şekilde sıralanabilir. Periyodik aralıklı yığılı kütleler, EB kirisinin frekans spektrumunda bantlı bir yapıya neden olmuştur. Kütlelerin etkisi ile dalga yayılımı sadece geçme bantlarında meydana gelmiş, faz ve hızları düşmüştür. Ayrıca durma bantlarında dalga iletimi engellenmiş, periyodik kütleler mekanik filtre gibi davranmıştır. Yığılı kütle miktarına bağlı olarak geçme bantlarının daralmış, kütle oranındaki artış faz ve grup hızlarında azalmaya sebep olmuştur.

Sonlu bölgede periyodik yığılı kütle olması halindeki iletkenlik cevabı, bariyere gelen dalga genliği ile bariyeri geçen dalga genliğinin oranı üzerinden elde edilmiştir. Yığılı kütlelerin (örneğin, 5 birim hücre) sonlu sayıda olması halinde bile periyodikliğin etkisi ile durma bantı frekanslarında iletkenlik değerlerinin düştüğü gösterilmiştir. Sonuçta bu bölge bir bariyer gibi davranmış ve kütle oranına bağlı olarak bariyerin arkasında yerdeğiştirme genliği durma bantı frekansı için hızla sıfıra gitmiştir.

Ele alınan bu basit modelde verilen sonuçlar sınırlı frekans aralığı ve hücre sayısını içermekte olup yapılan varsayımlar altında geçerlidir. Çalışmanın sınırlamalarına rağmen yığılı kütleli sonsuz ve sonlu uzunluktaki periyodikliğin, elastik davranışa etkileri hakkında önemli bilgiler elde edilmiştir. Sonlu bir periyodik tasarımla sonsuz periyodikliğe yakın cevaplar elde edilmiştir. Böylece, tasarımda periyodikliğe yer vererek sönümleyicilere gerek kalmadan da sismik etkilerin azaltılabilmesi veya engellenmesi mümkün görülmektedir.

Çıkar çatışması

Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

Benzerlik oranı (iThenticate): %3

Kaynaklar

- [1] G. Floquet, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 12, 47–88, 1883. <https://doi.org/10.24033/asens.220>.
- [2] L. Rayleigh, On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 24, 145–159, 1887. <https://doi.org/10.1080/14786448708628074>.
- [3] F. Bloch, Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern, Zeitschrift für Physik, 52, 555–600, 1929. <https://doi.org/10.1007/BF01339455>.
- [4] L. Brillouin, Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices, Dover, New York, 1953.
- [5] D. M. Mead, Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964–1995, Journal of Sound and Vibration, 190, 495–524, 1996. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0076>.
- [6] P. Zhao, K. Zhang, and Z. Deng, Size effects on the band gap of flexural wave propagation in one-dimensional periodic micro-beams, Composite Structures, 271, 114162, 1–8, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114162>.
- [7] R. Chen and T. Wu, Vibration reduction in a periodic truss beam carrying locally resonant oscillators, Journal of Vibration and Control, 22, 270–285, 2016. <https://doi.org/10.1177/1077546314528020>.
- [8] S. Sgubini, F. Graziani, and A. Agnani, Elastic waves propagation in bounded periodic structures, Acta Astronautica, 15, 913–917, 1987. [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(87\)90049-X](https://doi.org/10.1016/0094-5765(87)90049-X).
- [9] A. Özmutlu, M. Ebrahimian and M. I. Todorovska, Wave propagation in buildings as periodic structures: Timoshenko beam with rigid floor slabs model, Journal of Engineering Mechanics, 144, 04018010, 1–14, 2018. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001436](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001436).
- [10] M. Iqbal, M. M. Jaya, O. S. Bursi, A. Kumar, R. Ceravolo, Flexural band gaps and response attenuation of periodic piping systems enhanced with localized and distributed resonators, Scientific Reports, 10, 10:85, 1–11, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-56724-0>.
- [11] L. Liu and M. I. Hussein, Wave motion in periodic flexural beams and characterization of the transition between bragg scattering and local resonance, Journal of Applied Mechanics, 79, 011003, 1–17, 2012. <https://doi.org/10.1115/1.4004592>.
- [12] M. I. Hussein, M. J. Leamy and M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, Applied Mechanics Reviews, 66, 040802, 1–38, 2014. <https://doi.org/10.1115/1.4026911>.
- [13] C. Y. Koh, D. A. Jorba and E. L. Thomas, Phononic metamaterials for vibration isolation and focusing of elastic waves, U.S. Patent 8,833,510, 16 Sep. 2014.
- [14] M. Ruzzene and A. Baz, Attenuation and localization of wave propagation in periodic rods using shape memory inserts, Smart Materials and Structures, 9, 805–816, 2000. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/6/310>.
- [15] L. Banakh, The vibroisolation properties of the lattices containing the lumped inclusions, Vibroengineering Procedia, 29, 237–242, 2019. <https://doi.org/10.21595/vp.2019.21075>.
- [16] Y. Xiao, J. Wen, D. Yu, X. Wen, Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers: Band-gap behavior and band formation mechanisms, Journal of Sound and Vibration, 332, 867–893, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.09.035>.
- [17] Y. Xiao, J. Wen, G. Wang, X. Wen, Theoretical and experimental study of locally resonant and bragg band gaps in flexural beams carrying periodic arrays of beam-like resonators, Journal of Vibration and Acoustics, 135, 041006, 1–17, 2013. <https://doi.org/10.1115/1.4024214>.

- [18] Y. K. Lin and T. J. McDaniel, Dynamics of beam-type periodic structures, *Journal of Engineering for Industry*, 91, 1133–1141, 1969. <https://doi.org/10.1115/1.3591761>.
- [19] N. Fukuwa and S. Matsushima, Wave dispersion and optimal mass modelling for one-dimensional periodic structures, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 23, 1165–1180, 1994. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290231102>.
- [20] D. Yu, Y. Liu, G. Wang, H. Zhao, J. Qiu, Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures, *Journal of Applied Physics*, 100, 124901, 1–5, 2006. <https://doi.org/10.1063/1.2400803>.
- [21] D. Yu, J. Wen, H. Shen, Y. Xiao, X. Wen, Propagation of flexural wave in periodic beam on elastic foundations, *Physics Letters A*, 376, 626–630, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.11.056>.
- [22] T. Chen, Investigations on flexural wave propagation of a periodic beam using multi-reflection method, *Archive of Applied Mechanics*, 83, 315–329, 2013. <https://doi.org/10.1007/s00419-012-0657-x>.
- [23] Z. Guo, M. Sheng and T. Wang, Flexural wave attenuation in a periodic laminated beam, *Journal of Engineering Research*, 5, 258–265, 2016.
- [24] R. Prasad and A. Sarkar, Broadband vibration isolation for rods and beams using periodic structure theory, *Journal of Applied Mechanics*, 86, 021004, 1–10, 2019. <https://doi.org/10.1115/1.4042011>.
- [25] Z. Zhang, T. Li, and Y. Tang, Traveling wave analytical solutions of vibration band gaps of composite periodic beams, *Journal of Vibration and Control*, 25, 460–472, 2019. <https://doi.org/10.1177/1077546318783557>.
- [26] F. Gilbert and G. E. Backus, Propagator matrices in elastic wave and vibration problems, *Studia Geophysica et Geodaetica*, 10, 271, 1966. <https://doi.org/10.1007/BF02587859>.
- [27] S. B. Coskun, M. T. Atay, and B. Ozturk, Transverse vibration analysis of Euler-Bernoulli beams using analytical approximate techniques, in: E. Farzad (Eds.) *Advances in Vibration Analysis Research*, InTech, 1–25, 2011. <https://doi.org/10.5772/15891>.
- [28] B. Ozturk and S. B. Coskun, The Homotopy perturbation method for free vibration analysis of beam on elastic foundation, *Structural Engineering and Mechanics*, 37, 415–425, 2011. <https://doi.org/10.12989/sem.2011.37.4.415>.
- [29] B. Ozturk and S. B. Coskun, Analytical Solution for free vibration analysis of beam on elastic foundation with different support conditions, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1–7, 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/470927>.
- [30] K. Torabi, D. Sharifi, and M. Ghassabi, A semi-analytical solution for free vibration analysis of a step beam with multiple concentrated masses using variational iteration method, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 22, 333–343, 2021. <https://doi.org/10.1080/15502287.2021.1882616>.
- [31] Ł. Domagalski, M. Świątek, and J. Jędrzyński, An analytical-numerical approach to vibration analysis of periodic Timoshenko beams, *Composite Structures*, 211, 490–501, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.12.007>.
- [32] S. Y. Lee, H. Y. Ke, and M. J. Kao, Flexural waves in a periodic beam, *Journal of Applied Mechanics*, 57, 779–783, 1990. <https://doi.org/10.1115/1.2897092>.
- [33] S. Y. Lee and H. Y. Ke, Flexural wave propagation in an elastic beam with periodic structure, *Journal of Applied Mechanics*, 59, S189-S196, 1992. <https://doi.org/10.1115/1.2899487>.
- [34] T. Belytschko and W. L. Mindle, Flexural wave propagation behavior of lumped mass approximations, *Computers & Structures*, 12, 805–812, 1980. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(80\)90017-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(80)90017-6).
- [35] M. J. Leamy, Exact wave-based Bloch analysis procedure for investigating wave propagation in two-dimensional periodic lattices, *Journal of Sound and Vibration*, 331, 1580–1596, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.11.023>.
- [36] H. Lv and Y. Zhang, A wave-based vibration analysis of a finite Timoshenko locally resonant beam suspended with periodic uncoupled force-moment type resonators, *Crystals*, 10, 1132, 1–16, 2020. <https://doi.org/10.3390/cryst10121132>.
- [37] S. H. Kim and M. P. Das, Seismic waveguide of metamaterials, *Modern Physics Letters B*, 26, 1250105, 1–4, 2012. <https://doi.org/10.1142/S0217984912501059>.
- [38] A. Colombi, D. Colquitt, P. Roux, S. Guenneau, A seismic metamaterial: The resonant metawedge, *Scientific Reports*, 6, 27717, 1–6, 2016. <https://doi.org/10.1038/srep27717>.
- [39] A. Palermo, S. Krödel, A. Marzani et al., Engineered metabarrier as shield from seismic surface waves, *Scientific Reports*, 6, 39356, 1–10, 2016. <https://doi.org/10.1038/srep39356>.
- [40] V. K. Dertimanis, I. A. Antoniadis, and E. N. Chatzi, Feasibility analysis on the attenuation of strong ground motions using finite periodic lattices of mass-in-mass barriers, *Journal of Engineering Mechanics*, 142, 04016060, 1–10, 2016. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.19437889.0001120](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.19437889.0001120).
- [41] P. Persson, K. Persson, and G. Sandberg, Numerical study of reduction in ground vibrations by using barriers, *Engineering Structures*, 115, 18–27, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.02.025>.
- [42] P.-R. Wagner, V. K. Dertimanis, E. N. Chatzi, J. L. Beck, Robust-to-uncertainties optimal design of seismic metamaterials, *Journal of Engineering Mechanics*, 144, 04017181, 1–17, 2018. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.19437889.0001404](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.19437889.0001404).
- [43] F. Sun and L. Xiao, Bandgap Characteristics and seismic applications of inerter-in-lattice metamaterials, *Journal of Engineering Mechanics*, 145, 04019067, 1–13, 2019. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.19437889.0001642](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.19437889.0001642).

- [44] K. F. Graff, Wave motion in elastic solids, Dover; London: Constable, New York, 1991.
- [45] Y. K. Lin and B. K. Donaldson, A brief survey of transfer matrix techniques with special reference to the analysis of aircraft panels, *Journal of Sound and Vibration*, 10, 103–143, 1969. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(69\)90132-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(69)90132-1).
- [46] B. R. Mace, Wave reflection and transmission in beams, *Journal of Sound and Vibration*, 97, 237–246, 1984. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90320-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90320-1).

