KEFAD Cilt 24, Sayı 2, Ağustos, 2023

KEFAD

http://kefad.ahievran.edu.tr

Ahi Evran Üniversitesi
Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi

ISSN: 2147 - 1037

Investigation of Pre-service Middle School Mathematics Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching Relations in Triangles

Funda Gündoğdu Alaylı
Dilek Girit Yıldız

Article Information

CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.1123922

Received: 3105.2022
Revised: 31.12.2022
Accepted: 02.03.2023

Keywords:

Relations in Triangle,

Mathematical Knowledge for Teaching,

Pre-Service Middle School Mathematics Teachers

Abstract

This study aims to determine the subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of pre-service mathematics teachers concerning the relations related to triangles in the middle school mathematics curriculum based on the "Mathematical Knowledge for Teaching" model. The pre-service teachers' knowledge of mathematical representations for triangle relations, their situation in proving these relations, their knowledge of teaching these relations, and their knowledge of the difficulties that middle school students might face were evaluated for this purpose. Forty-five pre-service teachers attending a state university participated in this qualitative investigation. Four open-ended questions were used to gather data on each of the five relations on triangles. Data were analysed using content analysis. The findings revealed that the pre-service teachers' subject matter knowledge about triangle relations was not sufficient, and there were deficiencies in their pedagogical content knowledge. Within the scope of subject matter knowledge, it was determined that pre-service teachers generally could not express the mathematical representations of the relations related to triangles correctly and used notations incompletely. It was seen that most of the pre-service teachers could not provide valid proof. When the pedagogical content knowledge of the pre-service teachers was evaluated, it was determined that they could focus on student-centered teaching and create various activities for each of the relations, but they were unable to describe the steps of the teaching process accurately. The findings showed that most of the pre-service teachers provided general information about the difficulties that the students might experience. However, they did not describe the difficulties that might face, especially concerning the relations.

Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Üçgenlere İlişkin Bağıntıları Öğretmek İçin Matematik Bilgilerinin İncelenmesi

Makale Bilgileri

CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.1123922

Yükleme: 3105.2022
Düzeltme: 31.12.2022
Kabul: 02.03.2023

Anahtar Kelimeler:

Üçgende bağıntılar,

Öğretmek İçin Matematik Bilgisi,

Ortaokul Matematik Öğretmen Adayları

Öz

Bu araştırmanın amacı "Öğretmek için Matematik Bilgisi" modeli temel alınarak öğretmen adaylarının, ortaokul matematik müfredatında yer alan üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin konu alan bilgileri ve pedagojik alan bilgilerini belirlemektir. Bunun için öğretmen adaylarının üçgen bağıntıları için matematiksel gösterimler, ispat yapma durumları ve bağıntıların öğretimine dair bilgileri ile ortaokul öğrencilerinin karşılaşabileceği zorluklara ilişkin bilgileri değerlendirilmiştir. Araştırma, nitel araştırma olup, bir devlet üniversitesinde öğretim görmekte olan 45 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Veriler, üçgenle ilgili beş bağıntıya ilişkin dörder tane açık uçlu soru ile toplanmıştır. Verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. Bulgular öğretmen adaylarının üçgen bağıntıları ile ilgili alan bilgilerinin yeterli olmadığı ve pedagojik alan bilgilerinde de eksiklikler olduğunu ortaya koymuştur. Konu alan bilgisi kapsamında öğretmen adaylarının genellikle üçgenlerle ilgili bağıntılara ait matematiksel gösterimleri tam doğru bir şekilde ifade edemedikleri ve notasyonları eksik kullandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca çoğu öğretmen adayının geçerli ispat yapamadığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisi değerlendirildiğinde ise bağıntıların her biri için öğrenci merkezli öğretim planlayabildikleri ve çeşitli etkinlikler oluşturabildikleri ancak, öğretim sürecindeki aşamaları yeterince açıklayamadıkları belirlenmiştir. Yanısıra çoğu öğretmen adayının, öğrencilerin yaşayabilecekleri zorluklarla ilgili genel bilgiler sundukları fakat bağıntılara özgü yaşanabilecek zorlukları ifade etmedikleri tespit edilmiştir.

Sorumlu Yazar : Funda Gündoğdu Alaylı, Dr. Öğr. Üyesi, Trakya Üniversitesi, Türkiye, fundagundogdu@trakya.edu.tr, ORCID ID: 0000 0002 0382 9610

Yazar2: Dilek Girit Yıldız, Dr. Öğr. Üyesi, Trakya Üniversitesi, Türkiye, dilekgirit@trakya.edu.tr, ORCID ID: 0000-0003-3406-075X.

Alt Bilgi: This study was presented as an oral presentation at the 13th International Balkan Educational & Sciences Conference (BES 2018).

Atıf için: Gündoğdu Alaylı, F., & Girit Yıldız, D. (2023). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının üçgenlere ilişkin bağıntıları öğretmek için matematik bilgilerinin incelenmesi. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(2), 818-879.

Giriş

Öğrenme sürecinin en önemli etkenlerinden biri öğretmendir. Öğretim esnasında öğretmenin konuya ilişkin bilgisinin doğru ve tam olması oldukça önemlidir (Shulman, 1986). Alan bilgisinin yanı sıra öğretmenin, konunun öğretimi sırasında hangi modelleri kullanması gerektiğine, etkinlikleri nasıl yapılandırması gerektiğine ve öğrencilerin yaşayacakları zorlukları ve bu zorluklar için alınması gereken önlemlere ilişkin bilgisi de oldukça önemlidir (Ball, 2000; Ball, Thames ve Phelps, 2008).

Matematiğin bir alt dalı olan geometri, bireylerin içinde bulunduğu dünyayı anlamalarına ve matematiksel kavramları ilişkilendirmelerine yardım etmektedir (Fidan ve Türnüklü, 2010; Luneta, 2015; NCTM, 2000; Patkin ve Levenberg, 2012). Üçgenler de bireylerin okul öncesi dönemden itibaren çalıştıkları geometri konularından biridir (Ubuz ve Aydın, 2018). İlkokulda, üçgen şeklinin tanımlanmasına ilişkin temel kavramlar öğretilirken, ortaokulda üçgenin açı ve kenar özelliklerine ilişkin çeşitli bağıntıların öğretimi yapılmaktadır. Üçgenin iç açılarının toplamına ilişkin bağıntı (5. Sınıf), alan bağıntısı (6. Sınıf), üçgen eşitsizliği bağıntısı (8. Sınıf), açı ve kenar ilişkilerine ilişkin bağıntı (8. Sınıf), Pisagor bağıntısı (8.sınıf) ortaokul müfredatında yer almaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), 2018). Ancak, bu bağıntıların öğretiminde, öğretmenlerin izlediği yol genellikle, bağıntıların formül olarak verilmesi şeklindedir. Kavramsal bir geometri öğretimi için öğretmenlerin geometri alan bilgilerinin ve geometri öğretimi bilgilerinin yeterli olması gerekir (Gutiérrez ve Jaime, 1999; Jones, 2000). Bu araştırma ile öğretmen adaylarının üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin bilgileri ve bu bağıntıların öğretimine dair bilgileri ile ortaokul öğrencilerinin karşılaşabileceği zorluklara ilişkin bilgilerini belirlemek amaçlanmaktadır.

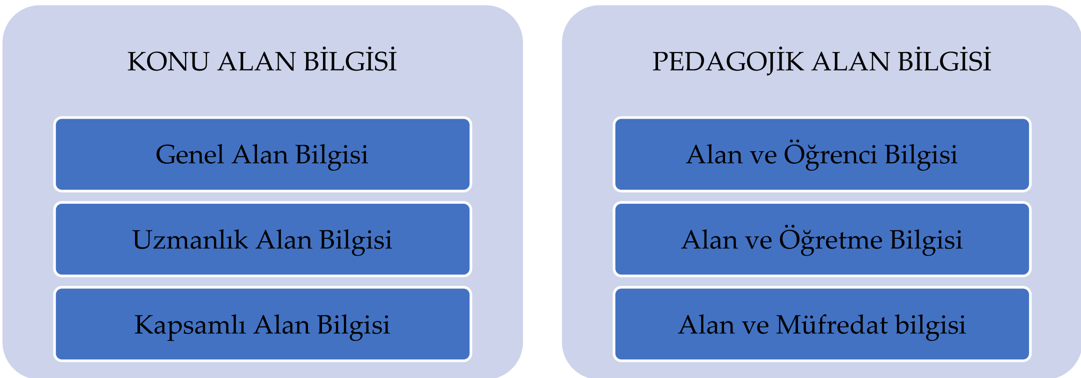
Öğretmek İçin Matematik Bilgisi (ÖMB)

Öğretmen bilgisi kavramı ilk Shulman (1986) tarafından tanımlanmış ve daha sonra birçok araştırmacı (örneğin; Cochran, DeRuiter ve King, 1993; Grossman, 1990) tarafından detaylandırılmış ve geliştirilmiştir. Bazı matematik eğitimi araştırmacıları bu kavramı özellikle matematik öğretmenleri için de tanımlamıştır (örneğin; An, Kulm ve Wu, 2004; Ball ve diğerleri, 2008; Fennema ve Franke, 1992; Rowland, Turner, Thwaites ve Huckstep, 2009). Güçlü ve kavramsal alan bilgisine sahip olmanın yanı sıra, öğretmenler, kavramlar arasındaki ilişkiyi ve öğrencilerin düşünüşlerini bilmelidir. Bu bağlamda, öğretmenlerin sahip olması gereken alan bilgisi ve bu bilginin, öğrenci düşünüşü temelinde, uygulamadaki kullanım yolları öğretim için temel bileşenlerdir (Ball, 2000). Bu noktada, Ball ve diğerlerinin (2008) uygulamaya koyduğu "Öğretmek için Matematik Bilgisi (ÖMB)" kavramı matematiğe özgü olduğu için matematik eğitimcileri tarafından yaygın bir şekilde kabul görmüştür.

ÖMB, Konu Alan Bilgisi (KAB) ve Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) kategorilerinden oluşmaktadır (Şekil 1). ÖMB'deki konu alan bilgisinin bileşenlerinden, Genel Alan Bilgisi (GAB) matematikle uğraşan herkes tarafından kullanılan matematiksel bilgidir. Kesirlerde çarpma yapmak, karenin dikdörtgenin özel bir hali olduğunu bilmek, 0/5'in sıfır olduğunu bilmek bu bilgi türüne örnek olarak verilebilir.

Öğretmenler bu bilgileriyle bir problemi doğru çözer, terim ve notasyonları doğru kullanır. Uzmanlık Alan Bilgisi (UAB) ise matematik öğretimine özel ve matematik öğretmenlerinin sahip olması gereken bilgidir. Kavramsal bilginin de ötesindedir. Öğretmenler bu bilgileri pedagojik amaçlar için kullanır. Örneğin, bu bilgiye sahip bir öğretmen kesirlerde çarpmayı modellerle gösterebilir, çıkarmada ayırma ve karşılaştırma anlamları arasındaki farkı bilir, bölmede bölen kesri ters çevirip çarpmayı açıklayabilir. Öğretmen öğrencinin anlamasını sağlamak için matematiksel kavramın hem kavramsal yapısını hem de görsel özelliklerini bilmelidir. Kapsamlı Alan Bilgisi ise, öğretmenin öğrettiği matematik konusunun/kavramının önceki ve sonraki seviyelerdeki ilişkili konular hakkında farkındalığı ile ilgilidir. Kesir kavramının oran kavramı ile ilişkisinin farkında olma kapsamlı alan bilgisine örnek olarak verilebilir.

PAB'ın, Alan ve Öğrenci Bilgisi (AÖB) bileşeni öğretmenlerin, belli bir matematik konusuna özgü, öğrencinin düşünmesini, ilgisini, düzeyini, yaşayabileceği zorlukları, kavram yanılgılarını, sahip oldukları bilgilerini dikkate alarak derslerini tasarlamaları ile ilgilidir. Örneğin, öğrencilerin kesirlerle toplama işlemi yaparken payda eşitlemeden doğal sayı gibi düşünerek toplama yapması kavram yanılgısı hakkında öğretmenin bilgisi olmalıdır. PAB'ın ikinci bileşeni olan Alan ve Öğretme Bilgisi (AÖtB) öğretmenlerin öğretim hakkında karar verebilmesini, öğretim için konuları sıralayabilmesini, örnekleri seçebilmesini, modeller ve temsillerin etkililiği hakkında yorum yapabilmesini gerektirir. Önceki örnekle ilişkili olarak, öğretmenin bu kavram yanılgısını önlemek için birim kesirler ve modeller yardımıyla toplama işlemini öğretmesi bu bilgi türüne örnek verilebilir. PAB'ın üçüncü bileşeni olan Alan ve Müfredat Bilgisi ise, konuları müfredata göre sıralama, müfredat tarafından önerilen etkinlikler ve açıklamalar bilgisi ile ilgilidir. Kesirler konusunun sınıf seviyelerindeki kazanımlarını bilme bu bilgi türüne örnektir (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016).



Şekil 1. Öğretmek için Matematik Bilgisi (Ball ve diğerleri, 2008)

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının üçgenlere ilişkin bağıntılar hakkındaki bilgisini incelemek için ÖMB modeli kullanılmıştır. ÖMB modeli matematiğe özgü ve detaylı olmasından dolayı daha zengin ve anlamlı sonuçlar vereceği düşünülerek bu çalışmada tercih edilmiştir.

Öğretmen Adaylarının Üçgenlere İlişkin Konu Alan ve Pedagojik Alan Bilgileri

Literatür incelendiğinde, genel olarak öğretmen adaylarının geometri alan bilgilerinin yeterli olmadığı sonucuna varılmıştır (örneğin; Aslan-Tutak ve Adams, 2015; Couta ve Vale, 2014). Daha özel olarak ise, üçgenlerin öğretimine ilişkin matematik öğretmenlerinin bilgilerini incelemeyi amaçlayan çalışmalar da bulunmaktadır. Bu çalışmaların çoğu öğretmen ve öğretmen adaylarının konu alan bilgisine odaklanmaktadır. Bu çalışmalar, üçgenlere ilişkin tanım yapma ve kavram imajı, yükseklik bilgisi-algısı, alan kavramı, Pisagor teoremi ve benzer üçgenler konularını içermektedir.

Konu alan bilgisinin öncelikli bileşenlerinden biri de tanımlardır (Johnson, Blume, Shimizu, Graysay ve Konnova, 2014; Zazkis ve Leikin, 2008). Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai ve Tabach (2014) okul öncesi öğretmenlerinin tanımlarını incelemiştir. Araştırmacılar, öğretmenlerin gerekli matematiksel özelliklerini belirterek üçgen tanımını doğru yaptıklarını görmüştür. Ancak, tanımın doğru olmasının üçgenin şekil olarak doğru oluşturulmasını her zaman göstermediğini de belirtmişlerdir. Benzer bir amaçla, Ulusoy (2021) okul öncesi ve ortaokul matematik öğretmen adaylarının üçgen tanımları ve kavram imajını incelemiştir. Öğretmen adaylarının üçgen tanımı, üçgene ilişkin örnek ve örnek olmayan durumları ve gerekçelerini gerekli ve yeterli özellikleri kullanarak açıklamakta zorlandıkları sonucuna varmıştır. Üçgenlerin sınıflandırılması açısından da öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin, dik kenarların dikey ve yatay konumda olmadığı dik üçgenleri ve alışılmış (prototip) dışındaki geniş üçgenleri tanımlamada zorlandıkları belirtilmiştir (Van der Sandt ve Nieuwoudt, 2003; Ward, 2004). Üçgen alan bilgisi kapsamında sıkça ele alınan kavramlardan biri de yükseklik ve dolayısıyla diklik merkezidir. Gutierrez ve Jaime (1999), öğretmen adaylarının üçgende yükseklik kavramı ile ilgili kavrayışlarını araştırmıştır. Öğretmen adaylarının kavrayışlarında ortak hatalar tespit etmişler ve zayıf bir kavram imajları olduğu sonucuna varmışlardır. Hızarcı, Ada ve Elmas (2006) da matematik öğretmeni adaylarının az bir kısmının, üçgende yükseklik ve diklik merkezini doğru tanımlayabildiklerini, çoğunun da diklik merkezini sürekli üçgenin iç bölgesinde oluşturmaya çalıştığını bulmuştur. Benzer şekilde, öğretmen adayları, dar açılı üçgendeki yüksekliklerin her zaman üçgenin iç bölgesinde çizilmesinden hareketle dik üçgende ve geniş açılı üçgende yüksekliği yanlış çizmişlerdir (Altıntaş ve İlgün, 2017; Cunningham ve Roberts, 2010; Gutiérrez ve Jaime, 1999). Alatorre ve Saiz (2009) da üçgende yükseklik kavramı ile üçgende taban, üçgen eşitsizliği ve Pisagor teoremi bağlamında öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının alan bilgilerini incelemiştir. Öğretmenlerin, aday öğretmenlere göre daha doğru cevaplar verdiklerini bulmuşlardır. Buna rağmen, genel olarak katılımcıların üçgenle ilgili bu kavramların bulunduğu maddelerde kavram yanılgısı ve zorluk yaşadıklarını belirtmişlerdir. Bazı öğretmen adayları, üçgende sadece bir tane taban olduğu ve bunun da yatay konumda olması gerektiğini düşünmüşlerdir (Alatorre ve Saiz, 2009; Altıntaş ve İlgün, 2017).

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının üçgen konu alanı bilgisine ilişkin araştırılan bir diğer konu da benzer üçgenlerdir (Ubah, 2021). Ubah (2021) öğretmen adaylarının benzer üçgenleri belirlerken ve yazılı ifade ederken; notasyonların, harflerin, kenar uzunlukları arasındaki oranların kullanımlarını incelemiştir. Çoğu öğretmen adayı, benzerlikleri yazabilmelerine rağmen, üçgen benzerliği olarak sembolik ifadeye dönüştürürken zorlanmıştır. Bunun için, benzer üçgenleri belirlerken görsel temsiller kullanmanın, öğretmen adaylarının geometri alan bilgilerinin gelişimine destek olabildiği belirtilmiştir (Ubah, 2021). Üçgen konu alan bilgisi kapsamında, değinilen kavramların dışında, öğretmenlerin üçgenin ağırlık merkezi ile diklik merkezi kavramlarını karıştırması, Öklid bağıntısında yükseklik kavramını kullanması gibi kavram yanılgılarından da bahsedilmiştir (Altıntaş ve İlgün, 2017).

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının üçgene ilişkin formül ve teoremleri bilmesi ve bunları ispatlayabilmesi de konu alan bilgisi açısından değerlendirilebilir. Bu açıdan, Güner ve Topan (2016) da ortaokulda üçgen öğretiminde kullanılan teoremleri (üçgende iç açıların toplamı, Pisagor teoremi, alan formülü, açı-kenar ilişkisi ve üçgen eşitsizliği) ele almıştır. Araştırmacılar, ilköğretim matematik öğretmen adaylarından bahsi geçen teoremlerin ispatını yapmalarını istemiştir. Genelde ispat becerilerinin zayıf olduğunu ve belirli örnek değerler için doğrulama yaptıkları saptanmıştır. İspat yapan öğretmen adayları da genellikle basit ve pratik çözüm yollarını tercih etmiştir.

Üçgenlere ilişkin pedagojik alan bilgisi araştıran çalışmaların da genellikle üçgen kavramına, Pisagor teoreminin öğretimine, üçgende alan ve üçgenlere ilişkin kavram yanılgısı/zorluk bilgisine odaklandığı görülmüştür. Jin ve Wong (2021) sekizinci sınıflarda uyguladıkları üç tekniğin üçgenleri kavramsal olarak anlamada rolünü incelemiştir. Bu teknikler, 1) kavramların anlamına yönelik tanım-örnek-örnek olmayanlar, 2) kavramlar arasındaki ilişkileri anlamaya yönelik kavram haritası ve 3) kavramları ve özelliklerini kullanarak işlem yapmaya yönelik geleneksel kâğıt-kalem yöntemidir. Araştırmacılar bu üç tekniğin de kavramsal anlamayı sağlamak için birbirini tamamladığı sonucuna ulaşmıştır.

Üçgenlere ilişkin pedagojik alan bilgisinin incelendiği konulardan biri de Pisagor teoreminin öğretimidir. Bu teoremin öğrenimini öğretmen ve öğrenci boyutundan ele alan çalışmalar vardır. Zazkis ve Zazkis (2016) matematik öğretmeni adaylarının ispatı verilen Pisagor teoremini öğretmen-öğrenci diyaloglarını içeren bir senaryo bağlamında devam ettirmelerini istemiştir. Öğretmen adayları yazdıkları senaryolarda cebirsel işlemlere ve alışılmış öğrenci hatasına değinmiştir. Ayrıca bu hatayı gidermek adına görsel sayısal gösterim kullanma, hatırlatma yapma gibi çeşitli öğretimsel stratejiler de önermişlerdir. Huang ve Leung (2002) ise üç farklı yerdeki (Hon Kong, Shanghai ve Chech) öğretmenin Pisagor teoremi öğretimlerini analiz ederek sunmuştur. Chech ve Hong Kong öğretmeni teoremi görsel olarak doğrulama eğilimindeyken, Shanghai öğretmeni ise matematiksel ispat üzerinde durmuştur. Shanghai öğretmeni rehberlikle öğrencinin kendi yapılandırması ile Pisagor teoremini öğrenmesini sağlarken, diğer öğretmenler öğrenciler için bazı bilgiler de vermiştir. Yang (2009), yine bir Shanghai öğretmeninin bir öğretim-araştırma grubu içinde Pisagor teoremi öğretiminin gelişimini incelemiştir. Çin'deki okullarda genellikle bulunan bu tarz öğretim-araştırma grubunda, öğrencinin öğrenmesini destekleme üzerine yapılan tartışmalar sonrasında dersi revize etme gerçekleştirilir. Öğretmen, Pisagor teoremini üç ayrı sınıfa anlatmıştır. Öğretmenin ilk dersi teoremi uygulama odaklıyken, ikinci ders önermelerin gerekçelendirilmesi ve üçüncü ders de önermelerin üretilmesi şeklinde revize edilmiştir.

Öğrenci boyutunda ise Moutsios-Rentzos, Spyrou ve Peteinara (2013) Pisagor teoreminin öğretiminde kullanılan bir öğretim tasarımının etkisine bakmıştır. Araştırmacılar Pisagor teoreminin geliştirildiği öğretim tasarımında deneysel gruptaki öğrencilerin kontrol grubuna göre farklı anlayışlar geliştirebildiklerini bulmuştur. Ayrıca, dik açılı bir üçgenin kökenleri ile birlikte deneyimsel düşünme ve ardından bunu soyutlaştırarak aksiyomatik sistemde kanıtlanmış bir cebirsel ifadeye dönüştürme sürecinin, öğrenci anlayışlarını desteklediğini vurgulamıştır.

Öğretmen adaylarının öğrencilerin muhtemel kavram yanılgısı bilgilerinin incelendiği çalışmalardan biri de Bilik'in (2016) çalışmasıdır. Bilik (2016), öğretmen adaylarının, üçgende alana ilişkin öğrencilerin sahip olabileceği kavram yanılgısı ve zorluk bilgilerini incelemiştir. Öğretmen adayları, alanla ilgili olası kavram yanılgılarının ve zorlukların yükseklik kavramı ile ilgili olduğunu belirtmiştir. Özellikle taban ve bu tabana ait yüksekliği belirlemede problem yaşandığını ifade etmişler ve bu yanılgıları gidermek için de tartışma yöntemini önermişlerdir. Yurtyapan ve Karataş (2020) çalışmalarında, üçgenlere yönelik açı-kenar ilişkisi ve diklik merkezi tespiti kazanımlarına yönelik üç senaryo üzerinden öğretmenlerin bilgilerini değerlendirmiştir. Araştırmacılar, öğretmenlerin çoğunun üçgende açı kenar ilişkisine yönelik soruları doğru cevaplarken, diklik merkezinin tespiti ile ilgili soruyu çoğu öğretmenin doğru cevaplayamadığını belirtmiştir. Ayrıca araştırmacılar öğretmenlerin genel olarak öğrencilerin kavram yanılgılarını doğru tespit ettiklerini ve sebebini açıklayabildiklerini belirtmiştir.

Genel olarak alan yazına bakıldığında, öğretmen ve öğretmen adaylarının konu alan bilgisinde üçgenlere ilişkin tanım yapma ve kavram imajı, yükseklik, alan, Pisagor teoremi, benzer üçgenler ve üçgenlere ait bağıntılara ilişkin ispat yapma konuları incelenmiştir. Çalışmalarda özellikle öğretmen adaylarının bilgilerin yeterli olmadığı ve hatta bazı konularda (örneğin, diklik merkezi) kavram yanılgısı yaşadığı belirlenmiştir. Üçgenlere ilişkin pedagojik alan bilgisinde ise üçgen kavramının ve Pisagor teoreminin öğretimi, öğretmen adaylarının üçgende alan ve üçgenlere ilişkin öğrencilerin kavram yanılgısı ve zorluk bilgisi incelenmiştir. Bu çalışmalar da öğretmen adaylarının öğrencilerin muhtemel kavram yanılgıları ile ilgili bilgiye genellikle sahip olduğunu bulmuştur. Ayrıca üçgenlere ilişkin kavramsal bir öğretimin gerçekleşmesi için öğrenci merkezli yöntem ve tekniklerin kullanılmasını önermişlerdir.

Araştırmanın Önemi ve Amacı

Genel olarak çalışmalara bakıldığında, üçgenlere ilişkin kavramlardan bir ya da birkaçına odaklanıldığı (tanım, alan, Pisagor teoremi gibi) görülmektedir. Bu çalışmada ise ortaokul matematik müfredatının geneli dikkate alınarak üçgenlere ilişkin bağıntıların tamamı ele alınmıştır. Ortaokul matematik öğretmeni adayları, bu bağıntıların tümünde yeterli bilgiye sahip olmalıdır. Ayrıca öğretmen adaylarının hem konu alan bilgisini hem de pedagojik alan bilgisini aynı anda ele alarak inceleyen üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin çalışmaların az olduğu söylenebilir. Bu noktada mevcut çalışma iki bilgi türüne de aynı anda odaklanmıştır. Bu çalışma ile hem üçgenlere ilişkin bağıntıların tümü hem de öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgisi birlikte incelenmiştir. Böylece üçgenlere ilişkin öğretmen adaylarının bilgilerine dair daha kapsamlı sonuçlara ulaşılması hedeflenmiştir.

Bu çalışmanın amacı, öğretmen adaylarının üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin var olan bilgilerini ortaya çıkarmaktır. Mevcut çalışma, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin var olan konu alan bilgileri ve pedagojik alan bilgileri ile bu bilgilerine ilişkin eksiklikleri belirlemeyi ve bu eksiklikleri gidermeye yönelik önerilerde bulunmayı amaçlamaktadır. Bu amaçlar doğrultusunda, bu çalışma ile "ortaokul matematik öğretmen adaylarının üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin bilgileri nedir?" sorusuna cevap aranmıştır. Bu araştırma problemi alt alanlara göre şu şekilde düzenlenmiştir:

1. Ortaokul matematik öğretmen adaylarının üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin genel alan bilgisi özelinde konu alan bilgileri nedir?

2. Ortaokul matematik öğretmen adaylarının üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin alan ve öğrenci bilgisi ile alan ve öğretme bilgisini kapsayan pedagojik alan bilgileri nedir?

Yöntem

Bu çalışma, nitel araştırma yöntemi ile tasarlanmış ve bu kapsamda veri toplama ve analizi gerçekleştirilmiştir. Nitel araştırmalar, bir konunun detaylı bir şekilde, katılımcıların o konuya ilişkin yorumları ile birlikte araştırılmasını sağlamaktadır. Özel olarak da nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Nitel çalışmalarda, bir durumu meydana getiren ayrıntıları belirlemek, bir duruma ilişkin olası açıklamaları geliştirmek ve bir durumu derinlemesine incelemek, çalışmanın odağının ne, nasıl ve niçin sorularını cevaplamak amacıyla durum çalışması tercih edilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016; Gall, Gall ve Borg, 2007; Yin, 2003). Mevcut çalışmada, öğretmen adaylarının üçgenlerle ilgili bağıntıları öğretmek için yeterli konu alan ve pedagojik alan bilgisine sahip olup olmadığı araştırılmıştır. Bunun için öğretmen adaylarının çözümleri ve açıklamaları incelenmiştir. Bu sebeple durum çalışması deseni kullanılmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırma, bir eğitim fakültesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 45 üçüncü sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Özellikle üçüncü sınıf öğrencilerinin seçilmesinin nedeni altıncı yarıyıl sonunda hem Soyut Matematik, Geometri, Analitik Geometri, Analiz gibi alan derslerini almış, hem de Özel Öğretim Yöntemleri I dersini almış olmalarıdır. Böylece hem matematik alan bilgilerini hem de bu bilgilerin öğretiminin nasıl yapılacağına dair bilgileri neredeyse tamamlanmıştır. Bundan sonraki kısımlarda öğretmen adayları "ÖA" şeklinde ifade edilmiştir.

Veri Toplama

Araştırmanın verileri, ÖA'ların üçgenlerle ilgili açık uçlu sorulara verdikleri cevaplardan elde edilmiştir. Bu sorular belirlenirken ortaokul müfredatında üçgenlere ilişkin beşinci, altıncı ve sekizinci sınıf seviyelerindeki kazanımlar dikkate alınmıştır (MEB, 2018). Bu kazanımlar içerisinden beş kazanım belirlenmiştir. İlgili kazanımlar, öğretmen adaylarının yapılandırmacı etkinlikler önerebilecekleri kazanımlar olduğu için tercih edilmiştir. Kazanımların içerdiği bağıntılar aşağıdaki gibidir:

1. Bağıntı: "Üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir." (5.sınıf)
2. Bağıntı: "Bir üçgenin eş olmayan iki açısı varsa ölçüsü büyük olan açının karşısındaki kenar diğer açının karşısındaki kenardan daha uzundur." (8.sınıf)
3. Bağıntı: "Üçgen Eşitsizliği: Bir üçgende bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunluğunun toplamından küçük farkının mutlak değerinden büyüktür." (8.sınıf)
4. Bağıntı: "Pisagor bağıntısı: Bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir." (8.sınıf)
5. Bağıntı: "Alan bağıntısı: Bir üçgenin alanı bir kenarın uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir." (6.sınıf)

ÖA'lara bu bağıntıların her biri için dört açık uçlu soru yöneltilmiştir. Açık uçlu sorularda, ÖA'lardan her bir bağıntının matematiksel gösterimlerini ifade etmeleri, matematiksel ispatlarını yapmaları, bu bağıntıların öğretimini nasıl gerçekleştireceklerini açıklamaları ve öğretim sırasında öğrencilerin yaşayabileceği zorlukları açıklamaları istenmiştir. Bu sorular, Ball ve diğerlerinin (2008) önerdiği "Öğretmek için Matematik Bilgisi (ÖMB)" modeli temel alınarak oluşturulmuştur. Matematik eğitimindeki bir araştırmacıdan soruların içeriği ve anlaşılabilirliği ile ilgili görüş alınarak sorulara son şekli verilmiştir. Veriler araştırmacılar tarafından Özel Öğretim Yöntemleri II dersinde toplanmıştır. Öğretmen adaylarına soruları cevaplamaları için yaklaşık 60 dakika süre verilmiştir. ÖA'lara yöneltilen sorular ve ÖMB modeli bileşenleri ile ilişkisi Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. *ÖA'lara yöneltilen sorular ve ÖMB modeli bileşenleri ile ilişkisi*

Araştırmanın Amacı		***ÖA'lara Yöneltilen Sorular***
Konu Alan Bilgisi	Genel Alan Bilgisi	Verilen bağıntıyı matematiksel sembollerle gösteriniz.
		Verilen bağıntıyı ispatlayınız.
Pedagojik Alan Bilgisi	Alan ve Öğretme Bilgisi	Verilen bağıntı için nasıl bir etkinlik geliştirirsiniz?
	Alan ve Öğrenci Bilgisi	Verilen bağıntının öğretimi sırasında öğrencilerin yaşayabileceği zorluklar neler olabilir?

Veri Analizi

Araştırma verilerinin analizinde içerik analizinden (Yıldırım ve Şimşek, 2013) yararlanılmıştır. ÖA'ların açık uçlu sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen veriler araştırmacılar tarafından ayrı ayrı kodlanmıştır. Ortaya çıkan kodlar arasında %89 uyum hesaplanmıştır. Farklı çıkan kodlar araştırmacılar tarafından tekrar ele alınarak fikir birliğine varılmıştır. Analiz sonucunda ortaya çıkan kodlar Tablo 2'de verilmiştir.

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Araştırmanın iç geçerliliğini artırmak amacıyla açık uçlu sorular hazırlanırken literatür dikkate alınmıştır. Araştırmanın odağında bulunan ÖMB modeline göre sorular belirlenmiştir. ÖA'ların soruları cevaplamaları esnasında rahat olmaları adına ders geçme notunu etkilemeyeceği belirtilmiştir. Dış geçerliliği artırmak için araştırma süreci ayrıntılı bir şekilde rapor edilmiştir. Araştırmanın güvenirliği için verilerin analizinden elde edilen kodların uyum yüzdesi hesaplanmıştır. Ayrıca bulgular yorum katılmadan doğrudan verilmiştir.

Tablo 2. *İçerik analizi sonucunda ortaya çıkan kodlar*

Kodlar				Açıklama
Konu Alan Bilgisi	**Genel Alan Bilgisi**	**Matematiksel Gösterim**	Doğru Gösterim	Matematiksel dilin doğru kullanıldığı matematiksel gösterimler ve notasyonlara dikkat ederek doğru yapılan çizimler
			Kısmen Doğru Gösterim	Matematiksel dille ilgili eksikliklerin bulunduğu gösterimler veya notasyonlara dikkat etmeden yapılan doğru çizimler
			Yanlış Gösterim	Verilen ifadeye karşılık gelmeyen gösterimler ve yanlış çizimler
			Gösterim yok	Hiçbir gösterimin olmadığı ve çizim yapılmadığı durum
		Bağıntıların İspatı	Geçerli İspat	Matematiksel bilgiler, kurallar, önermeler veya görsellere dayalı, hatta kesme, yapıştırma, katlama gibi deneysel yolların kullanıldığı mantıklı ve tutarlı açıklamalarla istenene ulaşan ispatlar
			Kısmen Geçerli İspat	Matematiksel bilgilerin bir kısmının kullanıldığı, eksik bilgilerin bulunduğu açıklamaları içeren ispatlar ve sonuca ulaşamayan ispatlar
			Geçersiz İspat	Yanlış matematiksel bilgilerin kullanıldığı, bağıntı ile ilgisiz olan açıklamaların olduğu, belirli örneklerin kullanıldığı ispatlar
			İspat yok	Bağıntının ispatının olmadığı durum
Pedagojik Alan Bilgisi	**Alan ve Öğretme Bilgisi**	**Öğretime Yönelik Etkinlik Geliştirme**	Geçerli Etkinlik	Yapılandırmacı yaklaşımla keşfetmeye yönelik ve akıl yürütme sağlayacak olan etkinlikler
			Kısmen Geçerli Etkinlik	Yanlış bir bilgi içermeyen, eksiklikleri olan ancak geliştirilerek geçerli hale getirilebilecek olan etkinlikler
			Geçersiz Etkinlik	Yanlış bilgiler içeren, bağıntıyı keşfetmeye yönelik olmayan, bağıntının uygulaması biçiminde olan veya çok genel ifadeler biçimindeki açıklamalar
			Etkinlik Yok	Bağıntının öğretimine yönelik etkinlik geliştirilmediği durum
	Alan ve Öğrenci Bilgisi	**Zorluk**	Her bir bağıntı için ortak olan zorluklar	Bağıntı için öğrencilerin yaşayabileceği genel ifadelerle belirtilen zorluklar
			Belirtilen bağıntıya özgü zorluklar	Öğrencilerin yaşayabileceği bağıntıya özgü zorluklar

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Etik kurul izin bilgileri: Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı = Trakya Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu

Etik değerlendirme kararının tarihi= 26.04.2023

Etik değerlendirme belgesi sayı numarası= 2023.04.17

Bulgular

ÖA'ların üçgenlere ilişkin KAB ve PAB'larını belirlemeyi amaçlayan bu araştırmanın bulguları iki başlık altında sunulmuştur. Yapılan analizler sonucunda ÖA'ların, genel alan bilgileri, alan ve öğretme, alan ve öğrenci bilgilerine ilişkin frekans tabloları ve ÖA'ların cevaplarından örnekler verilmiştir. Bulgular ÖMB teorik çerçevesinde açıklanmıştır.

Öğretmen Adaylarının Üçgenlerdeki Bağıntılara İlişkin Konu Alan Bilgileri (KAB)

Araştırmanın birinci sorusuna yönelik bulgular bu başlık altında sunulmuştur. ÖA'ların üçgenlere yönelik konu alan bilgileri, genel alan bilgileri kapsamında değerlendirilmiştir. Bunun için ÖA'ların üçgenlere yönelik bağıntılara dair matematiksel gösterimleri ve ispatları incelenmiştir.

Genel alan bilgisine ilişkin bulgular:

***Bağıntıların Matematiksel Gösterimlerine İlişkin Bulgular*:** Araştırmada ÖA'ların, üçgenlerle ilgili verilen bağıntılara ilişkin genel alan bilgisini değerlendirmek için bağıntıları matematiksel olarak ifade etmeleri istenmiştir. ÖA'ların matematiksel gösterimlerinin kategorilerine ilişkin frekans ve yüzdeleri Tablo 3'te verilmiştir.

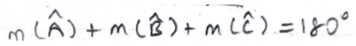
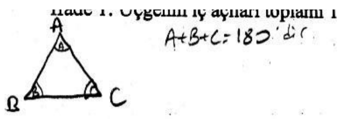
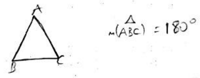
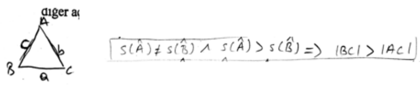
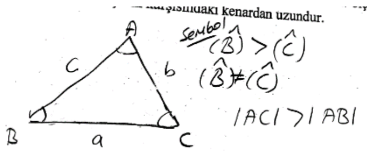
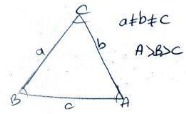
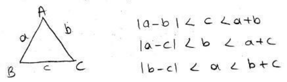
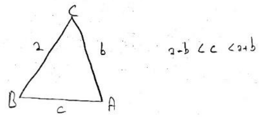
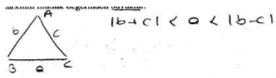
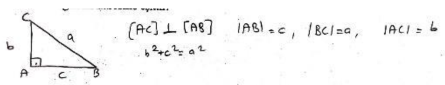
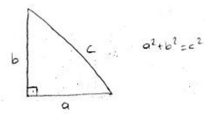
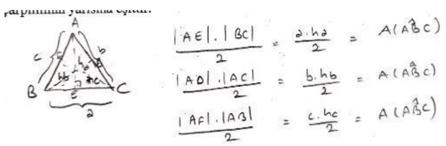
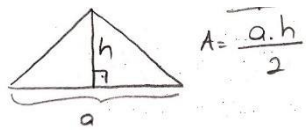
Tablo 3. *ÖA'ların bağıntıların matematiksel gösterimlerine ilişkin frekans ve yüzde değerleri*

	Doğru gösterim		Kısmen doğru gösterim		Yanlış Gösterim		Gösterim Yok	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1.Bağıntı	14	31	19	42	2	4	10	22
2.Bağıntı	12	27	18	40	3	6	12	27
3.Bağıntı	36	80	4	9	1	2	4	9
4.Bağıntı	27	60	14	31	0	0	4	9
5.Bağıntı	7	16	38	84	0	0	0	0
Toplam	96	43	93	41	6	3	30	13

Tablo 3'te görüldüğü gibi ÖA'ların verilen bağıntılara göre matematiksel gösterim durumları değişiklik göstermektedir. Örneğin, üçgende büyük açının karşısında uzun kenarın bulunduğunu belirten ikinci bağıntıda, 12 ÖA doğru gösterim yaparken, pisagor bağıntısını belirten dördüncü bağıntıda 27 ÖA doğru gösterim yapmıştır. Yine tablodan bağıntılara ilişkin toplam doğru gösterimlerin, tüm gösterimlerin yarısından az (%43) olduğu anlaşılmaktadır. Yanlış gösterimler tüm gösterimler içinde en az paya (%3) sahip iken, boş bırakılanlar (%13) nispeten çoktur. Tablodan en çok birinci ve ikinci bağıntıların gösterimlerinin boş bırakıldığı anlaşılmaktadır.

Tablo 3 incelendiğinde, birinci bağıntı için ÖA'ların en çok kısmen doğru gösterim yaptıkları (%42) görülmektedir. Üçgenin iç açılarının toplamını ÖA'lar ortaokuldan beri bilmelerine rağmen neredeyse üçte birinin (%31) doğru gösterim yapması kayda değerdir. Aslında ÖA'ların, üçgenlerin iç açılarının toplamı bilgisine sahip olmasına rağmen, açıların gösteriminde notasyona dikkat edilmediği veya sözel olarak ifadesine alışılan bu ifadenin matematiksel gösterimine önem verilmediği görülmüştür. Yine Tablo 3'te ikinci bağıntı için de yine birinci bağıntıda olduğu gibi, ÖA'ların en çok kısmen doğru gösterim yaptıkları (%40) görülmektedir. Üçüncü bağıntıda ise diğer ifadelere göre kayda değer bir şekilde daha çok ÖA'nın (%80) doğru gösterim yapması dikkat çekici bir bulgudur. Tablodan dördüncü bağıntının da ÖA'ların büyük bir çoğunluğu (%60) tarafından doğru gösterildiği anlaşılmaktadır. Hatta dördüncü bağıntı için ÖA'ların tamamına yakınının (%91) doğru veya kısmen doğru gösterim yaptıkları anlaşılmaktadır. Bunun yanında beşinci bağıntının ÖA'ların en az doğru gösterim yaptıkları (%16), diğer yandan en çok kısmen doğru gösterim yaptıkları (%84) bağıntı olduğu görülmektedir. Yani ÖA'ların tamamı, beşinci bağıntıda doğru veya kısmen doğru gösterim yapmıştır. ÖA'ların her bir bağıntı için matematiksel gösterimlerinden bazı örnekler Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. *Bağıntılara ilişkin ÖA'ların matematiksel gösterim örnekleri*

	Doğru Gösterim Örneği (a)	Kısmen Doğru Gösterim Örneği (b)	Yanlış Gösterim Örneği (c)
1.Bağıntı	 ÖA6 (1-a)	 ÖA12 (1-b)	 ÖA44 (1-c)
2.Bağıntı	 ÖA43 (2-a)	 ÖA5 (2-b)	 ÖA23 (2-c)
3.Bağıntı	 ÖA14 (3-a)	 ÖA19 (3-b)	 ÖA15 (3-c)
4.Bağıntı	 ÖA37 (4-a)	 ÖA22 (4-b)	
5.Bağıntı	 ÖA29 (5-a)	 ÖA27 (5-b)	

Tablo 4'teki örnekler incelendiğinde her bir bağıntı için doğru gösterim yapan ÖA'ların çizimlerinde notasyona dikkat ettikleri açı ve kenarları şekil üzerinde gösterdikleri ve bağıntıyı matematiksel olarak doğru yazdıkları görülmektedir. Örneğin, 2-a'da ÖA43'ün üçgenin eş olmayan iki açısı varsa ve ölçüsü büyük olan açının karşısında büyük kenar olacağı bağıntısını eksiksiz matematiksel olarak gösterdiği ve bunu yaparken açı, kenar ile ilgili notasyonlara dikkat ettiği, "ve", "ise" sembollerini kullandığı anlaşılmaktadır. Ayrıca ÖA'ların bazılarının bağıntıdaki her bir koşulu dikkate aldığı görülmüştür. Örneğin, 3-a'da görüldüğü gibi ÖA14 üçüncü bağıntı için her üç durumu da belirtmiştir. Üçüncü bağıntı için doğru gösterim yapan ÖA'ların 11'i, 3-a'daki gibi üç kenar için de matematiksel olarak gösterirken, diğerleri sadece bir kenar için göstermiştir. Beşinci bağıntı için ise sadece ÖA29, 5-a'da görüldüğü üzere her bir kenar ve o kenara ait yükseklik için üçgenin alanını matematiksel olarak göstermiştir. Kısmen doğru gösterim yapan ÖA'ların çizimlerinde genellikle notasyona dikkat etmedikleri ve bağıntıyı matematiksel olarak yazarken tüm koşulları dikkate almadıkları, açı, derece, kenar, alan, mutlak değer gibi sembollere dikkat etmeyerek matematiğin kendine ait dilini kullanmadıkları görülmektedir. Örneğin, 1-b'de, ÖA12'nin, açıların önüne ölçüsünü ifade etmek için m harfi koymadığı, açıların üzerine açı işareti koymadığı ve 180'nin üzerine derece işareti koymadığı görülmektedir. Yanlış gösterim yapan ÖA'lar ise notasyona dikkat etmedikleri gibi yanlış notasyonlar kullanmış ve bağıntıları da matematiksel olarak yanlış ifade etmişlerdir. Örneğin, 3-c'de, ÖA15'in, bir kenarın diğer iki kenarın toplamının mutlak değerinden büyük, farkının mutlak değerinden küçük olduğunu ifade ettiği görülmektedir. Bu ifade matematiksel olarak yanlıştır. Burada ÖA'nın mutlak değer kavramında da sıkıntı yaşadığı söylenebilir.

***Bağıntıların İspatına İlişkin Bulgular*:** Araştırmada, ÖA'ların üçgenlerle ilgili verilen bağıntılara ilişkin genel alan bilgisini değerlendirmek için verilen bağıntıları ispatlamaları istenmiştir. ÖA'ların bağıntıların ispatına ilişkin frekans ve yüzde değerleri Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. *ÖA'ların bağıntıların ispatına ilişkin frekans ve yüzde değerleri*

	Geçerli İspat		Kısmen Geçerli İspat		Geçersiz İspat		İspat Yok	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1.Bağıntı	17	38	12	26	3	7	13	29
2.Bağıntı	0	0	3	7	8	17	34	76
3.Bağıntı	0	0	3	7	7	16	35	77
4.Bağıntı	5	11	13	29	4	9	23	51
5.Bağıntı	7	16	16	36	2	4	20	44
Toplam	29	13	47	21	24	11	125	55

Tablo 5 incelendiğinde ÖA'ların bağıntıların ispatında oldukça başarısız oldukları anlaşılmaktadır. Bağıntıların yarısından fazlasında (%55) ÖA'lar ispat girişiminde dahi bulunmamıştır. Yine tablodan azımsanmayacak sayıda bağıntının ispatında (%21) ÖA'ların, istenen sonuca tam olarak ulaşamadıkları, eksik açıklamalar yaptıkları anlaşılmaktadır. Bunun yanı sıra, ÖA'ların yanlış bilgiler içeren ispat girişimleri (%11) de olmuştur. Ayrıca tabloda, özellikle ikinci ve üçüncü bağıntıda, ÖA'ların hiçbirinin geçerli ispat yapamadığı, dörtte üçünün (%76-77) ispat yapmayarak boş bıraktığı görülmektedir.

Tablo 5'te ÖA'ların en çok üçgenin iç açıları toplamının 180° olduğuna ilişkin birinci bağıntıda geçerli ispat (17) yaptıkları görülmektedir. Geçerli ispat yapan ÖA'lardan altısı paralel doğrular ve bu doğrular arasında kalan açıların özelliklerini kullanmıştır. Geçerli ispat yapan ÖA'ların yedisi "üçgenin bir dış açısının kendisine komşu olmayan iki iç açısının toplamına eşit olduğu" bilgisini kullanırken, dördü ise üçgenin iç açılarının birleştiğinde doğru açı oluştuğunu görsel olarak göstermiştir. Yine tablodan birinci bağıntıda ÖA'ların yarısından fazlasının (%64) ya geçerli ispat ya da kısmen geçerli ispat yaptığı görülmektedir. Kısmen geçerli ispat yapan ÖA'ların dokuzu üçgenin iç açılarını birleştirerek görsel olarak göstermiş, ancak doğru açı kavramını belirtmemiştir. Bu bağıntıda ispat yapmayarak boş bırakan ÖA sayısı (13) diğer bağıntılardan çok daha azdır.

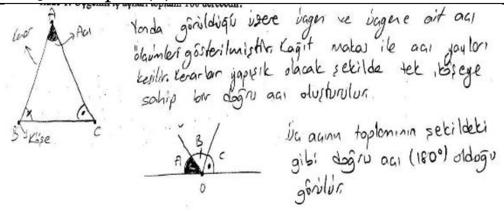
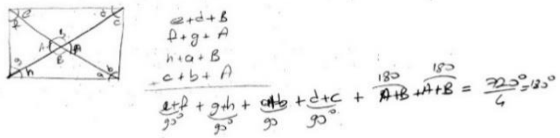
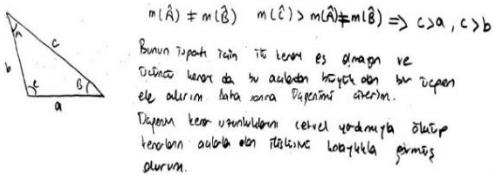
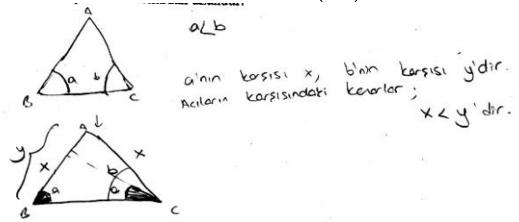
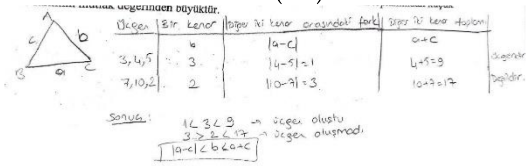
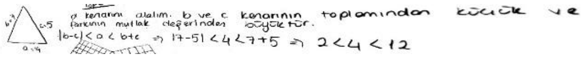
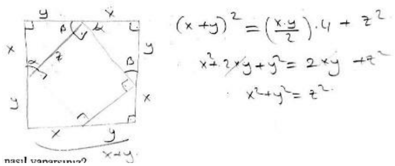
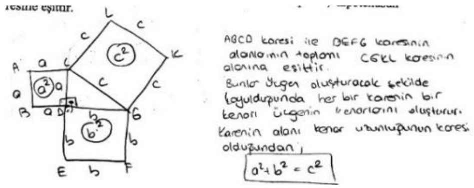
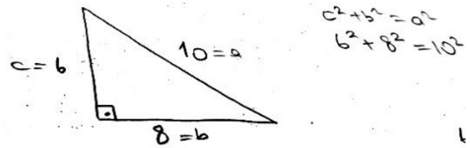
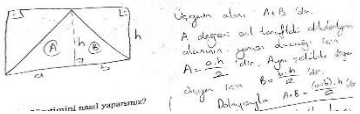
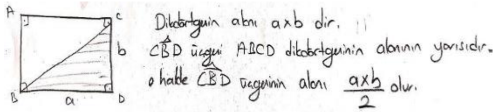
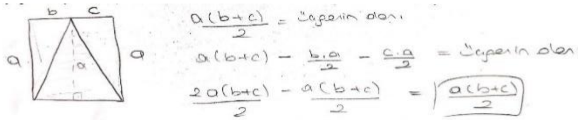
Yine Tablo 5'e bakıldığında, üçgenin büyük açısının karşında büyük kenar bulunduğuna ilişkin ikinci bağıntıda, ÖA'ların büyük bir kısmının (34) ispat girişiminde bulunmadan boş bıraktığı görülmektedir. İkinci bağıntıda ÖA'lardan hiçbiri geçerli ispat yapamamış ve oldukça az ÖA (3), kısmen geçerli ispat yapmıştır. Kısmen geçerli ispat yapan ÖA'ların ikisi deneysel yollarla bağıntının doğruluğunu açıklamış, biri ise bilinen tanıdık bir üçgen olan 30, 60, 90 üçgeninin kenar uzunluklarını açılarla ilişkilendirmiştir. Yine tablodan ÖA'ların (8) verilen bağıntılar arasında en çok bu bağıntıda geçersiz ispat yaptıkları görülmektedir. İspatları geçersiz olan ÖA'lardan altısı tamamen sezgisel olarak açı-kenar ilişkisini açıklamıştır. Ikisi ise geçerli ispat yapmaya çalışmış, ancak yanlış açıklamalar yapmıştır.

Tekrar Tablo 5 incelendiğinde, ikinci bağıntıda olduğu gibi üçgen eşitsizliğine ilişkin üçüncü bağıntıda da ÖA'ların büyük bir kısmının (35), ispat girişiminde bulunmadan boş bıraktığı görülmektedir. Ayrıca ÖA'ların hiçbiri, üçüncü bağıntıda geçerli ispat yapmamış ve oldukça az ÖA (3) kısmen geçerli ispat yapmıştır. Kısmen geçerli ispat yapan ÖA'ların ikisi deneysel yollarla bağıntının doğruluğunu açıklamış, biri ise bilinen tanıdık bir üçgen olan 3-4-5 üçgeninin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Yine tabloda ispatları geçersiz olan ÖA'ların (7) da bulunduğu görülmektedir. İspatları geçersiz olan ÖA'lardan dördü üçgen oluşup oluşmadığı belli olmayan herhangi sayı değerleri için bağıntıyı doğrulamış, üçü ise yanlış cebirsel açıklamalar yapmıştır.

Pisagor bağıntısına ilişkin dördüncü bağıntıda ise ÖA'ların yarıya yakını (23) ispat girişiminde bulunmadan boş bırakmıştır. Tabloda dördüncü bağıntıda oldukça az ÖA'nın (5) geçerli ispat yaptığı, ÖA'ların bir kısmının da (13) kısmen geçerli ispat yaptığı görülmektedir. Geçerli ispat yapan ÖA'ların dördü hem görsel hem cebirsel açıklamalarla Pisagor bağıntısını ispatlarken, biri Cosinüs teoremini kullanmıştır. Kısmen geçerli ispat yapan ÖA'lar ise, yine görsel açıklama kullansalar da açıklamaları yetersizdir. Yine tabloda, ispatları geçersiz olan ÖA'ların (4) da bulunduğu görülmektedir. İspatları geçersiz olan ÖA'ların ikisi, bilinen bir dik üçgenin (3-4-5 üçgeni), kenar uzunluklarını yerine koyarak, bağıntıyı sağladığını göstermiştir. İspatları geçersiz olan ÖA'lardan biri görsel olarak hatalı, biri ise cebirsel olarak hatalı ispat yapmıştır.

Tablo 5'te, üçgenin alan bağıntısına ilişkin beşinci bağıntıda da dördüncü bağıntıda olduğu gibi ÖA'ların yarıya yakınının (20) ispat girişiminde bulunmadan boş bıraktığı görülmektedir. Beşinci bağıntıda oldukça az ÖA (7) geçerli ispat yaparken, ÖA'ların yaklaşık üçte biri de (16) kısmen geçerli ispat yapmıştır. Geçerli ispat yapan ÖA'ların dördü görsel olarak paralelkenardan, üçü ise görsel olarak dikdörtgenden üçgenin alan bağıntısını elde etmiştir. Kısmen geçerli ispat yapan ÖA'ların 12'si dikdörtgenden yararlanarak, dik üçgen için alan bağıntısını elde etmiş, herhangi bir üçgen için bağıntının doğruluğunu göstermemiştir. Kısmen geçerli ispat yapan ÖA'ların dördü ise kareden yararlanarak, ikizkenar dik üçgen için alan bağıntısını elde etmiştir. Ayrıca beşinci bağıntı için ispatları geçersiz olan ÖA'lar (2) da bulunmaktadır. İspatları geçersiz olan ÖA'lar dik üçgenin alan bağıntısını ispatlarında kullanmıştır. ÖA'ların her bir bağıntı için ispatlarından bazı örnekler Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. *Bağıntılara ilişkin ÖA'ların ispat örnekleri*

	Geçerli İspat (a)	Kısmen Geçerli İspat (b)	Geçersiz İspat (c)
1.Bağıntı	 ÖA11 (1-a)		 ÖA23 (1-c)
2.Bağıntı		 ÖA6 (2-b)	 ÖA3 (2-c)
3.Bağıntı		 ÖA3 (3-b)	 ÖA27 (3-c)
4.Bağıntı	 ÖA8 (4-a)	 ÖA1 (4-b)	 ÖA32 (4-c)
5.Bağıntı	 ÖA38 (5-a)	 ÖA7 (5-b)	 ÖA18 (5-c)

Birinci bağıntı için ÖA11'e ait geçerli ispat örneği Tablo 6'da 1-a'da, bulunmaktadır. ÖA11 herhangi bir üçgenin açılarını keserek ve birleştirerek doğru açı elde edildiğini şekil çizerek göstermiştir. ÖA11, deneysel bir yolla yani materyaller kullanarak üçgenin iç açıları toplamının 180° olduğunu göstermiştir. 1-c'de ise, birinci bağıntı için ÖA23'e ait geçersiz ispat örneği bulunmaktadır Burada ÖA23'ün mantıklı bir yol izlemeden, dikdörtgen içinde oluşturduğu üçgenlerin açılarının toplamını kullanmaya çalıştığı ama herhangi bir sonuca ulaşamadığı görülmektedir.

Tabloda 2-b'de, ÖA6 koşullara uyan bir üçgen için kenar uzunluklarını ölçerek ilişkiyi görebileceğini ifade etmiştir. ÖA6 deneysel yöntemlerle bağıntının keşfedilmesine yönelik genel bir söylem yapmış tam olarak açıklamamıştır. 2-c'de, ÖA3 ise eş açı oluşturarak ikizkenar üçgenden kenar uzunlukları arasındaki ilişkiye ulaşmayı denemiş; ancak, eş açıyı yanlış şekilde oluşturmuştur. Bu yüzden de sonuca ulaşamamış yalnızca sonucu yazmıştır.

Tekrar Tablo 6 incelendiğinde 3-b'de, ÖA3'ün çeşitli kenar uzunlukları için iki kenarın toplamı ve farkını tabloya aktardığı ve üçgen oluşup oluşmadığını yorumladığı görülmektedir. ÖA3, tam bir açıklama yapmasa da kenarlar arasında ilişki kurmaya çalışmıştır. 3-c'de ise, ÖA27 üçgen oluşturduğunu bilmediği 4, 5 ve 7 uzunluklarını ele alarak, üçgen eşitsizliği bağıntısında yerine koymuştur. Burada aslında bu uzunlukların eşitsizliği sağladığını göstermiştir.

Yine Tabloda 4-a'da, ÖA8'in, karenin içerisine kare yerleştirerek, alan bağıntılarını kullanarak Pisagor bağıntısını ispatladığı görülmektedir. 4-b'de ise, dördüncü bağıntı için ÖA1'e ait kısmen geçerli ispat örneği bulunmaktadır. ÖA1 kenar uzunlukları ile karelerin alanlarının ilişkili olduğunu ifade etse de bu ilişkiyi açıklamamıştır. 4-c'de Pisagor bağıntısı için geçersiz ispat yapan ÖA32, bir örnek için sayısal değer vererek bağıntıyı sağladığını göstermiştir.

Son bağıntı olan beşinci bağıntı için 5-a'da, ÖA38'e ait geçerli ispat örneği bulunmaktadır. ÖA38, uzun kenarını a+b, kısa kenarını h olarak tanımladığı bir dikdörtgenin içerisine üçgeni yerleştirerek, dikdörtgenin alan bağıntısından yararlanarak ispat yapmıştır. 5-b'de ise ÖA7'nin dikdörtgenin alanından yararlanarak dik üçgenin alan bağıntısına ulaştığı ancak herhangi bir üçgenin alanına yönelik alan bağıntısı elde etmediği görülmektedir. 5-c'de, geçersiz ispat örneğinde ÖA18'in üçgenin alan bağıntısını elde etmek için dik üçgenin alan bağıntısını kullandığı görülmektedir.

Öğretmen Adaylarının Üçgenlere İlişkin Pedagojik Alan Bilgileri (PAB)

Araştırmanın ikinci sorusuna yönelik bulgular bu başlık altında sunulmuştur. ÖA'ların üçgenlere yönelik pedagojik alan bilgileri, alan ve öğretme bilgileri ve alan ve öğrenci bilgileri kapsamında değerlendirilmiştir. Bunun için ÖA'ların üçgenlere yönelik bağıntılara dair geliştirdikleri etkinlikler ve öğretim sırasında öğrencilerin yaşayacakları zorluklara ilişkin bilgileri incelenmiştir.

Alan ve öğretme bilgisine ilişkin bulgular:

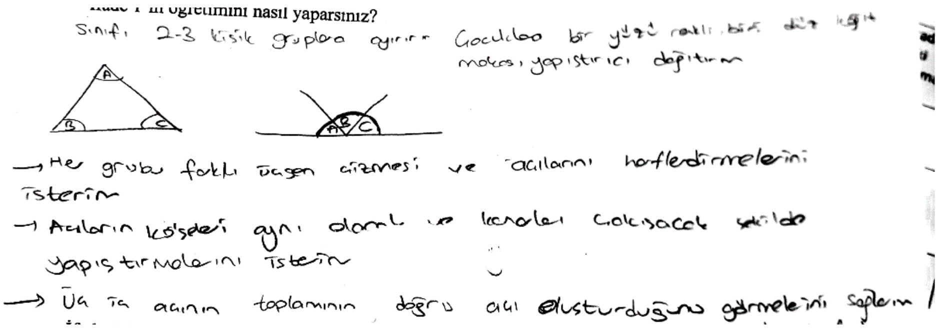
***Etkinliklere İlişkin Bulgular*:** Araştırmada, ÖA'ların üçgenlerle ilgili verilen bağıntılara ilişkin alan ve öğretme bilgisini değerlendirmek için, bağıntılara yönelik etkinlik geliştirmeleri istenmiştir. ÖA'ların geliştirdikleri etkinliklerin kategorilerine ilişkin frekans ve yüzde değerleri Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. *ÖA'ların geliştirdikleri etkinliklere ilişkin frekans ve yüzde değerleri*

	Geçerli Etkinlik		Kısmen Geçerli Etkinlik		Geçersiz Etkinlik		Boş	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1.Bağıntı	25	56	12	26	8	18	0	0
2.Bağıntı	6	13	28	62	9	20	2	4
3.Bağıntı	19	42	18	40	6	13	2	4
4.Bağıntı	1	2	34	76	6	13	4	9
5.Bağıntı	1	2	36	80	8	18	0	0
Toplam	52	23	128	57	37	16	8	4

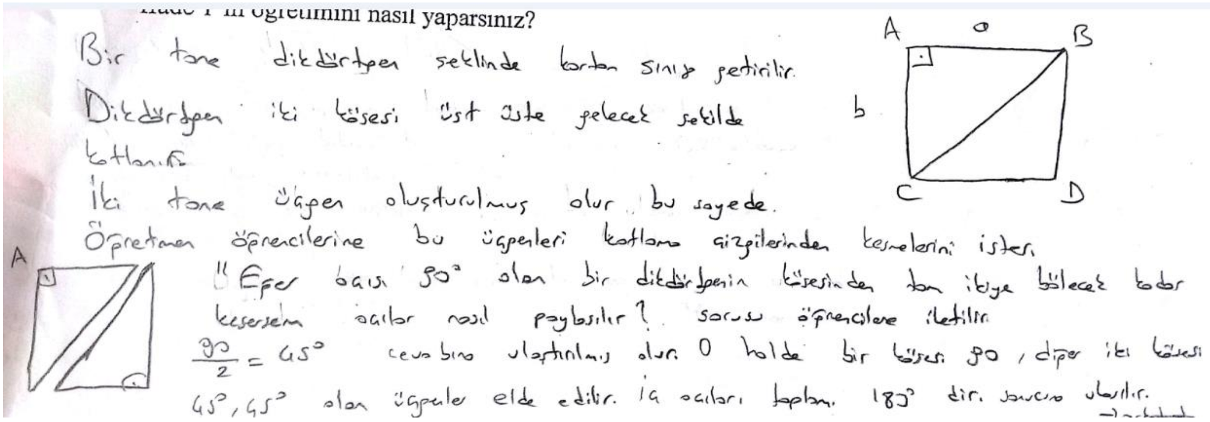
Tablo 7 incelendiğinde ÖA'ların bağıntılar için önerdikleri etkinliklerde, bağıntıların ispatındaki durumun tersine oldukça başarılı oldukları anlaşılmaktadır. Tabloda ÖA'ların bağıntılar için önerdikleri etkinliklerin yaklaşık dörtte üçünün (%80) geçerli etkinlik veya kısmen geçerli etkinlik olduğu görülmektedir. Yine tabloya göre öğretime yönelik olan bu sorunun boş bırakılma oranı oldukça düşüktür (%4).

Tablo 7'ye bakıldığında, ÖA'ların en çok geçerli etkinlik oluşturdukları (25), aynı zamanda en az kısmen geçerli etkinlik oluşturdukları (12) bağıntının, üçgenin iç açıları toplamının 180° olduğuna ilişkin birinci bağıntı olduğu görülmektedir. Geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar, genellikle öğrencilerin üçgenin iç açılarını kesip ya da katlayarak bir araya getirerek doğru açı oluştuğunu keşfetmelerine yönelik etkinlik önermiştir. Geçerli etkinlik oluşturan ÖA'ların ikisi ise çeşitli üçgenlerin iç açılarını ölçtürerek tablo üzerinden genellemeye ulaştıracak etkinlik önermiştir. Kısmen geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar da yine geçerli etkinlikte olduğu gibi öğrencilerin üçgenin iç açılarının toplamının doğru açı oluşturduğunu keşfetmeye yönelik etkinlik önerseler de ya doğru açıya vurgu yapmamış ya da katlama sırasında yeterli açıklama yapmamıştır. Tabloda etkinlikleri geçersiz olan ÖA'ların bulunduğu da görülmektedir. Geçersiz etkinlik oluşturan ÖA'lardan ikisi "üçgenin dış açıları toplamı 360°'dir" bilgisini kullanmıştır. Oysa müfredatta üçgenin dış açıları toplamı üçgenin iç açılarının toplamından sonra verilmektedir. Geçersiz etkinlik oluşturan ÖA'lardan biri dikdörtgenin iç açıları toplamından yararlanmıştır. Geçersiz etkinlik oluşturan ÖA'lardan ikisi ise bağıntıyla ilgisiz açıklamalar yapmıştır. Yine geçersiz etkinlik oluşturan ÖA'lardan ikisi bağıntıyı sözel olarak ifade ederken biri de "İlk önce doğruda açı kavramları benimsetilir. Daha sonra kapalı şekillerle de çalışmalar yapmaya başlanılır." biçiminde genel ifade kullanmıştır. Ayrıca tablodan birinci bağıntının, tüm ÖA'lar tarafından yanıtlandığı görülmektedir. ÖA'ların birinci bağıntıya ilişkin cevaplarından örnekler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2. Birinci bağıntı için geçerli etkinlik örneği (ÖA4)

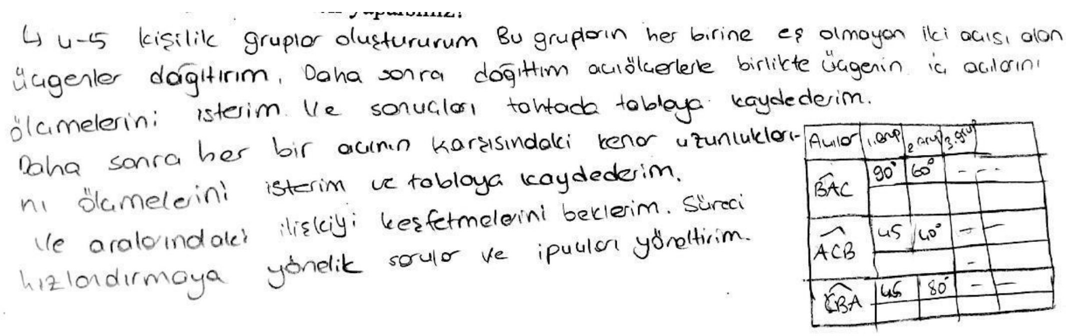
Şekil 2'de, birinci bağıntı için ÖA4'e ait geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. Burada ÖA4, iki, üç kişilik gruplarla birlikte çalışan öğrencilerin, üçgenlerin açılarını kesip, kenarları çakışacak şekilde birleştirerek, doğru açı oluştuğunu görmesini beklemektedir.



Şekil 3. Birinci bağıntı için geçersiz etkinlik örneği (ÖA39)

Şekil 3'de, birinci bağıntı için ÖA39'a ait geçersiz etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA burada, bir dikdörtgeni ikiye böldüğünde iki üçgen elde ettiğini ve dikdörtgenin köşegeninin açıları 45°'ye ayırdığını belirtmiştir. ÖA39'un dikdörtgenin özelliklerine hakim olmadığı ve hatta kavram yanılgısının olduğu anlaşılmaktadır.

Tablo 7 incelendiğinde, üçgenin büyük açısının karşında büyük kenar bulunduğuna ilişkin ikinci bağıntıda ÖA'ların yarısından fazlasının (28) kısmen geçerli etkinlik oluştururken, oldukça az kısmının geçerli etkinlik oluşturduğu görülmektedir. Geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar, öğrencilere çeşitli üçgenler vererek veya öğrencilerin çeşitli malzemelerle üçgenler oluşturmalarını isteyerek, kenar uzunluklarını ve açılarını ölçmelerini ve oluşturdukları tabloya not etmelerini ve tablodan her bir üçgenin açıları ile kenarları arasındaki ilişkiyi keşfetmelerini sağlayacaklarını ifade etmiştir. Kısmen geçerli etkinlik oluşturan ÖA'ların 19'u da geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar gibi öğrencilere üçgenlerin kenar uzunlukları ve açı ölçülerini ölçtürerek ilişki keşfetmelerini sağlayacaklarını ifade etseler de tek bir üçgen için ölçüm yapmış ve tablo oluşturmayı planlamamıştır. Dolayısıyla öğrencilerin bu şekilde ilişkiyi fark etmeleri pek mümkün değildir. Kısmen geçerli etkinlik oluşturan ÖA'ların dokuzu ise büyük açının karşısında büyük kenar bulunduğuna yönelik etkinlik geliştirseler de bağıntıyı tam karşılamamıştır. Yine tablodan en çok geçersiz etkinlik oluşturulan (9) bağıntının ikinci bağıntı olduğu görülmektedir. Etkinlikleri geçersiz olan ÖA'lardan dördü genel ifadeler kullanırken, beşi ise üçgenin açı kenar ilişkisiyle ilgisi olmayan açıklamalar yapmıştır. ÖA'ların ikinci bağıntıya ilişkin cevaplarından bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

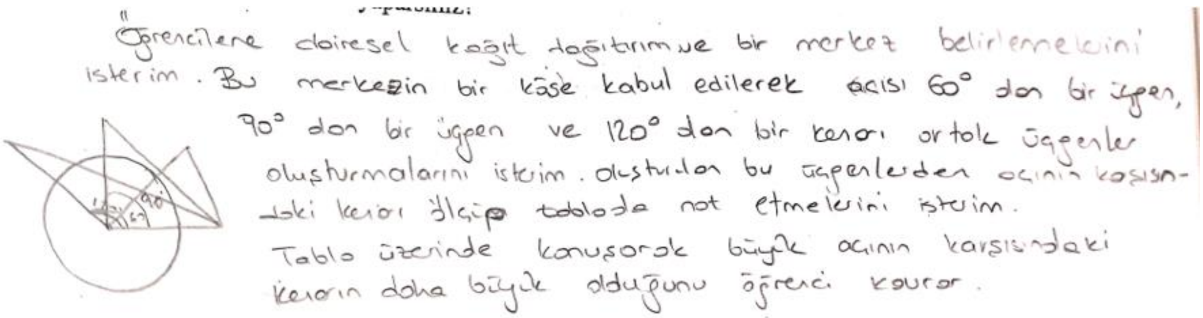


4 u-5 kişilik gruplar oluştururum. Bu grupların her birine eş olmayan iki açısı olan üçgenler dağıtırım. Daha sonra dağıttım açıölçerlerle birlikte üçgenin iç açılarını ölçmelerini isterim ve sonuçları tahtada tabloya kaydederim.
Daha sonra her bir açının karşısındaki kenar uzunlukları-nı ölçmelerini isterim ve tabloya kaydederim. Süreci ve aralarındaki ilişkiyi keşfetmelerini beklerim. Süreci hızlandırmaya yönelik sorular ve ipuçları yöneltirim.

Açılar	1.grup	2.grup	3.grup
$\widehat{BAC}$	90°	60°	- -
$\widehat{ACB}$	45	40°	- -
$\widehat{CBA}$	45	80°	- -

Şekil 4. İkinci bağıntı için geçerli etkinlik örneği (ÖA1)

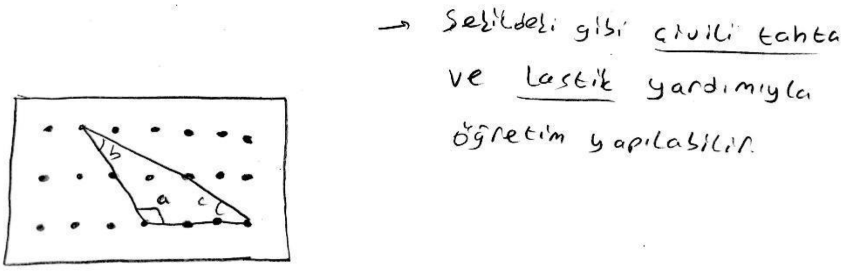
Şekil 4'de, ikinci bağıntı için ÖA1'e ait geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA1, öğrencilere çeşitli üçgenler dağıtarak açılarını ve kenarlarını ölçtürüp, tabloya kaydederek açılar ve kenarlar arasındaki ilişkiyi öğrencinin görmesini beklemiştir.



"Öğrencilere dairesel kağıt dağıtırım ve bir merkez belirlemelerini isterim. Bu merkezin bir köşe kabul edilerek açısı 60° dan bir üçgen, 90° dan bir üçgen ve 120° dan bir kenarı ortak üçgenler oluşturmalarını isterim. Oluşturulan bu üçgenlerden açının karşısın-daki kenarı ölçüp tabloda not etmelerini isterim.
Tablo üzerinde konuşarak büyük açının karşısındaki kenarın daha büyük olduğunu öğrenci kavrar.

Şekil 5. İkinci bağıntı için kısmen geçerli etkinlik örneği (ÖA13)

Şekil 5'de, ikinci bağıntı için ÖA13'e ait kısmen geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA13, 60, 90 ve 120 derecelik açıların karşısındaki kenar uzunluklarını karşılaştırmıştır. Böylece ölçümler yaptırarak büyük açının karşında büyük kenar olduğunu keşfettirmeyi amaçlamıştır. Ancak ÖA13, bu durumu bir üçgene taşıyamamış, bir üçgenin iç açıları ve karşısındaki kenarlara ilişkin bir karşılaştırmaya ulaşmamıştır.

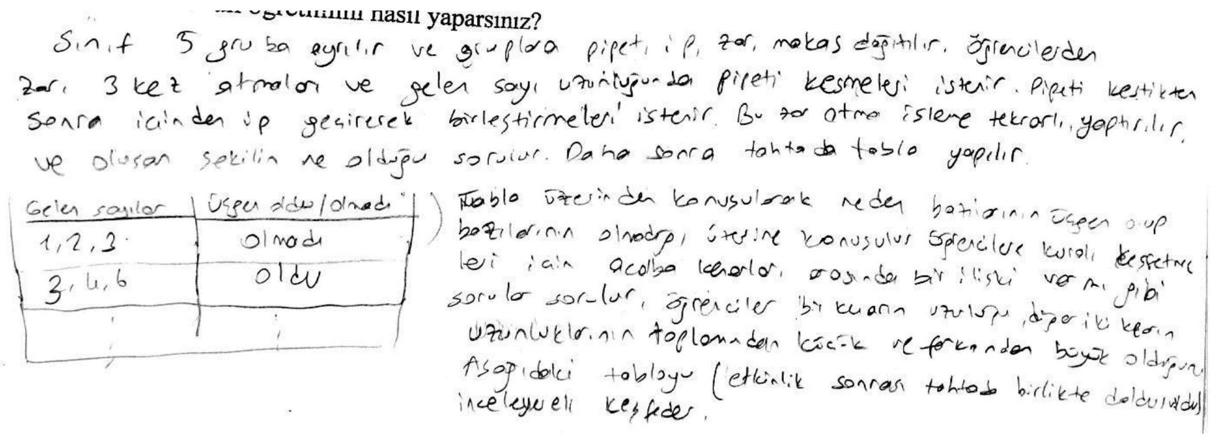


→ Şekildeki gibi çivili tahta ve lastik yardımıyla öğretim yapılabilir.

Şekil 6. İkinci bağıntı için geçersiz etkinlik örneği (ÖA42)

Şekil 6'da ÖA42'nin genel ifadeler kullandığı, belirtilen bağıntıya özel bir etkinlik geliştirmediği görülmektedir.

Tablo 7 incelendiğinde, üçgen eşitsizliğine ilişkin üçüncü bağıntıda ÖA'ların yaklaşık %40'ının (19) geçerli etkinlik oluşturduğu görülmektedir. Böylece üçüncü bağıntının, birinci bağıntıdan sonra en çok geçerli etkinlik oluşturulan bağıntı olduğu anlaşılmaktadır. Geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar, çeşitli uzunluklar için üçgen oluşup oluşmama durumunu incelemelerine ve üçgen oluşumu ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi keşfetmelerine yönelik etkinlik önermiştir. Yine tablodan üçüncü bağıntıda hemen hemen geçerli etkinlik oluşturan kadar ÖA'nın, kısmen geçerli etkinlik oluşturduğu (18) görülmektedir. Kısmen geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar da geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar gibi üçgen oluşup oluşmaması durumunu incelemelerine yönelik etkinlik önermiş olsalar da üçgen oluşumu ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi keşfetmelerini doğru biçimde planlayamamıştır. Genellemeye ulaşılamayacak biçimde tek bir üçgen örneğini ele almış, tablo oluşturmamış veya ilişkiyi sorgulatmamışlardır. Yine tablodan, etkinlikleri geçersiz olan ÖA'ların (6) da olduğu görülmektedir. Etkinlikleri geçersiz olan ÖA'lar, üçgen eşitsizliğini öğrencilere kendileri ifade ederek, uygulamasına ilişkin etkinlik planlamış veya genel ifadeler kullanmıştır. ÖA'ların üçüncü bağıntıya ilişkin cevaplarından bazı örnekler aşağıda verilmiştir.


... öğretimini nasıl yaparsınız?

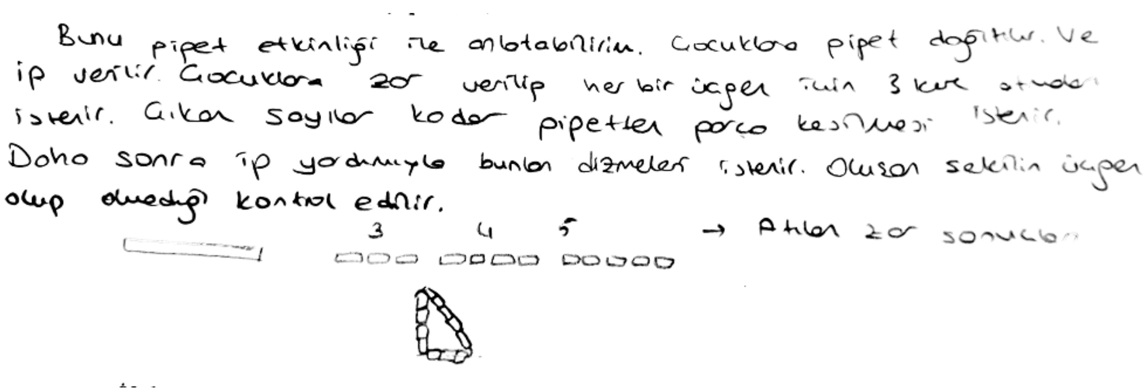
Sınıf 5 gruba ayrılır ve gruplara pipet, ip, zar, makas dağıtılır. Öğrencilerden zarı 3 kez atmaları ve gelen sayı uzunluğunda pipeti kesmeleri istenir. Pipeti kestikten sonra içinden ip geçirerek birleştirmeleri istenir. Bu zar atma işlemi tekrarlı yaptırılır ve oluşan şeklin ne olduğu sorulur. Daha sonra tahtada tablo yapılır.

Gelen sayılar	Üçgen oldu/olmadı
1,2,3	Olmadı
3,4,6	Oldu

Tablo üzerinden konuşularak neden bazılarının üçgen olup bazılarının olmadığı üzerine konuşulur. Öğrencilere kuralı keşfetmeleri için acaba kenarlar arasında bir ilişki var mı gibi sorular sorulur, öğrenciler bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunluklarının toplamından küçük ve farkından büyük olduğunu aşağıdaki tabloyu (etkinlik sonrası tahtada birlikte doldurulan) inceleyerek keşfeder.

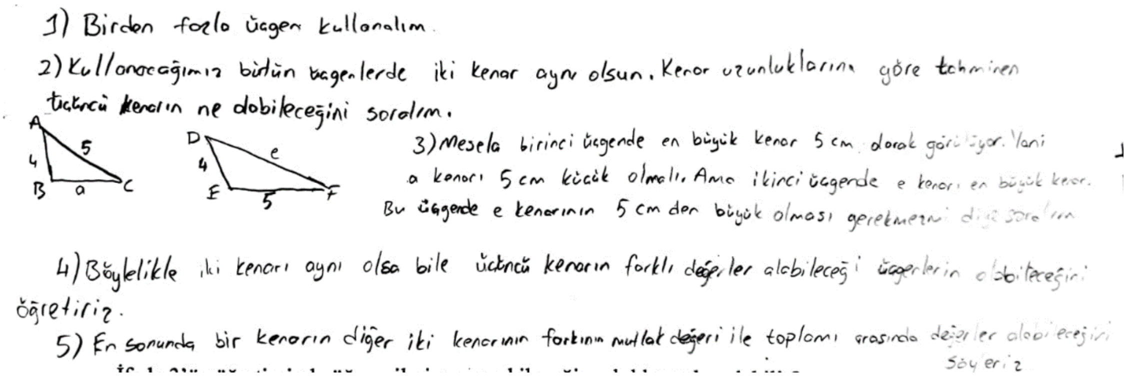
Şekil 7. Üçüncü bağıntı için geçerli etkinlik örneği (ÖA12)

Şekil 7'de, üçüncü bağıntı için ÖA12'ye ait geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA12, üçgen oluştururken rasgele sayılar elde etmek için zar kullanımını önermiştir. Üçgenin oluşup oluşmadığını görmeleri için de pipet ve iplerden faydalanmayı düşünmüştür. Üçgen oluşma durumlarını incelenmesi için tablo yapmayı planlamıştır.


Bunu pipet etkinliği ile anlatabilirim. Çocuklara pipet dağıtılır. Ve ip verilir. Çocuklara zar verilip her bir üçgen için 3 kez atmaları istenir. Çıkan sayılar kadar pipetler parça kesilmesi istenir. Daha sonra ip yardımıyla bunları dizmeler istenir. Oluşan şeklin üçgen olup olmadığı kontrol edilir.

Şekil 8. Üçüncü bağıntı için kısmen geçerli etkinlik örneği (ÖA33)

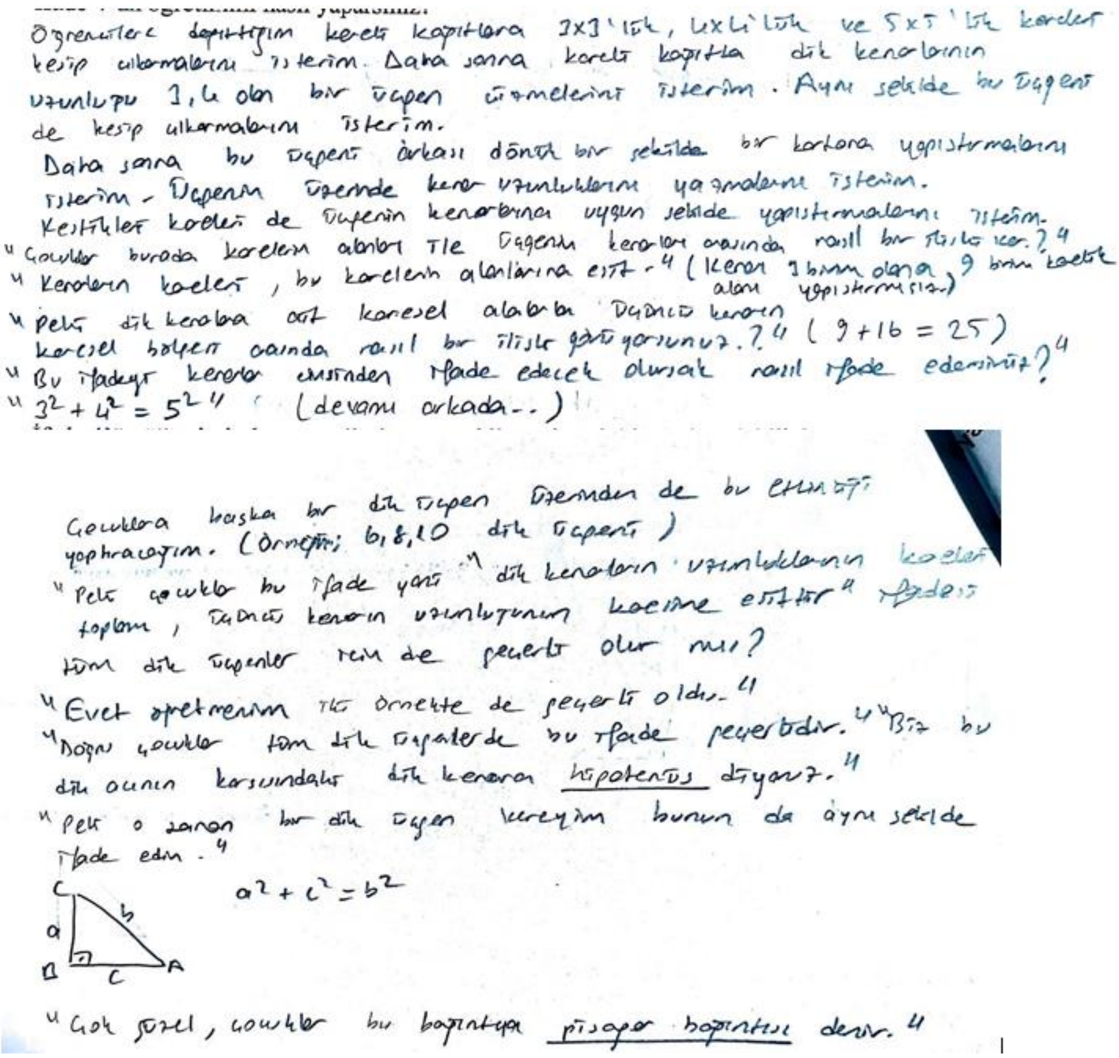
Şekil 8'de, üçüncü bağıntı için ÖA33'e ait kısmen geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA33 sadece üçgen oluşup oluşmama durumunu ele almıştır. Ayrıca sadece bir örnek vermiş ve tablo önermemiştir.



Şekil 9. Üçüncü bağıntı için geçersiz etkinlik örneği (ÖA28)

Şekil 9'da, üçüncü bağıntı için ÖA28'e ait geçersiz etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA28 burada, iki kenarı aynı olan üçgenlerin üçüncü kenarının farklı değerler alabileceğini keşfettirmeyi amaçlamıştır. Bunu yaparken de açı sabit kalıyor gibi düşünmüş ve en uzun kenar vurgusu yapmıştır. Ayrıca ÖA28'in bu etkinliğinin öğrenciler tarafından anlaşılması güçtür. Hatta öğrencilerde kavram yanılgıları oluşturabilecek bir etkinliktir.

Tablo 7'de, Pisagor bağıntısına ilişkin dördüncü bağıntının, ÖA'ların en az geçerli etkinlik oluşturdukları (1) bağıntılardan biri, aynı zamanda en çok kısmen geçerli etkinlik oluşturdukları (34) bağıntılardan biri olduğu görülmektedir. Geçerli etkinlik oluşturan ÖA dik üçgenin kenarları ile kenarlar üzerine inşa edilen karelerin alanları arasında ilişki kurdurarak bağıntının keşfine yönelik, bir etkinlik oluşturmuştur. Kısmen geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lar da yine geçerli etkinlikte olduğu gibi dik üçgenin kenarları üzerine inşa edilen kareler için etkinlik ortaya koysa da üçgenin kenarları ve karenin alanı arasındaki veya karenin alanları arasındaki ilişkiyi tam olarak açıklayamamış ve tek örnekle genelleme yapmıştır. Geçersiz etkinlik oluşturan ÖA'lardan beşi, dik üçgenin kenarlarını cetvelle ölçtürüp, öğrencilerden ilişki kurmasını bekleyeceğini ifade ederken, ÖA'lardan biri bağıntıyı öğrencilere direk söyleyeceğini belirtmiştir. ÖA'ların dördüncü bağıntıya ilişkin cevaplarından bazı örnekler aşağıda verilmiştir.



Ögrencilere dağıttığım kareli kağıtlara 3x3'lük, 4x4'lük ve 5x5'lik kareler kesip çıkarmalarını isterim. Daha sonra kareli kağıtla dik kenarlarının uzunluğu 3,4 olan bir üçgen çizmelerini isterim. Aynı şekilde bu üçgeni de kesip çıkarmalarını isterim.
Daha sonra bu üçgeni arkası dönük bir şekilde bir kartona yapıştırmalarını isterim. Üçgenin üzerinde kenar uzunluklarını yazmalarını isterim.
Kestikleri kareleri de üçgenin kenarlarına uygun şekilde yapıştırmalarını isterim.
"Çocuklar burada karelerin alanları ile üçgenin kenarları arasında nasıl bir ilişki var?"
"Kenarların kareleri, bu karelerin alanlarına eşit." (Kenarı 3 birim olana, 9 birim karelik alanı yapıştırmışsınız)
"Peki dik kenarlara ait karesel alanlar ile üçüncü kenarın karesel bölgesi arasında nasıl bir ilişki görüyorsunuz?" (9+16=25)
"Bu ifadeyi kenarlar cinsinden ifade edecek olursak nasıl ifade ederiz?"
"$3^2+4^2=5^2$" (devamı arkada..)

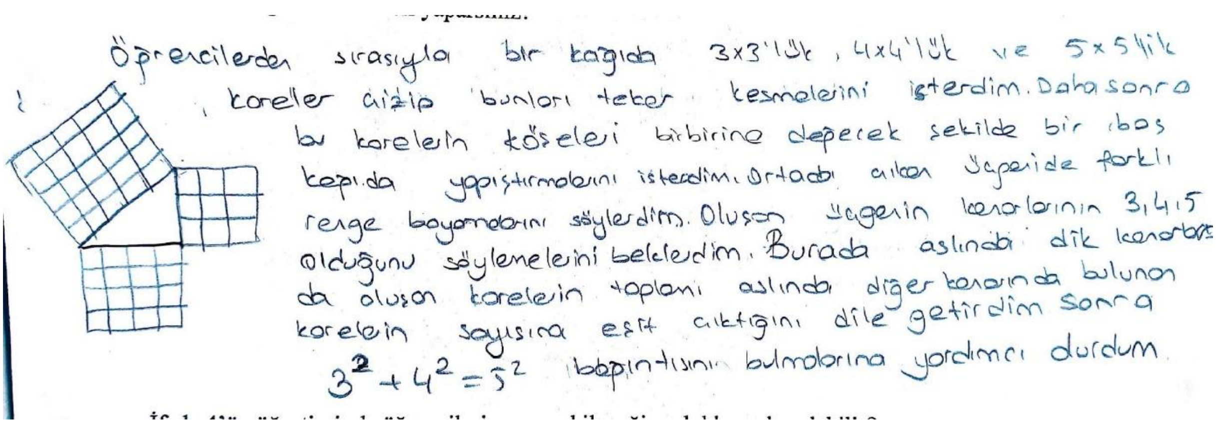
Çocuklara başka bir dik üçgen üzerinden de bu etkinliği yaptıracağım. (Örneğin; 6,8,10 dik üçgeni)
"Peki çocuklar bu ifade yani "dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı, üçüncü kenarın uzunluğunun karesine eşittir" ifadesi tüm dik üçgenler için de geçerli olur mu?
"Evet öğretmenim iki örnekte de geçerli oldu."
"Doğru çocuklar tüm dik üçgenlerde bu ifade geçerlidir." "Biz bu dik açının karşısındaki dik kenara hipotenüs diyoruz."
"Peki o zaman bir dik üçgen çizeyim bunun da aynı şekilde ifade edin."

$$a^2+c^2=b^2$$

"Çok güzel, çocuklar bu bağıntıya pisagor bağıntısı denir."

Şekil 10. Dördüncü bağıntı için geçerli etkinlik örneği (ÖA6)

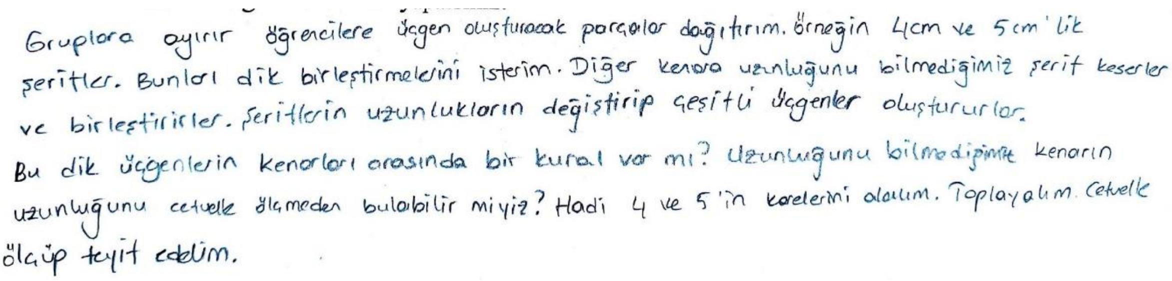
Şekil 10'da Pisagor bağıntısı için ÖA6'ya ait geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA6 planladığı etkinlikte öğrencilere öncelikle 3,4,5 dik üçgeninin kenarları üzerine kare inşa ettirmiş ve dik üçgenin kenar uzunlukları ile karelerin alanları arasında ilişki kurdurmuştur. Daha sonra karelerin alanları arasındaki ilişkiyi sorgulatmıştır. Böylece 3,4,5 üçgeni için Pisagor bağıntısının öğrenciler tarafından keşfedilmesini sağlamıştır. Başka dik üçgenler için de geçerli olacağını göstermek için örnekleri çeşitlendirerek genellemeye ulaşmalarını önermiştir.



Öğrencilerden sırasıyla bir kağıda 3x3'lük, 4x4'lük ve 5x5'lik kareler çizip bunları tek tek kesmelerini isterdim. Daha sonra bu karelerin köşeleri birbirine değecek şekilde bir boş kağıda yapıştırmalarını isterdim. Ortada çıkan üçgeni de farklı renge boyamalarını söylerdim. Oluşan üçgenin kenarlarının 3,4,5 olduğunu söylemelerini beklerdim. Burada aslında dik kenarlarda oluşan karelerin toplamı aslında diğer kenarında bulunan karelerin sayısına eşit çıktığını dile getirdim sonra $3^2+4^2=5^2$ bağıntısının bulmalarına yardımcı durdum

Şekil 11. Dördüncü bağıntı için kısmen geçerli etkinlik örneği (ÖA18)

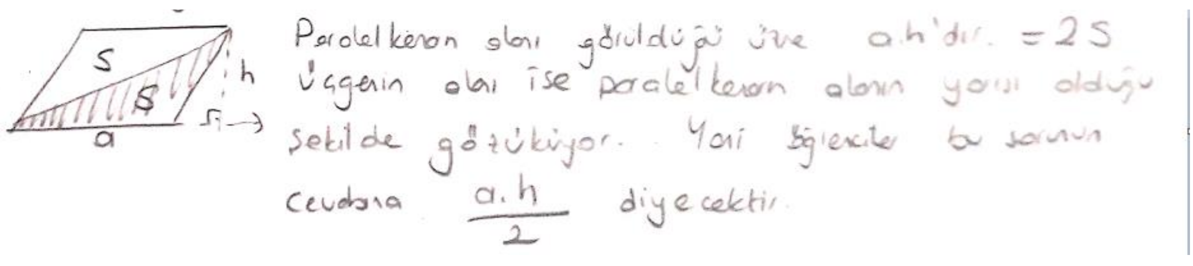
Şekil 11'de, dördüncü bağıntı için ÖA18'e ait kısmen geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA-18 öğrencilere 3,4,5 dik üçgeni ve kenarlar üzerine kareler inşa ettirerek Pisagor teoreminin doğrulamaya çalışmıştır. Ancak, üçgenlerin kenarları ile karelerin alanları arasında ilişki kurdurmamış ve diğer dik üçgenlere genelleme yaptırmak adına örnekleri çoğaltmamıştır.


Gruplara ayırır öğrencilere üçgen oluşturacak parçalar dağıtırım. Örneğin 4cm ve 5cm'lik şeritler. Bunları dik birleştirmelerini isterim. Diğer kenara uzunluğunu bilmediğimiz şerit keserler ve birleştirirler. Şeritlerin uzunluklarını değiştirip çeşitli üçgenler oluştururlar.
Bu dik üçgenlerin kenarları arasında bir kural var mı? Uzunluğunu bilmediğimiz kenarın uzunluğunu cetvelle ölçmeden bulabilir miyiz? Hadi 4 ve 5'in karelerini alalım. Toplayalım. Cetvelle ölçüp teyit edelim.

Şekil 12. Dördüncü bağıntı için geçersiz etkinlik örneği (ÖA22)

Şekil 12'de, Pisagor bağıntısı için ÖA22'ye ait geçersiz etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA22 burada dik kenarları 4 cm ve 5 cm olan üçgeni ele almıştır. Üçüncü kenar hakkında herhangi bir bilgi vermemiştir. Bu dik üçgenin kenarları arasında bir ilişki var mı diye öğrencilere sormuş ve üçüncü kenarın uzunluğunu cetvelle ölçmelerini söylemiştir. Öğrencilerin bu yönlendirmelerle Pisagor bağıntısına ulaşmaları mümkün değildir.

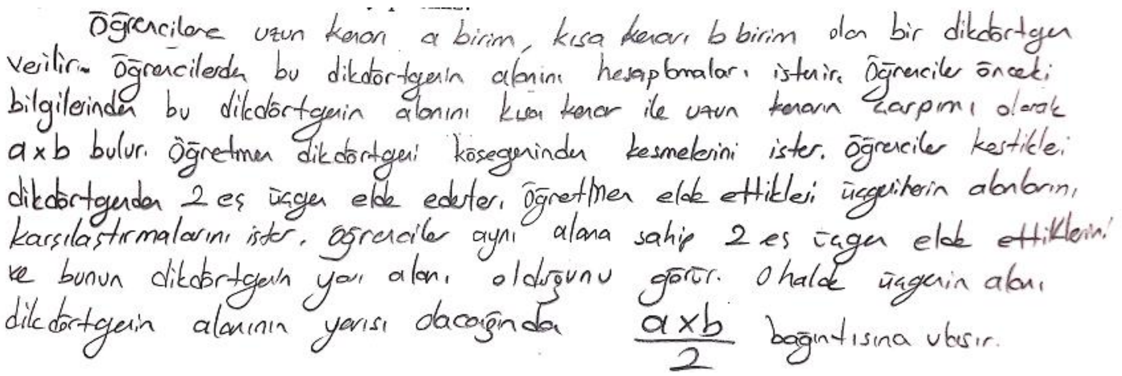
Beşinci bağıntı olan üçgenin alan bağıntısının da ÖA'ların en az geçerli etkinlik oluşturduğu (1) bağıntılardan biri olduğu ve aynı zamanda en çok kısmen geçerli etkinlik oluşturdukları (36) bağıntı olduğu Tablo 7'de görülmektedir. Geçerli etkinlik oluşturan ÖA, paralelkenarın alanından üçgenin alanını keşfetmeye yönelik etkinlik ifade etmiştir. Kısmen geçerli etkinlik oluşturan ÖA'ların büyük bir kısmı (25), dikdörtgenin alanından dik üçgenin alan bağıntısına yönelik etkinlik oluşturmuştur. Kısmen geçerli etkinlik oluşturan ÖA'lardan beşi, üçgenlerin alan ve yüksekliklerini verip bir ilişki kurarak alan bağıntına ulaşmalarına yönelik etkinlik oluşturmuştur. Ayrıca alan bağıntısının, ÖA'ların en çok geçersiz etkinlik oluşturulan (8) bağıntılardan biri olduğu da tablodan anlaşılmaktadır. Geçersiz etkinlik oluşturan ÖA'lardan dördü "dikdörtgenin alanından yararlanırım" gibi genel ifadeler kullanmıştır. ÖA'ların ikisi dik üçgenin alanını bildiklerini varsayarak üçgenin alanını elde etmelerine yönelik etkinlik geliştirirken, ikisi kareli kağıda çizilen üçgenin içindeki birim kareleri saydırarak alana ulaşmaya yönelik etkinlik oluşturmuştur. ÖA'ların beşinci bağıntıya ilişkin cevaplarından örnekler aşağıda verilmiştir.



Paralelkenar alanı görüldüğü üzre a.h'dır. = 2S
Üçgenin alanı ise paralelkenarın alanın yarısı olduğu şekilde gözüküyor. Yani öğrenciler bu sorunun cevabına $\frac{a.h}{2}$ diye çektir.

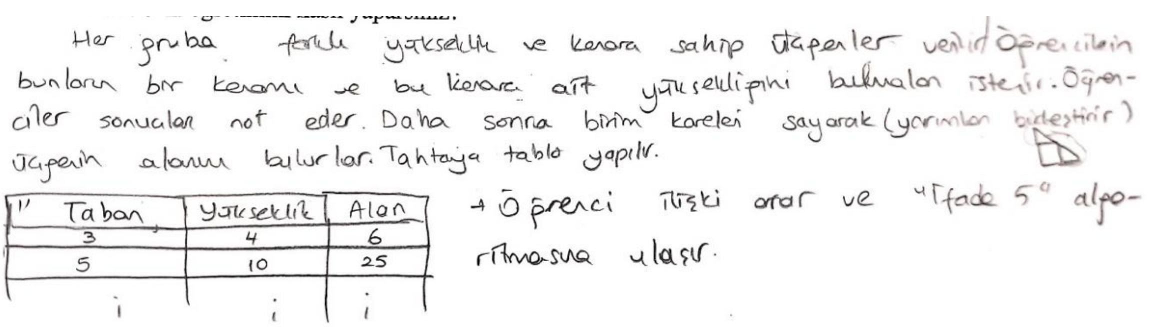
Şekil 13. Beşinci bağıntı için geçerli etkinlik örneği (ÖA21)

Şekil 13'de üçgenin alan bağıntısı için ÖA21'e ait geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA21 burada paralelkenarı köşegeninden ikiye böldüğümüzde aynı taban ve yüksekliğe sahip iki üçgen oluşacağını şekille göstererek, öğrencilerin paralelkenarın alan bağıntısından üçgenin alan bağıntısına ulaşmalarını planlamıştır.


Öğrencilere uzun kenarı a birim, kısa kenarı b birim olan bir dikdörtgen verilir. Öğrencilerden bu dikdörtgenin alanını hesaplamaları istenir. Öğrenciler önceki bilgilerinden bu dikdörtgenin alanını kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı olarak axb bulur. Öğretmen dikdörtgeni köşegeninden kesmelerini ister. Öğrenciler kestikleri dikdörtgenden 2 eş üçgen elde ederler. Öğretmen elde ettikleri üçgenlerin alanlarını karşılaştırmalarını ister. Öğrenciler aynı alana sahip 2 eş üçgen elde ettiklerini ve bunun dikdörtgenin yarı alanı olduğunu görür. O halde üçgenin alanı dikdörtgenin alanının yarısı olacağından $\frac{a \times b}{2}$ bağıntısına ulaşır.

Şekil 14. Beşinci bağıntı için kısmen geçerli etkinlik örneği (ÖA7)

Şekil 14'de, üçgenin alan bağıntısı için ÖA7'ye ait kısmen geçerli etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA7 burada, dikdörtgenin alan bağıntısından yararlanmıştır. Oluşturduğu etkinlikte, dikdörtgeni köşegeninden ayırdığında oluşan üçgenlerin dik üçgen olduğunu, bulduğu alan bağıntısının dik üçgenler için geçerli olduğunu belirtmemiş ve tüm üçgenler için geçerli olup olmadığını sorgulatmamıştır.


Her gruba farklı yükseklik ve kenara sahip üçgenler verilir. Öğrencilerin bunların bir kenarını ve bu kenara ait yüksekliğini bulmaları istenir. Öğrenciler sonuçları not eder. Daha sonra birim kareleri sayarak (yarımları birleştirir) üçgenin alanını bulurlar. Tahtaya tablo yapılır.

Taban	Yükseklik	Alan
3	4	6
5	10	25
⋮	⋮	⋮

+ Öğrenci ilişki oran ve "İfade 5" algoritmasına ulaşır.

Şekil 15. Beşinci bağıntı için geçersiz etkinlik örneği (ÖA14)

Şekil 15'de üçgenin alan bağıntısı için ÖA14'e ait geçersiz etkinlik örneği bulunmaktadır. ÖA14 burada, öğrencilerin kareli kağıtlarda verdiği üçgenler için birim kareleri sayarak alan bulmalarını ve yapılan tabloda taban, yükseklik ve alan arasında ilişki kurmalarını amaçlamaktadır. Ancak üçgenlerin alanı için birim kareleri saymaları konusundaki yaklaşımı hatalıdır. Kareli kâğıtta, oluşturulan üçgende, ÖA14'ün belirttiğinin aksine birim kareler hep ortasından bölünmeyeceği için birim kareleri bu şekilde tamamlamak mümkün değildir.

Alan ve öğrenci bilgisine ilişkin bulgular:

***Bağıntıların Öğretiminde Öğrencilerin Yaşayacağı Zorluklara İlişkin Bulgular*:** Araştırmada ÖA'ların üçgenlerle ilgili verilen bağıntılara ilişkin alan ve öğrenci bilgisini değerlendirmek için, bağıntıların öğretiminde ortaokul öğrencilerinin yaşayacağı zorlukların neler olabileceğini açıklamaları istenmiştir. Verilerin analizi sonucunda ÖA'ların bağıntılar için belirttiği ortak zorluklara ilişkin frekans ve yüzde değerleri Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. *ÖA'ların bağıntılar için belirttiği zorluklara ilişkin frekans ve yüzde değerleri*

Zorluklar	1.Bağıntı		2.Bağıntı		3.Bağıntı		4.Bağıntı		5.Bağıntı		Toplam
	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n
Motor Becerileri ile İlgili Zorluklar	27	60	18	40	8	18	1	2	0	0	54
İlişki Kurma-Bağıntıyı Keşfetmede Zorluk	2	4	7	16	21	47	14	31	5	11	49
Bilgi Eksikliğine Dayalı Zorluk	8	18	6	13	6	13	11	24	12	27	43
Tüm Üçgenlere Genellemede Zorluk	10	22	6	13	3	7	4	9	0	0	23
Yönergeyi Anlamada Zorluk	4	9	2	4	1	2	3	7	1	2	11
Zihinde Canlandırmada Zorluk	2	4	1	2	0	0	0	0	0	0	3

Tablo 8'den görüleceği üzere ÖA'ların belirttiği zorlukların frekansları bağıntıdan bağıntıya değişmektedir. Örneğin, birinci bağıntı için motor becerilerine ilişkin zorlukları belirten ÖA oldukça fazla iken (%60), dördüncü bağıntı için sadece bir ÖA belirtmiştir. Beşinci bağıntı için ise ÖA'lardan hiçbiri bu zorluğa değinmemiştir. Bunun sebebi bağıntıya göre öğretiminde bahsettikleri etkinliklerden kaynaklı olabilir. Yine de en çok belirtilen zorluk, motor becerilerine ilişkin zorluklar olmuştur. ÖA'lar motor becerilerine ilişkin olarak makas ile açıları kesmede, açıları bir araya getirerek birleştirmede, açıölçer ile açıları ölçmede, pergel ve cetvel kullanımında, ip geçirmede, ip bağlamada zorluklar yaşayabileceklerini ifade etmişlerdir. ÖA'ların en çok belirttiği ikinci zorluk ilişki kurma-bağıntıyı keşfetmede zorluk olmuştur. İlişki kurma-bağıntıyı keşfetmede zorluk yaşayabileceklerini genel ifadeler ile belirten ÖA'ların yanısıra verilen bağıntıyı ifade eden ÖA'lar da bulunmaktadır. Örneğin; ÖA31 üçüncü bağıntı için "bağıntıyı keşfetmekte zorluk yaşayabilirler." biçiminde ifade ederken, ÖA30 dördüncü bağıntı için zorluğu "Kenarların uzunluklarının karesinin hipotenüsün kenarına eşit olma durumunu kavrayamaz ve karesi ifadesine ulaşamayabilir." biçiminde ifade etmiştir. Tablodan da görüleceği üzere, ÖA'lar tarafından en çok bahsedilen bir diğer zorluk, bilgi eksikliğine dayalı zorluklar olmuştur. Bilgi eksikliğine dayalı zorluk olarak, ön bilgi eksikliklerinden kaynaklı zorluklar yaşayabilecekleri şeklinde genel ifadeler kullanan ÖA'ların yanısıra bağıntıya özgü belli bir konuyu belirten ÖA'lar da bulunmaktadır. Bahsedilen ÖA'lar birinci bağıntı için doğru açının 180° olduğunu, çokgenin iç açıları toplamının 360° olduğunu, yöndeş ve içters açıları; ikinci bağıntı için açı kavramını, açı çeşitlerini ve üçgen çeşitlerini; üçüncü bağıntı için mutlak değeri ve eşitsizlik kavramını; dördüncü bağıntı için üçgenin alanını, karenin alanını ve köklü sayıları; beşinci bağıntı için dikdörtgenin alanını, dik üçgenin alanını, yükseklik kavramını ve köşegen kavramını bilmemelerinden kaynaklı zorluk yaşadıklarını ifade etmişlerdir. Bahsedilen bu zorlukların yanı sıra bağıntıları tüm üçgenlere genellemede de zorluklar yaşanacağını belirten ÖA'lar da olmuştur. Örneğin; birinci bağıntı için üçgenlerin iç açılarının toplamının farklı büyüklükteki üçgenler için farklı olacağını düşünebileceklerini, bağıntıyı tüm üçgenlere genellemede zorluk yaşayacaklarını belirten ÖA40'ın ifadesi şu şekildedir.

> "Bazı öğrenciler üçgenleri büyük bazıları küçük kesmiş olacak. Küçük üçgen kesen biri büyük üçgen kesen arkadaşının iç açıları toplamını daha büyük bulabileceğini düşünür. Yapılan etkinlikle bunun böyle olmadığını kendileri fark eder."

ÖA40 burada üçgenin iç açılarını birleştirerek doğru açı elde edecekleri etkinliği öğretim kısmında önermiştir.

Tablo 8'de bahsedilen zorluklar dışında ÖA'lar, birinci bağıntı ve beşinci bağıntı için bu bağıntılara özgü başka zorluklar da belirtmiştir. Bu zorluklar; birinci bağıntı için "doğru açı oluştuğunu görmede zorluk (n=8; %18)" iken beşinci bağıntı için "dikdörtgen, kare veya paralelkenardan üçgen oluşturmada zorluk (n=10; %22)", "oluşan 2 üçgenin eş olduğunu görmede zorluk (n=7; %16)", "üçgenin yüksekliğinin dikdörtgenin kenarına eşit olduğunu görmede zorluk (n=3; %7)", "tabana ait yüksekliği bulmada zorluk (n=5; %11)" tur.

Sonuç olarak, KAB kapsamında GAB'leri için ortaokul müfredatında yer alan üçgen bağıntılarına ilişkin matematiksel gösterimleri ve ispatları incelenen ÖA'ların eksiklerinin, hatta yanlışlarının olduğu anlaşılmaktadır. ÖA'ların matematiksel gösterim durumlarının, bağıntıdan bağıntıya değişiklik gösterdiği, "üçgen eşitsizliği" ve "Pisagor bağıntısı" için %60, ve %80 oranında doğru gösterim olmasına karşın. özellikle açı kenar ilişkisine yönelik ikinci bağıntı ve beşinci bağıntı olan alan bağıntısı için doğru gösterimin oldukça az olduğu görülmüştür. Diğer yandan, bağıntıların ispatının ÖA'lar tarafından pek yapılamadığı, boş bırakılan ve geçersiz ispat olarak değerlendirilen durumların (%66) oldukça çok olduğu belirlenmiştir. Özellikle üçgende açı kenar ilişkisine yönelik ikinci bağıntı ve üçgen eşitsizliğine yönelik üçüncü bağıntılarda ÖA'ların neredeyse tamamının (%93) ya boş bıraktığı ya da ispatlarının geçersiz olduğu görülmüştür. PAB dahilinde alan öğretme bilgileri kapsamında üçgenlere yönelik bağıntılar için geliştirdikleri etkinlikleri incelenen ÖA'ların geçerli ve kısmen geçerli etkinliklerinin (%80), geçersiz etkinliklere (%16) oranla oldukça fazla olduğu tespit edilmiştir. Özellikle üçgenin iç açılarının toplamına ilişkin birinci bağıntı ve üçgen eşitsizliğine ilişkin üçüncü bağıntıda ÖA'ların neredeyse yarısının (%56-%42) etkinlikleri geçerli bulunmuştur. Bununla birlikte ÖA'ların, üçgenlere yönelik bağıntıların öğretiminde ortaokul öğrencilerinin karşılaşacağı genel zorluklardan bahsetmelerine karşın, bağıntıya özgü zorluklardan bahsetmedikleri saptanmıştır.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada ÖA'ların üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin var olan KAB ve PAB'larını ortaya koymak amaçlanmıştır. Bunun için ortaokul müfredatındaki üçgenlerle ilgili bağıntılara ilişkin ÖA'ların bilgilerini ortaya çıkarabilecek sorular sorulmuştur. Bağıntılar için ÖA'ların toplam doğru matematiksel gösterimlerinin (%43), tüm gösterimlerinin yarısından az olduğu görülmüştür. ÖA'ların bağıntılar için toplam geçerli ispatlarının (%13) ve toplam kısmen geçerli ispatlarının (%21) da oldukça düşük olduğu belirlenmiştir. Bu durum ÖA'ların konu alan bilgisi kapsamında genel alan bilgilerinin yeterli olmadığını göstermektedir. Diğer yandan ÖA'ların bağıntıların öğretimine yönelik geliştirdikleri tüm etkinliklerin %80'inin geçerli etkinlik ve kısmen geçerli etkinlik olduğu tespit edilmiştir. Bu oldukça iyi bir orandır. Bu da ÖA'ların pedagojik alan bilgileri kapsamında öğretme bilgilerinin oldukça yeterli olduğunu göstermektedir. Ancak ÖA'ların bağıntıların öğretiminde, öğrencilerin muhtemel zorluklarını tanımlamada konuya özgü bilgilerinin yeterli olmadığı belirlenmiştir. Bu da pedagojik alan bilgisi kapsamında ÖA'ların alan ve öğrenci bilgilerinin yetersizliğine işaret etmektedir.

GAB bileşenlerinden biri matematiksel dilin doğru bir şekilde kullanılmasıdır (Ball ve diğerleri., 2008). Bunun için, ÖA'ların bağıntıları ifade ederken kullandıkları notasyonlar, semboller ve yaptıkları çizimler değerlendirilmiştir. Bulgulara göre, ÖA'ların çoğu, açı, derece, kenar, alan, mutlak değer gibi sembollere dikkat etmeden ve bağıntı ile ilgili tüm koşulları dikkate almadan gösterim yaptıkları için, doğru gösterimler yarıdan azdır. Bu durum, Ubah (2021) tarafından ulaşılan sonuçlara benzer olarak, çoğu ÖA'nın matematiğin kendine ait dilini doğru bir şekilde kullanamadığını göstermektedir. Ayrıca iç açıların toplamı ve açı-kenar ilişkisinde gösterim yapmayanlar da vardır. ÖA'ların ortaokuldan beri bilmelerine rağmen bu bağıntıların gösterimini boş bırakmaları dikkat çekicidir. En çok doğru gösterimin yapıldığı bağıntı, üçgen eşitsizliğidir. Bunun sebebi, üçgen eşitsizliği bağıntısını lisans alan derslerinde kullanmaları olabilir. Yapılan tüm gösterimlerin doğru ya da kısmen doğru olduğu bağıntı da alan bağıntısıdır. Ancak çoğunluk, taban ve bu tabana ait yüksekliği belirtmediği için kısmen doğru olarak gösterebilmiştir. Öğretmen bilgisinin, öğrenci bilgisini oluşturduğunu düşündüğümüzde (Blömeke ve Delaney, 2012; Even ve Tirosh, 1995; Hill, Rowan ve Ball, 2005), ÖA'ların üçgenin alanında dikkat etmediği bu noktanın (Alatorre ve Saiz, 2009; Altıntaş ve İlgün, 2017; Cunningham ve Roberts, 2010; Gutiérrez ve Jaime, 1999), öğrencilerde eksik bilgi ve hatta kavram yanılgısına sebep olacağı düşünülebilir.

GAB ayrıca konuyla ilgili kuralları, tanımları, teoremleri bilmeyi gerektirir (Ball ve diğerleri., 2008). Ancak bu çalışmanın bulguları ÖA'ların üçgenlerle ilgili bağıntıların ispatında oldukça başarısız olduklarını göstermiştir. Özellikle açı-kenar ilişkisi ve üçgen eşitsizliği bağıntılarında ÖA'ların hiçbirinin geçerli ispat yapamadığı, hatta büyük çoğunluğun hiç ispat yapmadığı görülmüştür. Bu kategori kapsamında alan bağıntısının ispatını geçerli ve kısmen geçerli yapan ÖA'lar genellikle paralelkenar, dikdörtgen ve kareden yararlanarak bağıntıyı elde etmişlerdir. Yew, Zamri ve Lian (2010) da üçgenin alan bağıntısını bu şekilde açıklayamayanların, formülü anlamlı bir şekilde öğrenmemiş oldukları sonucuna varmıştır. Ancak mevcut çalışmadaki ispatların çoğunda dik üçgen için alan bağıntısına ulaşılmış, herhangi bir üçgen için bağıntının doğruluğu genellenmemiştir. Bu yüzden çoğu ispat kısmen geçerli olarak değerlendirilmiştir. Sonuç olarak ÖA'ların üçgenlerle ilgili bağıntılar için genel olarak geçerli ispat yapmakta zorlandıkları, ispat girişimlerinde yeterli açıklama yapamadıkları, gerekçelerini sunamadıkları söylenebilir. Güner ve Topan (2016) da öğretmen adaylarının üçgen öğretimindeki teoremlerin ispat becerilerinin zayıf olduğu sonucuna varmıştır. Genelde ispat olarak, belirli örnek değerler için doğrulama yaptıkları da saptanmıştır. Öğretmen ve öğretmen adayları ispat yapma kavramını, belirli örnekler üzerinde doğrulamak ve hesaplamalar yapmak olarak yorumlayabilmektedir (Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Simon ve Blume, 1996; Weber, 2001). Uygun (2016) araştırması sonucunda argümantasyon çerçevesinde geometrik şekilleri inşa etmenin öğretmen adaylarının ispat yapmalarını kolaylaştırdığını belirtmiş ve hatta üçgen konu alan bilgilerinin geliştiği sonucuna ulaşmıştır.

AÖtB açısından ÖA'ların bağıntılar için önerdikleri etkinliklerde, bağıntıların ispatındaki durumun tersine oldukça başarılı oldukları anlaşılmıştır. Bağıntılar için önerdikleri etkinliklerin çoğu geçerli veya geliştirilmesi gereken etkinliktir. Ayrıca boş bırakılma oranı oldukça düşüktür. Burada dikkat çeken nokta, ÖA'ların bir örnek üzerinden genellikle açı-kenar ilişkisi ve üçgen eşitsizliği bağıntısını keşfettirmeyi planladıkları görülmüştür. Bu durum da öğrencilerin bu bağıntıların her zaman geçerli oluğunu anlamasına engel olabilir ve kavram yanılgısı oluşturabilir. Pisagor bağıntısının öğretimi için geliştirilen etkinlerinin çoğu kısmen geçerlidir. Çünkü dik üçgenin kenarları üzerine inşa edilen kareler gösterilse de üçgenin kenarları ve karenin alanları arasındaki ilişki tam olarak açıklanmamış ve tek örnekle genelleme yapılmıştır. Huang ve Leung (2002) da yaptıkları öğretim analizlerinde Chech ve Hong Kong öğretmenlerinin teoremi görsel olarak doğrulama eğiliminde olduğunu ifade etmiştir. Zazkis ve Zazkis (2016) de benzer şekilde öğretmen adaylarının Pisagor teoreminin öğretimi için görsel ve sayısal gösterim kullanma eğiliminde olduğunu belirtmiştir. Bu teoremin kavramsal öğretimi için, Moutsios-Rentzos ve diğerleri (2014) dik açılı bir üçgenin kökenleri ile deneyimsel düşünme ve ardından bunu soyutlaştırarak aksiyomatik sistemde kanıtlanmış bir cebirsel ifadeye dönüştürme sürecinin, öğrenci anlayışlarını desteklediğini vurgulamıştır. Yang'ın (2009) çalışmasındaki öğretmen de öğrencilerin Pisagor teoremini anlamalarını desteklemek için dersini önermelerin gerekçelendirilmesi ve önermelerin üretilmesi şeklinde revize ederek geliştirmiştir. En fazla kısmen geçerli etkinlik oluşturulan bağıntı ise üçgenin alan bağıntısıdır. Çünkü çoğu ÖA dikdörtgenin alanından yararlanarak sadece dik üçgenin alan bağıntısına yönelik etkinlik oluşturmuş ve bunu herhangi bir üçgen için genellememiştir ve kısmen geçerli olmuştur.

AÖB açısından ÖA'lar öğrencilerin yaşayabileceği olası zorluklara değinmiştir. Ancak çoğunlukla motor becerilere ilişkin, bilgi eksikliğine dayalı, ilişkiyi görmede, yönergeyi anlamada zorluk gibi her konunun öğreniminde yaşanabilecek genel zorluklara değinmişlerdir. Halbuki yeterli AÖB konuya özgü zorluk ve kavram yanılgılarına hakim olmayı gerektirir (Ball ve diğerleri., 2008). Yurtyapan ve Karataş (2020) da çalışmalarında öğretmenlerin üçgenlere ilişkin öğrencilerin kavram yanılgılarını doğru tespit ettiklerini ve sebebini açıklayabildiklerini belirtmiştir. Bilik'in (2016) çalışmasında, öğretmen adayları alanı bulurken öğrencilerin taban ve bu tabana ait yüksekliği belirlemede problem yaşadığını ifade edebilmişlerdir. Bu çalışmada da bu zorluğu belirten ÖA'lar olmuştur. Nitekim, öğrencilerle yapılan çalışmalarda, üçgenlerle ilgili bağıntılara özgü kavram yanılgıları tespit edilmiştir. Bu zorlukların dışında ayrıca alan yazında, üçgenlerin alanını bulurken öğrencilerin taban ve bu tabana ait yüksekliğin çarpımını ikiye bölmedikleri (Orhan, 2013); üçgenin alanını bulmak için öğrencilerin üç kenar uzunluğunu çarptığı, çevre hesabı yaptığı, dik üçgenin alanı için hipotenüs ile bir dik kenarı çarptığı (Gökdal, 2004) görülmüştür. Ancak bu çalışmadaki ÖA'lar bu zorlukları belirtmemiştir.

Genel olarak, ÖA'ların konu alan bilgilerinin, matematiksel dil kullanımı ve ispat yapma açısından yeterli olmadığı görülmüştür. Pedagojik Alan Bilgisi açısından da ÖA'ların öğretim sürecini tam olarak planlayamadıkları söylenebilir. Öğrencilerin düşünüşü ile ilgili bilgileri de yetersizdir. Bu yüzden, öğretmen adaylarının bilgilerinin geliştirilmesinin yanı sıra, öğretim pratiklerinin de öğretmenlik uygulama derslerinde iyileştirmesi amaçlanmalıdır. Öğrencilere ait gerçek veya temsili çözümler, alan öğretimi derslerinde öğrencilerin anlayışlarını ve kavramlarını analiz etmek için kullanılabilir. İleriki araştırmalarda, öğretmen adayları ile görüşmeler yapılarak daha detaylı bulgular elde edilmesi ve öğretmen eğitiminin son yılında uygulama dersleri almakta olan öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi planlanmaktadır.

Ahi Evran University
Journal of Kırşehir Education Faculty

ISSN: 2147 - 1037

KEFAD
http://kefad.ahievran.edu.tr

ENGLISH VERSION

Introduction

One of the most significant aspects of the learning process is the teacher. During instruction, it is crucial that the teacher's content knowledge be exact and comprehensive (Shulman, 1986). In addition to content knowledge, the teacher's understanding of which models should be utilized during the teaching of the subject, how to arrange the activities, the difficulties that the students may encounter, and the precautions to be taken in response to these issues is crucial (Ball, 2000; Ball, Thames, and Phelps, 2008).

Geometry, a subfield of mathematics, assists students in comprehending their environment and associating mathematical ideas (Fidan and Türnüklü, 2010; Luneta, 2015; NCTM, 2000; Patkin and Levenberg, 2012). Triangles are also one of the geometry topics taught to children as early as preschool (Ubuz and Aydın, 2018). In elementary school, students are taught fundamental principles relating to the definition of the triangle. In middle school, they are taught multiple connections relating to the triangle's angle and side characteristics. Relationships for the sum of the interior angles of a triangle (5th grade), area (6th grade), triangle inequality (8th grade), angle and side (8th grade), and Pythagorean (8th grade) are included in the middle school curriculum (Ministry of National Education (MEB), 2018). However, while explaining these relationships, teachers often present them as formulae. The geometry subject knowledge and geometry teaching competence of instructors should be sufficient for conceptual geometry instruction (Gutiérrez and Jaime, 1999; Jones, 2000). This study aims to assess the knowledge of pre-service teachers on triangular relationships, their knowledge of how to teach these relationships, and the difficulties that middle school students may experience.

Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)

The concept of teacher knowledge was first defined by Shulman (1986) and later elaborated and developed by many researchers (e.g., Cochran, DeRuiter, and King, 1993; Grossman, 1990). Some mathematics education researchers have also defined this concept specifically for mathematics teachers (e.g., An, Kulm, and Wu, 2004; Ball et al., 2008; Fennema and Franke, 1992; Rowland, Turner, Thwaites, and Huckstep, 2009). In addition to having strong conceptual content knowledge, teachers should know the relationship between concepts and students' thinking. In this sense, the content knowledge that teachers should have and the ways of using this knowledge in practice based on student thinking are the fundamental components of teaching (Ball, 2000). Because it is special to mathematics, the notion of "Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)" implemented by Ball et al. (2008) has been broadly embraced by mathematics educators.

MKT consists of Subject Matter Knowledge (SMK) and Pedagogical Content Knowledge (PCK) categories (Figure 1). As one of the components of SMK in MKT, Common Content Knowledge (CCK) is the mathematical knowledge used by everyone who engages with mathematics. Multiplying fractions, understanding that the square is a particular instance of the rectangle, and understanding that 0/5 equals zero are examples of such knowledge. With this understanding, instructors can accurately answer issues and use terminology and notations. Specialized Content Knowledge (SCK) refers to the mathematics-specific knowledge that mathematics instructors should possess. It goes beyond conceptual knowledge. Teachers use this information for pedagogical purposes. A teacher with this knowledge may, for instance, model multiplication with fractions, distinguish between separation and comparison in subtraction, and explain reversing the divisor in the division. The teacher must grasp both the conceptual structure and the visual features of the mathematical topic for the learner to comprehend it. Horizon Content Knowledge (HCK), on the other hand, refers to the teacher's understanding of related subjects at previous and subsequent levels of the mathematical subject/concept he is teaching. The awareness of the link between the concepts of fractions and ratios is an example of horizon content knowledge.

The Knowledge of Content and Students (KCS) component of PCK entails teachers designing their mathematics lessons considering students' thinking, interest, level, difficulties, misconceptions, and subject-specific knowledge. For example, the teacher should be aware of the misconception that children add fractions by thinking like natural numbers without equating the denominator. The second component of PCK, Knowledge of Content and Teaching (KCT), needs teachers to be able to make teaching decisions, arrange topics for instruction, choose examples, and evaluate the efficacy of models and representations. In connection to the above scenario, one example of this sort of knowledge is the teacher's use of unit fractions and models while teaching addition to prevent this error. The third component of PCK, Knowledge of Content and Curriculum, refers to the arrangement of topics in accordance with the curriculum, as well as the activities and explanations proposed by the curriculum. This form of knowledge includes the accomplishments of fractions at various grade levels (Aslan-Tutak and Koklü, 2016).

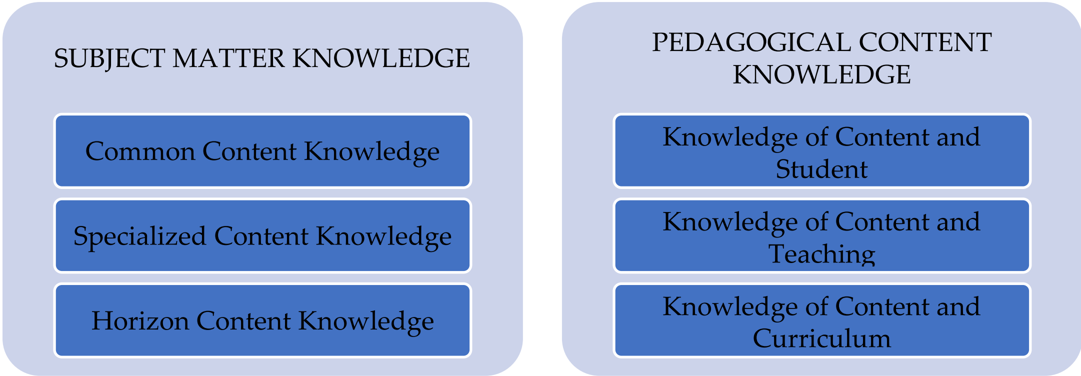


Figure 1. Mathematical knowledge for teaching (Ball et al., 2008)

In this study, the MKT model was used to examine the pre-service teachers' knowledge of relations related to triangles. The MKT model was chosen because mathematicians thought it would provide better and more meaningful results because it is specific and detailed.

Pre-service Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge about Triangles

Examining the literature, it has been determined that the geometry knowledge of pre-service teachers is often inadequate (see Aslan-Tutak and Adams, 2015; Couta and Vale, 2014). Specifically, there are studies that assess the triangle teaching knowledge of mathematics teachers. Most of these studies in the literature concentrate on the content knowledge of teachers and prospective teachers. These studies involve the definition and concept image of triangles, knowledge and perception of height, the notion of area, the Pythagorean theorem, and similar triangles.

Definitions are one of the major components of subject matter knowledge (Johnson, Blume, Shimizu, Graysay, and Konnova, 2014; Zazkis and Leikin, 2008). Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai, and Tabach (2014) studied preschool teacher definitions. The researchers determined that the teachers provided the right definition of a triangle by elaborating on its mathematical qualities. However, they also observed that the right definition does not necessarily correspond to the proper shape of the triangle. For a similar purpose, Ulusoy (2021) examined pre-school and middle school mathematics teacher candidates' triangle definitions and concept images. She concluded that the pre-service teachers had difficulties in explaining the definition of triangle, exemplary and non-example situations and their justifications using necessary and sufficient conditions. Pre-service teachers and teachers had trouble distinguishing right triangles when the right sides are not vertical and horizontal and obtuse triangles outside the prototype examples (Van der Sandt and Nieuwoudt, 2003; Ward, 2004). One of the concepts that are frequently discussed within the scope of triangle content knowledge is the height and, thus, the orthocenter. Gutierrez and Jaime (1999) investigated pre-service teachers' understanding of the concept of height in a triangle. They identified common errors in pre-service teachers' comprehension and concluded that they had a weak concept image. Hızarcı, Ada, and Elmas (2006) also found that a small number of pre-service mathematics teachers were able to correctly define the altitude and the orthocenter in a triangle, and most of them tried to create the orthocenter in the inner region of the triangle. Similarly, pre-service teachers drew the heights in the right triangle and obtuse triangles incorrectly since the heights in the acute triangle are always drawn in the inner region of the triangle (Altıntaş and İlgün, 2017; Cunningham and Roberts, 2010; Gutiérrez and Jaime, 1999). Alatorre and Saiz (2009) also examined the content knowledge of teachers and prospective teachers in the context of the concept of height in a triangle, base in a triangle, triangle inequality and Pythagorean theorem. Their findings showed that teachers gave more correct answers than novice teachers. Despite this, the researchers generally stated that the participants had misconceptions and difficulties with the items containing these concepts about triangles. Some pre-service teachers thought that there was only one base in a triangle and it should be in a horizontal position (Alatorre and Saiz, 2009; Altıntaş and İlgün, 2017).

Similar triangles are another research focus involving the triangle knowledge of teachers and prospective teachers (Ubah, 2021). While prospective teachers identify similar triangles and express them in writing, Ubah (2021) examined their usage of notations, letters, and side length ratios. Although the majority of prospective teachers were able to see the similarities, they struggled to translate them into a symbolic expression, such as "triangle similarity." Consequently, it has been argued that employing visual representations while detecting similar triangles may aid in the development of pre-service teachers' geometry content understanding (Ubah, 2021). Apart from the concepts mentioned, teachers' misconceptions, such as confusing the concepts of centroid and orthocenter of the triangle and using the concept of height in a Euclidean equation, were also mentioned within the subject matter knowledge of triangles (Altıntaş and İlgün, 2017).

Teachers’ and pre-service teachers' knowledge of and ability to prove triangle formulae and theorems may also be assessed based on their subject knowledge. In this regard, Güner and Topan (2016) also analyzed the triangle teaching theorems utilized in middle school (sum of interior angles in a triangle, Pythagorean theorem, area formula, angle-side relationship and triangle inequality). Researchers requested that prospective elementary school mathematics teachers prove the aforementioned propositions. It has been established that their general proof abilities are inadequate, and they only validate for specific sample values. Generally, prospective teachers favor simple and practical answers.

In the literatüre review, it has been found that most research evaluating pedagogical content knowledge of triangles concentrates on the triangle concept, teaching the Pythagorean theorem, triangle area, and triangle misconception/difficulty understanding. Jin and Wong (2021) investigated the effects of three approaches they employed in eighth grade to conceptualize triangles. These strategies include 1) definition-example-non-example for the meaning of the ideas, 2) a concept map for understanding the links between concepts, and 3) the classic paper-and-pencil method for working with concepts and their attributes. The researchers determined that these three approaches to conceptual comprehension complement one another.

One of the subjects in which the pedagogical content knowledge of triangles is examined is the teaching of the Pythagorean theorem. There are studies that deal with the learning of this theorem from both the perspective of teachers and students. Zazkis and Zazkis (2016) asked pre-service mathematics teachers to continue the Pythagorean theorem, whose proof was given in the context of a scenario involving teacher-student dialogues. In their written scenarios, pre-service instructors noted algebraic operations and recurring student errors. They also suggested various instructional strategies, such as using visual numerical notation and reminding, to eliminate this error. Huang and Leung (2002) analyzed and presented the Pythagorean theorem teachings of the distinct teachers in three different locations (Hong Kong, Shanghai, and Chech). While Chech and Hong Kong teachers tended to verify the theorem visually, Shanghai teacher focused on mathematical proof. While the Shanghai teacher made the student learn the Pythagorean theorem with his own configuration, other teachers also gave some information to the students. Yang (2009) also investigated the evolution of Pythagorean theorem instruction in a Shanghai teacher's teaching-research group. In this form of teaching-research group, often seen in Chinese schools, the course is revised after discussions on supporting student learning. The teacher taught the Pythagorean theorem to three different classes. While the teacher's first lesson theorem was focused on practice, the second lesson was revised to justify propositions, and the third lesson to produce propositions. In the student dimension, Moutsios-Rentzos, Spyrou, and Peteinara (2013) looked at the effect of an instructional design used in the teaching of the Pythagorean theorem. The researchers found that the students in the experimental group were able to develop different understandings compared to the control group in the instructional design in which the Pythagorean theorem was developed. He also emphasized that experiential thinking with the origins of a right triangle and then abstracting it into an algebraic expression proven in the axiomatic system supports student understanding.

One of the studies examining prospective teachers' knowledge of students' possible misconceptions is Bilik's (2016) study. Bilik (2016) examined pre-service teachers' knowledge of misconceptions and difficulties students may have about the area in the triangle. Pre-service teachers stated that possible misconceptions and difficulties related to the area are related to the concept of height. They especially stated that they had problems determining the base and the height of this base, and they suggested the discussion method to eliminate these misconceptions. Yurtyapan and Karataş (2020) evaluated the knowledge of teachers through three scenarios for the angle-side relationship and the determination of orthocenter for triangles. The researchers stated that while most of the teachers answered the questions about the angle-side relationship in a triangle correctly, most of the teachers could not answer the question about the determination of the orthocenter correctly. Furthermore, the researchers stated that the teachers generally correctly identified the students' misconceptions and were able to explain why.

Examining the literature, the themes of defining triangles in the subject matter knowledge of teachers and pre-service teachers and demonstrating the concept image, height, area, the Pythagorean theorem, similar triangles, and the relationships of triangles were generally investigated. Pre-service teachers, according to the studies, have insufficient knowledge and even misunderstandings of some concepts (e.g., the orthocenter). In the pedagogical content knowledge of triangles, the teaching of the triangle concept, and the Pythagorean theorem, prospective teachers' knowledge of misconceptions and difficulties about triangle area and triangles were investigated. These studies also suggest that pre-service teachers are often aware of potential student misconceptions. In addition, they have advised using student-centered methodologies and strategies to implement conceptual teaching.

Significance and Purpose of this Study

When examining the research as a whole, it is evident that one or more triangle-related ideas are emphasized (such as definition, area, and the Pythagorean theorem). In consideration of the overall middle school mathematics curriculum, all triangle-related relations are discussed in this study. Middle school pre-service mathematics teachers should have sufficient knowledge of these relations. In addition, it can be said that there are few studies on the relations in triangles that examine pre-service teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge simultaneously. At this point, the current study focused on both types of knowledge simultaneously. This study assessed both the triangle-related relationships and the topic and pedagogical content knowledge of pre-service teachers. Thus, it is aimed at reaching more comprehensive results regarding the knowledge of pre-service teachers about triangles.

This study aims to reveal the existing knowledge of pre-service teachers about relations in triangles. The present study intends to determine the existing subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of the preservice middle school mathematics teacher about the relations in triangles, to determine the deficiencies in this knowledge, and to make suggestions to overcome these deficiencies. In line with these purposes, this study aimed to answer the following question, "What is the knowledge of pre-service middle school mathematics teachers about the relations in triangles?" This research problem is organized according to sub-questions as follows:

1. What is the subject matter knowledge of the pre-service middle school mathematics teachers in terms of common content knowledge about relations in triangles?

2. What is the pedagogical content knowledge of the pre-service middle school mathematics teachers, including the knowledge of content and teaching and the knowledge of content and students regarding the relations in triangles?

Method

This study was designed with a qualitative research method, and data collection and analysis were carried out in this context. Qualitative research provides a detailed study of a subject, together with the participants' comments on that subject. In particular, a case study, one of the qualitative research methods, was used. Case studies are preferred in qualitative studies to identify the details that make up a situation, to develop possible explanations for a situation, and to examine a situation in depth to answer the questions of what, how, and why the study is focused on (Yıldırım and Şimşek, 2016; Gall, Gall, and Borg, 2007; Yin, 2003). In the current study, it was investigated whether the pre-service teachers had sufficient subject matter knowledge and pedagogical content knowledge to teach relations in triangles. For this, the solutions and explanations of the pre-service teachers were examined and the case study design was used.

Participants

This study was conducted with 45 third-grade students at a teacher training program in the Faculty of Education. The reason why especially third-year students were chosen is that at the end of the sixth semester, they both took the field courses, such as Abstract Mathematics, Geometry, Analytical Geometry, and Analysis and took the Methods of Mathematics Teaching I course. Thus, they have almost completed both their knowledge of mathematics and their knowledge of how to teach this information. In the following sections, the pre-service teachers are called “PTs.”

Data Collection

The data for the present study were derived from the PTs' responses to open-ended questions about triangles. While determining these questions, the related learning objectives of triangles at the fifth, sixth, and eighth-grade levels in the middle school curriculum were taken into account (MEB, 2018). Five objectives were determined. Relevant ones have been preferred because these objectives for which the PTs can suggest constructivist activities. The relations included in the objectives are as follows:

1. Relation: “The sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees.” (5th grade)

2. Relation: “If a triangle has two non-congruent angles, the side opposite the larger angle is longer than the side opposite the other angle.” (8th grade)

3. Relation: “Triangle Inequality: In a triangle, the length of one side is less than the sum of the lengths of the other two sides, and its difference is greater than the absolute value.” (8th grade)

4. Relation: “Pythagorean relation: In a right triangle, the sum of the squares of the right sides’ lengths is equal to the square of the length of the hypotenuse.” (8th grade)

5. Relation: “Area relation: The area of a triangle is equal to the half of the multiplication of the length of a side by the length of its height.” (6th grade)

The PTs were asked four open-ended questions for each of these relations. In the open-ended questions, they were asked to express the mathematical notations of each relation, make their mathematical proofs, explain how they would teach these relations, and explain the difficulties students might experience during teaching. These questions were created based on the “Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)” model proposed by Ball et al. (2008). The questions were finalized by taking the opinion of a researcher in mathematics education about the content and understandability of the questions. The data were collected by the researchers in the Methods of Mathematics Teaching II course. The PTs were given approximately 60 minutes to answer the questions. The questions asked to the PTs and their relationships with the components of the MKT model are shown in Table 1.

Table 1. *Questions asked to PTs and their relationship with the components of the MKT model*

Purpose of this Study		***Questions Asked the PTs***
Subject Matter Knowledge	Common Content Knowledge	Show the given relation with mathematical symbols. Prove the given relation.
Pedagogical Content Knowledge	Knowledge of Content and Teaching	How do you develop an activity for the given relation?
	Knowledge of Content and Students	What difficulties might students experience while teaching the given relation?

Data Analysis

The research data were analyzed using content analysis (Yıldırım and Şimşek, 2013). The data obtained from the answers given by PTs to the open-ended questions were coded separately by the researchers and 89% agreement was calculated among the codes that emerged. The researchers reconsidered the different codes, and a consensus was reached. The codes that emerged from the analysis are given in Table 2.

Validity and Reliability

To increase the internal validity of this study, the literature was considered while preparing the open-ended questions. The questions were determined according to the MKT model, which is the focus of this study. The researchers explained to PTs that their answers did not affect their grades to make them feel comfortable while answering the questions. The research process is reported in detail to increase external validity. For the reliability of this study, the percentage of agreement of the codes obtained from the data analysis was calculated. In addition, the findings were given directly without comment.

Table 2. *Codes resulting from content analysis*

			Codes	Explanation
Subject Matter Knowledge	Common Content Knowledge	Mathematical Notation	Correct Notation	Drawings made correctly considering mathematical notations and notations where mathematical language is used correctly.
			Partially Correct Notation	Correct drawings without attention to notations or notations that lack mathematical language
			Incorrect Notation	Representations and incorrect drawings that do not correspond to the given relation
			No Notation	The situation where there is no representation and no drawing
		Proof of Relationships	Valid Proof	Proofs that reach the desired with logical and consistent explanations based on mathematical information, rules, propositions or visuals, even using experimental ways, such as cutting, pasting, and folding.
			Partially Valid Proof	Proofs including explanations in which some of the mathematical information is used, incomplete information, and inconclusive proofs
			Invalid Proof	Proofs using incorrect mathematical information, explanations that are unrelated to the relation, and using specific examples
			No Proof	The case of no proof of the relation
Pedagogical Content Knowledge	Knowledge of Content and Teaching	Developing Instructional Activity	Valid Activity	Activities that provide students to explore and reason with a constructivist approach.
			Partially Valid Activity	Activities that do not include incorrect information have deficiencies, but can be developed and made usable for teaching
			Invalid Activity	Explanations that include incorrect information, not proving the relation, and are in the form of application of the relation, or very general statements
			No Activity	The situation in which activity for teaching the relation is not developed
	Knowledge of Content and Students	Difficult	Difficulties Common to Each Relation	General difficulties that students may have in the relations
			Specific Difficulties to the Relation	Relation-specific difficulties students may have with the relations

Ethical Permissions

In this study, all the rules specified to be followed within the scope of the "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" have been complied with. None of the actions specified under the heading "Actions Contrary to Scientific Research and Publication Ethics," which is the second part of the directive, have been taken.

Ethics committee permission information: Name of the ethical review board= Trakya University Research and Publication Ethics Committee

Date of ethical assessment decision= 26.04.2023

Ethical assessment certificate number number= 2023.04.17

Findings

The findings of this study, which aims to determine the SCK and PCK of PTs regarding triangles, are presented under two headings. As a result of the analyses, the frequency tables of common content knowledge, knowledge of content and teaching, knowledge of content and students, and examples from the answers of PTs are given. The findings are explained in the context of the MKT model.

PTs' Subject Matter Knowledge (SMK) of Relations in Triangles

The findings for the first research question are presented in this section. The SMK of PTs on triangles was assessed within the context of common content knowledge. For this, the mathematical notations and proofs of the PTs for the relations in triangles were examined.

Findings regarding common content knowledge:

Findings Related to the Mathematical Notations of the Relations: In this study, the PTs were asked to express the relationships mathematically to evaluate their common content knowledge about the relationships given about triangles. The frequencies and percentages related to the categories of mathematical notations of the PTs are given in Table 3.

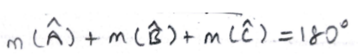
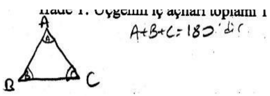
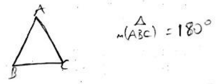
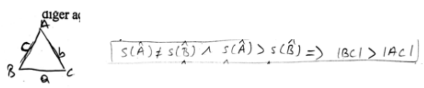
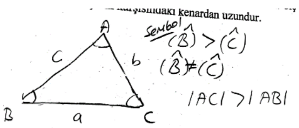
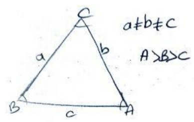
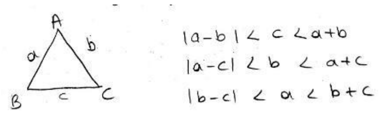
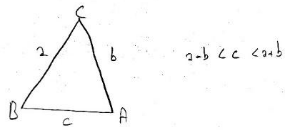
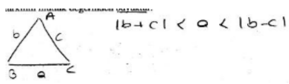
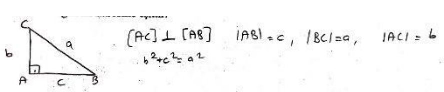
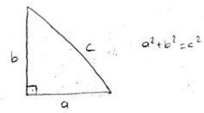
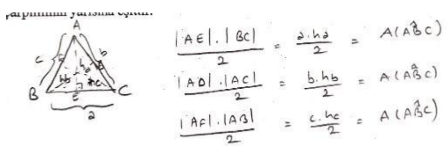
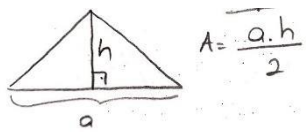
Table 3. *Frequencies and percentages related to PTs' mathematical notations of relations*

	Correct notations		Partially correct notations		Incorrect notations		No notations	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1st Relation	14	31	19	42	2	4	10	22
2nd Relation	12	27	18	40	3	6	12	27
3rd Relation	36	80	4	9	1	2	4	9
4th Relation	27	60	14	31	0	0	4	9
5th Relation	7	16	38	84	0	0	0	0
Total	96	43	93	41	6	3	30	13

Table 3 shows the mathematical notations of the PTs' vary according to the given relations. For example, in the second relation, which indicates that the long side is opposite the major angle in the triangle, 12 PTs showed correct, while 27 PTs showed correctly in the fourth relation, which indicates the Pythagorean relation. As shown in Table 3, the total correct notations of the relations were less than half (43%) of all notations. Incorrect notations accounted for 3% of all notations, while those left blank (13% were relatively high). It is understood from the table that the notations of the first and second relations are mostly left blank.

The findings showed that the PTs for the first relation were mostly partially correct (42%). It is noteworthy that although the PTs knew the sum of the interior angles of a triangle since middle school, almost a third (31%) of them made correct representations. In fact, it has been seen that although the PTs had knowledge of the sum of the interior angles of the triangles, the notation was not paid attention to in the representation of the angles or the mathematical representation of this expression, which is customary to be verbally expressed, is not given importance. Again in Table 3, for the second relation, as in the first relation, it was seen that the PTs' notations are mostly partially correct (40%). In the third relation, it is a remarkable finding that significantly more PTs (80%) showed correctly compared to other expressions. It is understood from the table that the fourth relation was also shown correctly by the majority (60%) of the PTs. In fact, for the fourth relation, almost all (91%) of the PTs made correct or partially correct representations. In addition, the fifth relation was the one in that PTs made the least correct impressions (16%), while they were mostly partially correct (84%). That is, all of the PTs showed correct or partially correct representations in the fifth relation. Some examples of mathematical representations of the PTs for each relation are given in Table 4.

Table 4. *Examples of mathematical notations of PTs' for the relations*

	Example of correct notation (a)	Example of partially correct notation (b)	Example of incorrect notation (c)
1st Relation	 PT6 (1-a)	 PT12 (1-b)	 PT44 (1-c)
2nd Relation	 PT43 (2-a)	 PT5 (2-b)	 PT23 (2-c)
3rd Relation	 PT14 (3-a)	 PT19 (3-b)	 PT15 (3-c)
4th Relation	 PT37 (4-a)	 PT22 (4-b)	
5th Relation	 PT29 (5-a)	 PT27 (5-b)	

When the examples in Table 4 are examined, the PTs who made correct representations for each relation paid attention to the notation in their drawings, showed the angles and sides on the figure and wrote the relation mathematically correctly. For example, in Figure 2-a, PT43 used the symbols "and," "if," where he showed mathematically the relation that the triangle has two unequal angles and that the angle with the larger measure will be the largest side, and while doing this, he apparently paid attention to the notations about the angle and the side. In addition, it was observed that some of the PTs took into account each condition in the relation. For example, as seen in Figure 3-a, PT14 stated all three cases for the third relation. 11 PTs that showed the correct representation for the third relation showed mathematically for all three sides as in Figure 3-a, while the others showed only one side. For the fifth relation, only PT29 mathematically showed the area of the triangle for each side and the height of that side, as seen in Figure 5-a. It is seen that PTs who show partially correct representations generally do not pay attention to notation in their drawings, do not consider all the conditions when writing the relation mathematically, do not pay attention to symbols, such as angle, degree, side, area, and absolute value, and do not use the language of mathematics. For example, as shown in Figure 1-b, PT12 did not put the letter "m" in front of the angles to express their measure, did not put an angle sign over the angles, and did not put a degree sign over 180. On the other hand, PTs who made incorrect representations did not pay attention to the notation; they used incorrect notations and expressed the relations mathematically incorrectly. For example, in Figure 3-c, PT15 stated that one side was greater than the absolute value of the sum of the other two sides and the difference was less than the absolute value. This statement was mathematically incorrect. Here, it can be said that PT also has difficulties with the concept of absolute value.

Findings related to proof of relations: PTs were asked to prove the given relations to evaluate the common content knowledge of the relations given about triangles. The frequencies and percentages of the PTs regarding the proof of the relations are given in Table 5.

Table 5. *Frequencies and percentages for PTs' proofs of relations*

	Valid proof		Partially valid proof		Invalid proof		No proof	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1st Relation	17	38	12	26	3	7	13	29
2nd Relation	0	0	3	7	8	17	34	76
3rd Relation	0	0	3	7	7	16	35	77
4th Relation	5	11	13	29	4	9	23	51
5th Relation	7	16	16	36	2	4	20	44
Total	29	13	47	21	24	11	125	55

PTs were quite unsuccessful in proving the relations. In more than half of the relations (55%), the PTs did not even attempt to prove it. Again, in the proof of a substantial number of relations (21%), the PTs could not reach the desired result completely and they made incomplete explanations. In addition, there were also attempts to prove false information (11%) by PTs. In Table 5, especially in the second and third relations, it was seen that none of the PTs could provide valid proof, and three-quarters (76-77%) left this question blank.

PTs provided valid proof in the first relation (17) that the sum of the interior angles of the triangle is the most. Six of the PTs who made valid proofs used the properties of parallel lines and angles between these lines. While seven of the PTs who made a valid proof used the information that "an exterior angle of a triangle is equal to the sum of two non-adjacent interior angles," four of them visually showed that a right angle is formed when the interior angles of the triangle come together. Again, in the first relation from the table, it is seen that more than half of the PTs (64%) have either a valid proof or partially valid proof. Nine of the PTs who provided a partially valid proof visually showed the interior angles of the triangle by combining them but did not specify the concept of right angles. The number of the PTs (13) who left blank by failing to prove this relation is significantly lower than for the other relations.

As shown in Table 5, most of the PTs (34) were left blank without attempting to prove the second relation, which states that the major angle of the triangle is opposite the major side. In the second relation, none of the PTs could make valid proof, and quite a few PTs (3) made proofs partially valid.

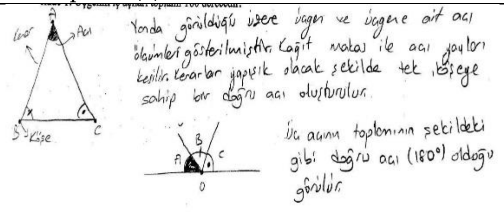
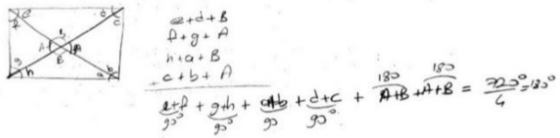
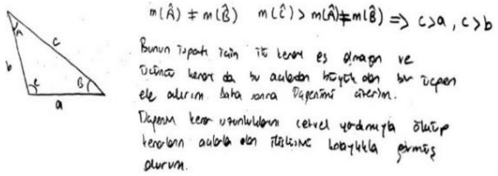
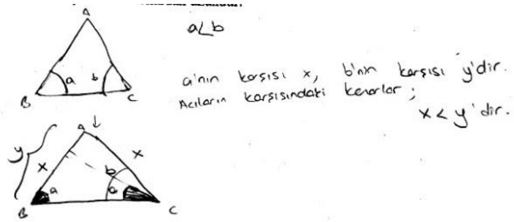
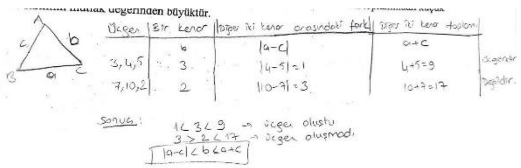
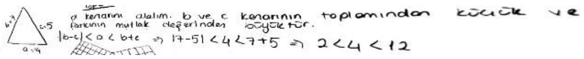
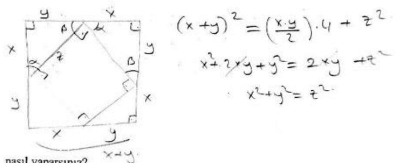
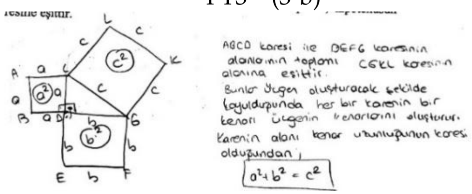
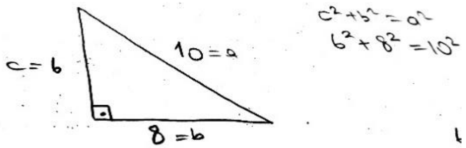
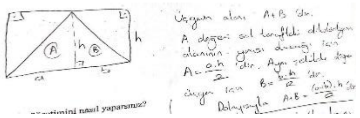
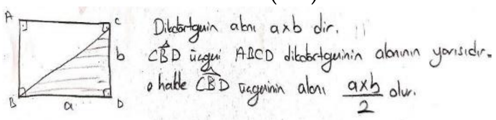
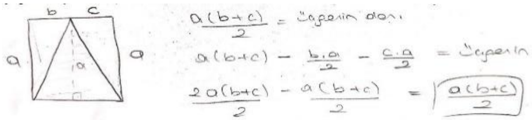
Two of the PTs who made a partially valid proof explained the correctness of the relation experimentally, and one related the side lengths of a familiar triangle, 30, 60, and 90, with angles. Again, from the table, it is seen that PTs (8) mostly make invalid proof in this relation among the given relations. Six of the PTs whose proofs were invalid explained the angle-side relationship completely intuitively. The two of them tried to make valid proofs, but made incorrect explanations.

When Table 5 is examined again, it is clear that most of the PTs (35) are left blank without attempting to prove, as in the second relation of the triangle inequality. In addition, none of the PTs proved valid in the third relation, and quite a few PTs (3) provided partially valid proof. Two of the PTs with partially valid proofs explained the correctness of the relation experimentally, and one showed the relationship between the side lengths of a familiar triangle (3-4-5). Again, it is seen in the table that there are also seven PTs whose proofs are invalid. Four of the PTs whose proofs were invalid confirmed the relationship for any number values whose triangles were not clear, and three of them made wrong algebraic explanations.

In the fourth relation related to the Pythagorean relation, nearly half of the PTs (23) left it blank without attempting to prove it. In the fourth relation in the table, it is seen that very few PTs (5) provide valid proof, and some of the PTs (13) provide partially valid proofs. While four of the PTs who provided valid proofs proved the Pythagorean relation with both visual and algebraic explanations, one used the Cosine theorem. On the other hand, PTs who provide partially valid proof still use visual explanations, but their explanations are insufficient. Again, it is seen in the table that there are also four PTs whose proofs are invalid. Two of the PTs, whose proofs were invalid, showed that a known right triangle (3-4-5 triangle) satisfied the relation by substituting the side lengths. One of the PTs whose proofs were invalid visually made incorrect proof, while the other made proof incorrectly algebraically.

In Table 5, it is seen that in the fifth relation of the triangle's area relation, as in the fourth relation, nearly half of the PTs (20) left it blank without attempting to prove it. In the fifth relation, very few PTs (7) made valid proof, while approximately one-third (16) of PTs made proved partially valid proof. Four of the PTs who made valid proof obtained the area relation of the triangle from the parallelogram visually, and the other three obtained it from the rectangle visually. Twelve of the PTs who made a partially valid proof obtained the area relation for a right triangle using the rectangle but did not show the correctness of the relation for any triangle. Four of the PTs who made a partially valid proof obtained the area relation for an isosceles right triangle using the square. There were also PTs (2) whose proofs were invalid for the fifth relation. PTs whose proofs were invalid used the area relation of the right triangle in their proofs. Some examples of the proofs of the PTs for each relation are given in Table 6.

Table 6. *Examples of PTs' Proofs related to Relation*

	Valid proof (a)	Partially valid proof (b)	Invalid proof (c)
1st Relation	 PT11 (1-a)		 PT23 (1-c)
2nd Relation		 PT6 (2-b)	 PT3 (2-c)
3rd Relation		 PT3 (3-b)	 PT27 (3-c)
4th Relation	 PT8 (4-a)	 PT1 (4-b)	 PT32 (4-c)
5th Relation	 PT38 (5-a)	 PT7 (5-b)	 PT18 (5-c)

The valid proof example of PT11 for the first relation is found in Figure 1-a in Table 6. PT11 showed by drawing a figure that a right angle is obtained by cutting and combining the angles of any triangle. PT11 showed that the sum of the interior angles of the triangle is 180 $^{\circ}$ using materials in an experimental way. In Figure 1-c in Table 6, there is an invalid proof example of PT23 for the first relation.

As shown in Figure 2-b in the table, PT6 stated that he could see the relationship by measuring the side lengths of a triangle that meets the conditions. PT6 gave a broad overview of the discovery of the relation with experimental methods but did not go into detail. As shown in Figure 2-c in Table 6, on the other hand, PT3 tried to reach the relationship between the side lengths of an isosceles triangle by forming equilateral angles; however, he formed the congruent angle incorrectly. Therefore, he could not reach the result, only wrote the result.

When Table 6 is examined again, in Figure 3-b, it was seen that PT3 transferred the sum and difference of two sides to the table for various side lengths and interpreted whether a triangle was formed or not. Although PT3 did not give a full explanation, he tried to establish a relationship between the sides. In Figure 3-c, PT27 took the lengths 4, 5, and 7, which he did not know to form a triangle, and substituted them in the triangle inequality relation. Here, he actually showed that these lengths satisfy the inequality.

Again in Figure 4-a in Table 6, it is seen that PT8 proved the Pythagorean relation by placing the square inside the square and using the area relations. In Figure 4-b in Table 6, there was a partially valid proof example of PT1 for the fourth relation. Although PT1 stated that the side lengths and the areas of the squares were related, he did not explain this relationship. PT32, who made an invalid proof for the Pythagorean relation in Figure 4-c in Table 6, showed that he provided the relation by giving a numerical value as an example.

For the fifth relation, which is the last relation, there was a valid proof example of PT38 in Figure 5-a in Table 6. PT38 put the triangle inside a rectangle whose long side was defined as a+b and short side as h and proved using the area relation of the rectangle. In Figure 5-b in Table 6, it is seen that PT7 used the area of the rectangle to reach the area relation of the right triangle but did not obtain the area relation for the area of any triangle. In Figure 5-c in Table 6, in the invalid proof example, it is seen that PT18 used the area relation of the right triangle to obtain the area relation of the triangle.

PTs' Pedagogical Content Knowledge (PCK) of Relations in Triangles

The findings for the second research question are presented under this title. The PTs' pedagogical content knowledge about triangles was evaluated within the scope of knowledge of content and teaching and knowledge of content and students. For this, the activities developed by the PTs about the relations in triangles and their knowledge of the difficulties students may experience during learning were examined.

Findings regarding knowledge of content and teaching:

Findings Related to Developed Activities: The PTs were asked to develop activities for relations to evaluate their knowledge of content and teaching about the relations given about triangles. The frequencies and percentages of the categories of activities developed by the PTs are given in Table 7.

Table 7. *Frequencies and percentages of the activities developed by PTs*

	Valid activity		Partially valid activity		Invalid activity		No activity	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1st Relation	25	56	12	26	8	18	0	0
2nd Relation	6	13	28	62	9	20	2	4
3rd Relation	19	42	18	40	6	13	2	4
4th Relation	1	2	34	76	6	13	4	9
5th Relation	1	2	36	80	8	18	0	0
Total	52	23	128	57	37	16	8	4

When Table 7 is examined, it is understood that the PTs were quite successful in the activities they suggested for the relations, unlike the situation in the proof of the relations. Approximately three-quarters (80%) of the activities suggested by PTs for relations were valid activities or partially valid activities. The rate of leaving this question blank was very low (4%).

In Table 7, it is seen that the relation that the PTs constituted the most valid activity (25) and that they also formed the least partially valid activity (12) was the first relation. The PTs that created valid activities generally suggested activities for students to discover that a right angle was formed by cutting or folding the interior angles of a triangle and bringing them together. Two PTs that created a valid activity suggested activities that would generalize over the table by measuring the interior angles of various triangles. Although the PTs, who created a partially valid activity, suggested activities for students to discover that the sum of the interior angles of the triangle creates a right angle, as, in the current activity, they either did not emphasize the right angle or did not make sufficient explanations during folding. There were PTs whose activities were invalid. Two of the PTs who created an invalid activities used the knowledge that "the sum of the exterior angles of a triangle is 360." However, in the curriculum, the sum of the exterior angles of the triangle is given after the sum of the interior angles of the triangle. One of the PTs that generated an invalid activity made use of the sum of the interior angles of the rectangle. Two of the PTs who created invalid activity made explanations unrelated to the relation. While two PTs that created an invalid activity expressed the relation verbally, one of them said, "First, angle concepts are adopted directly, then, we start to work with closed shapes as well.” as a general expression. Furthermore, the table shows that all PTs answered the first relation. Two examples of PTs' answers to the first relation are given below:

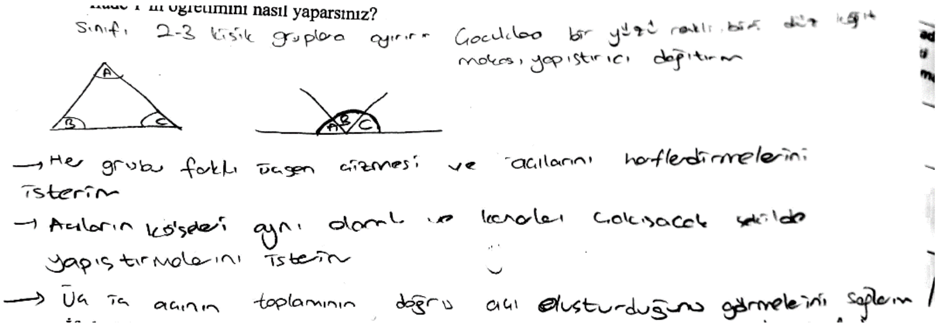


Figure 2. Example of a valid activity for the first relation (PT4)

In Figure 2, there is a valid activity example of PT4 for the first relation. Here, PT4 expects students working in groups of two or three to see that a right angle is formed by cutting the angles of the triangles and joining them in such a way that the sides overlap.

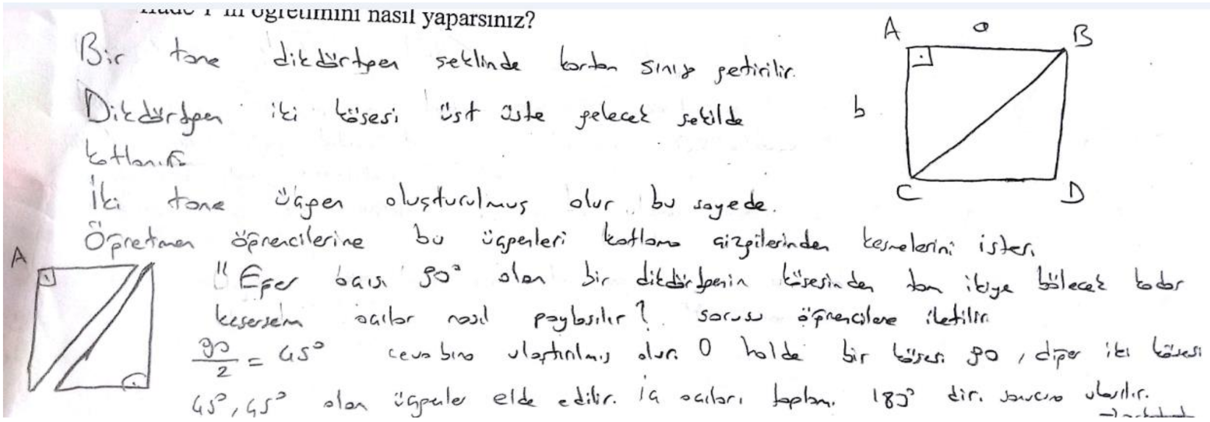


Figure 3. Example of an ınvalid activity for the first relation (PT39)

In Figure 3, there is an example of the invalid activity of PT39 for the first relation. Here, PT39 stated that when he divided a rectangle in half, he obtained two triangles, and the diagonal of the rectangle divided the angles into 45. It is understood that PT39 does not have a good grasp of the properties of the rectangle and even has a misconception.

When Table 7 is examined, it is seen that while more than half of the PTs (28) constituted a partially valid activity, only a few of them constituted valid activities in the second relation regarding the large side opposite the major angle of the triangle. The PTs who created the valid activity stated that by giving various triangles to the students or asking the students to create triangles with various materials, they would measure the side lengths and angles and note them on the table they created and explore the relationship between the angles and sides of each triangle from the table. Although 19 of the PTs who created a partially valid activity stated that they would count the students to discover a relationship by measuring the side lengths and angle measurements of the triangles, like the PTs who created the valid activity, they made measurements for a single triangle and did not plan to create a table. Therefore, it is not possible for students to notice the relationship in this way. Although nine of the PTs, which constituted a partially valid activity, developed an activity indicating that there was a large side opposite the large angle, they did not fully meet the relation. Again, it is seen from the table that the most invalid activity (20%) was the second relation. While four of the PTs whose activities were invalid used general expressions, five of them made explanations unrelated to the angle-side relationship of the triangle. Some examples of PTs' responses to the second relation are given below.

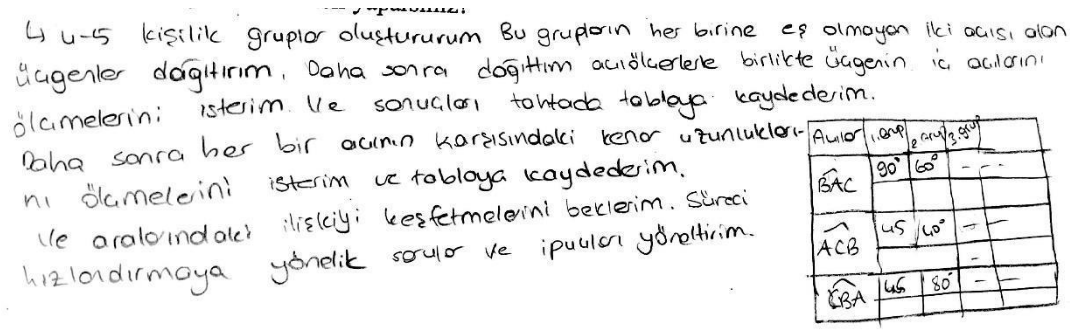


Figure 4. Example of a valid activity for the second relation (PT1)

In Figure 4, there is a valid activity example of PT1 for the second relation. PT1 had the students measure the angles and sides of various triangles by distributing them and recording them on the table, waiting for the student to see the relationship between the angles and sides.

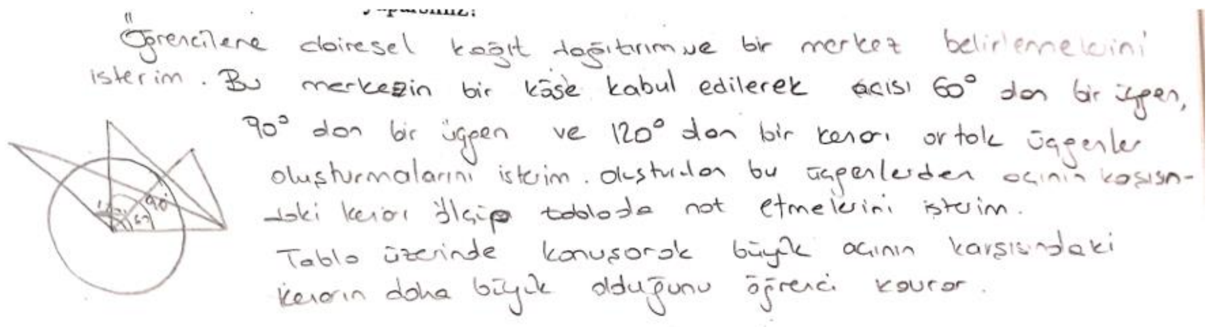


Figure 5. Example of a partially valid activity for the second relation (PT13)

Figure 5 shows an example of a partially valid activity of PT13 for the second relation. PT13 compared the side lengths opposite the 60, 90, and 120-degree angles. Thus, by making measurements, he aimed to discover that there is a large side opposite the large angle. However, PT13 could not carry this situation to a triangle and did not reach a comparison of the interior angles of a triangle and the opposite sides.

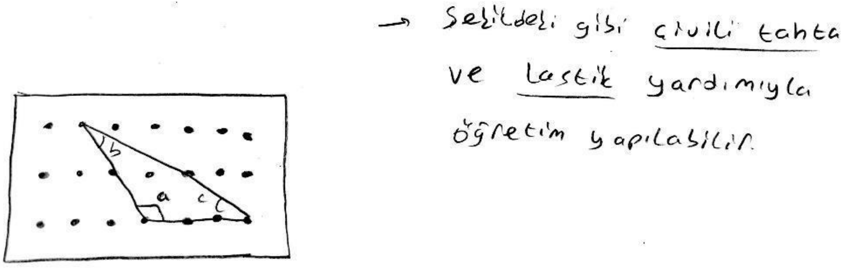
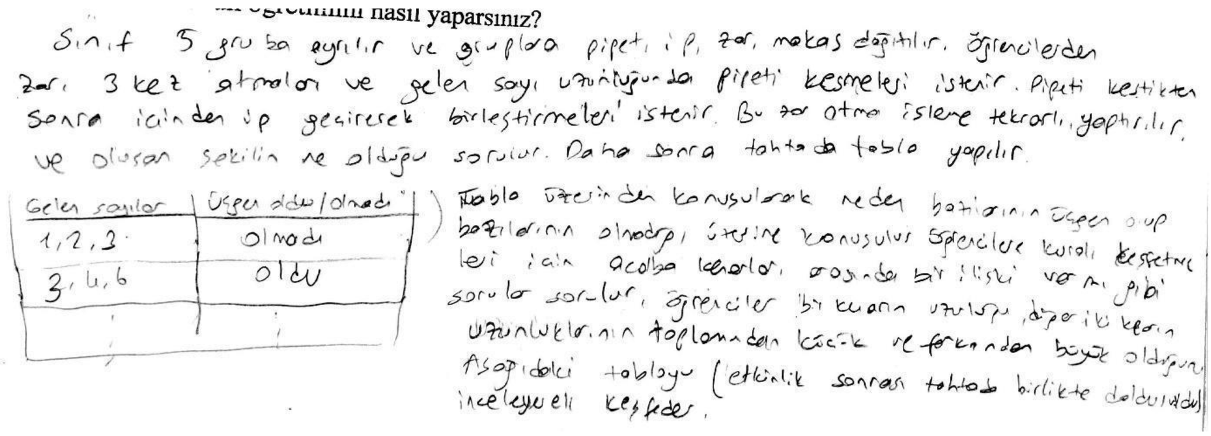


Figure 6. Example of ınvalid activity for the second relation (PT42)

Figure 6 shows that PT42 uses general expressions and does not develop a specific activity for the specified relation.

When Table 7 is examined, approximately 40% (19) of the PTs constituted valid activity in the third relation regarding the triangle inequality. Thus, it is understood that the third relation was the one with the most valid activity after the first relation. The PTs that created the valid activity suggested activities for them to examine the formation of triangles of various lengths and explore the relationship between triangle formation and side lengths. In the third relation from the table, as much as PTs constituted an almost valid activity, they constituted a partially valid activity (18). Although PTs that created partially valid activities had suggested activities to examine whether triangles occurred or not, like PTs that created valid activities, they could not correctly plan for them to explore the relationship between triangle formation and side lengths. They dealt with a single triangle example and did not create a table or question the relationship, so that generalization could not be reached. There were also six PTs whose activities were invalid. The PTs whose activities were invalid expressed the triangle inequality to the students themselves, planned an activity for its application, or used general expressions. Some examples of PTs' answers to the third relation are given below.


... öğretimini nasıl yaparsınız?

Sınıf 5 gruba ayrılır ve gruplara pipet, ip, zar, makas dağıtılır. Öğrencilerden zarı 3 kez atmaları ve gelen sayı uzunluğunda pipeti kesmeleri istenir. Pipeti kestikten sonra içinden ip geçirerek birleştirmeleri istenir. Bu zar atma işlemi tekrarlı yaptırılır ve oluşan şeklin ne olduğu sorulur. Daha sonra tahtada tablo yapılır.

Gelen sayılar	Üçgen oldu/olmadı
1, 2, 3	olmadı
3, 4, 6	oldu

Tablo üzerinden konuşularak neden bazılarının üçgen olup bazılarının olmadığı üzerine konuşulur. Öğrencilere kuralı keşfetmeleri için acaba kenarlar arasında bir ilişki var mı gibi sorular sorulur. Öğrenciler bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunluklarının toplamından küçük ve farkından büyük olduğunu aşağıdaki tabloyu (etkinlik sonrası tahtada birlikte doldurulduğu) inceleyerek keşfeder.

Figure 7. Example of a valid activity for the third relation (PT12)

As shown in Figure 7, there was a valid activity example of PT12 for the third relation. PT12 suggested using dice to get random numbers while forming triangles. He thought of using straws and threads to see if a triangle was formed. He planned to make a table to examine the states of the triangle formation.

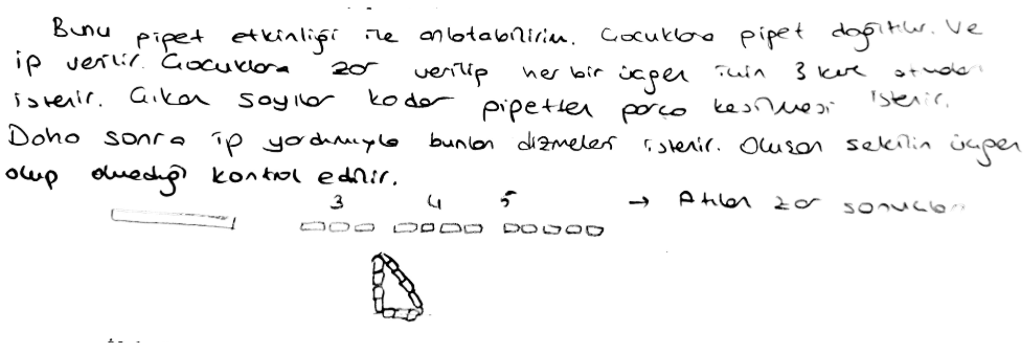

Bunu pipet etkinliği ile anlatabilirim. Çocuklara pipet dağıtılır. Ve ip verilir. Çocuklara zar verilip her bir üçgen için 3 kere atmaları istenir. Çıkan sayılar kadar pipetler parça kesilmesi istenir. Daha sonra ip yardımıyla bunları dizmeleri istenir. Oluşan şeklin üçgen olup olmadığı kontrol edilir.

Figure 8. Example of a partially valid activity for the third relation (PT33)

In Figure 8, there is an example of a partially valid activity of PT33 for the third relation. PT33 only dealt with whether a triangle was formed or not. He also gave only one example and did not suggest a table.

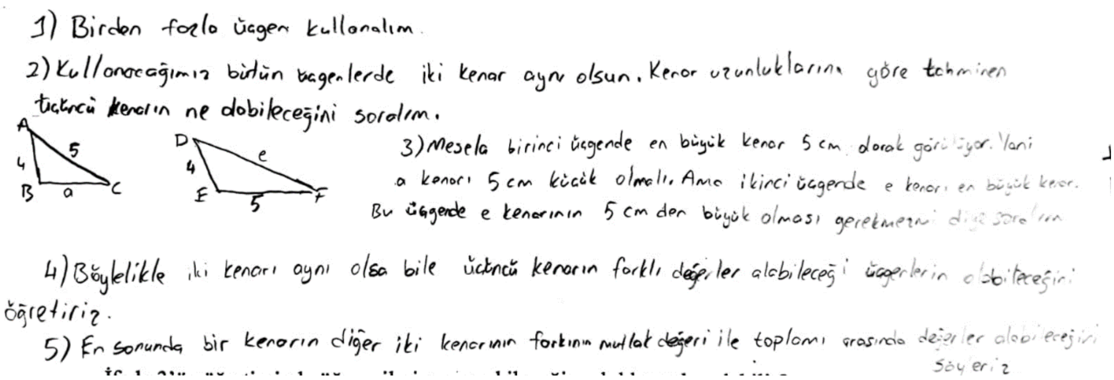
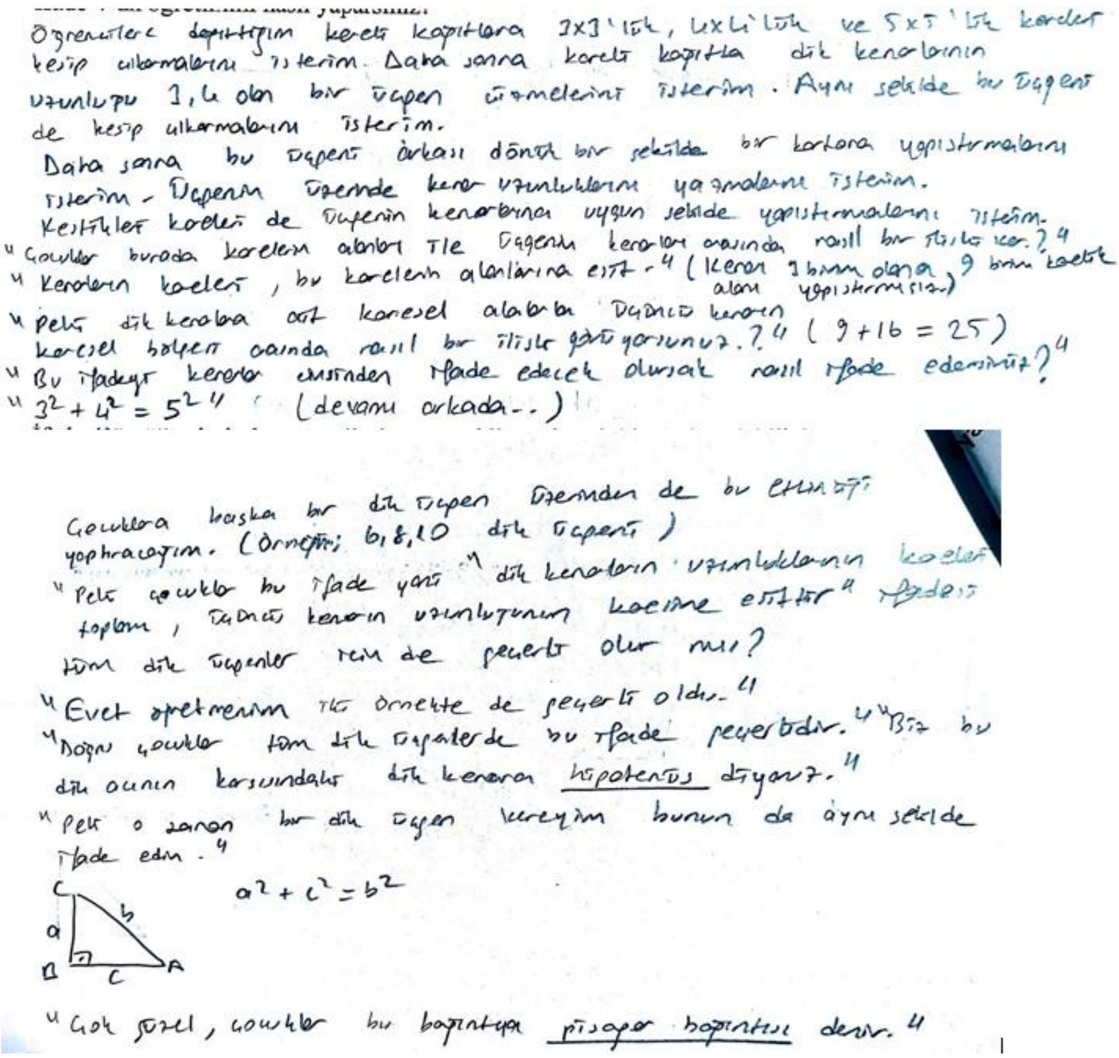

1) Birden fazla üçgen kullanalım.
2) Kullanacağımız bütün üçgenlerde iki kenar aynı olsun. Kenar uzunluklarına göre tahmin en üçüncü kenarın ne olabileceğini soralım.
3) Mesela birinci üçgende en büyük kenar 5 cm olarak görülüyor. Yani a kenarı 5 cm küçük olmalı. Ama ikinci üçgende e kenarı en büyük kenar. Bu üçgende e kenarının 5 cm den büyük olması gerektiğini diye soralım
4) Böylelikle iki kenarı aynı olsa bile üçüncü kenarın farklı değerler alabileceği üçgenlerin olabileceğini öğretiriz.
5) En sonunda bir kenarın diğer iki kenarının farkının mutlak değeri ile toplamı arasında değerler alabileceğini söyleriz

Figure 9. Example of an ınvalid activity for the third relation (PT28)

In Figure 9, there is an example of an invalid activity for PT28 for the third relation. PT28 here aims to discover that the third side of triangles with the same two sides can take different values. While doing this, he thought the angle remained constant and emphasized the longest side. In addition, it is difficult for students to understand this activity of PT28. It is even an activity that may lead to student misconceptions.

In Table 7, it is seen that the fourth relation related to the Pythagorean relation was one of the relations in which PTs formed the least valid activity (1), and at the same time, one of the relations that constitute the most partially valid activity (34). The PTs, who created the current activity, created an activity to discover the relation by establishing a relationship between the sides of the right triangle and the areas of the squares built on the sides. Although the PTs, which created a partially valid activity, also showed activity for the squares built on the sides of the right triangle, as in the current activity, they could not fully explain the relationship between the sides of the triangle and the area of the square or the areas of the square and generalize with a single sample. While five of the PTs who created an invalid activity stated that they would measure the sides of the right triangle with a ruler and expect the students to establish a relationship, one of the PTs stated that they would directly tell the students the relation. Some examples of PTs' responses to the fourth relation are given below.



Öğrencilere dağıttığım kareli kağıtlara 3x3'lük, 4x4'lük ve 5x5'lik kareler kesip çıkarmalarını isterim. Daha sonra kareli kağıtla dik kenarlarının uzunluğu 3, 4 olan bir üçgen çizmelerini isterim. Aynı şekilde bu üçgeni de kesip çıkarmalarını isterim.
Daha sonra bu üçgeni arkası dönük bir şekilde bir kartona yapıştırmalarını isterim. Üçgenin üzerinde kenar uzunluklarını yazmalarını isterim.
Kestikleri kareleri de üçgenin kenarlarına uygun şekilde yapıştırmalarını isterim.
"Çocuklar burada karelerin alanları ile üçgenin kenarları arasında nasıl bir ilişki var?"
"Kenarların kareleri, bu karelerin alanlarına eşit." (Kenarı 3 birim olana 9 birim karelik alanı yapıştırmışlar)
"Peki dik kenarlara ait karesel alanlar ile üçüncü kenarın karesel bölgesi arasında nasıl bir ilişki görüyorsunuz?" (9+16 = 25)
"Bu ifadeyi kenarlar cinsinden ifade edecek olursak nasıl ifade ederiz?"
"$3^2 + 4^2 = 5^2$" (devamı arkada...)

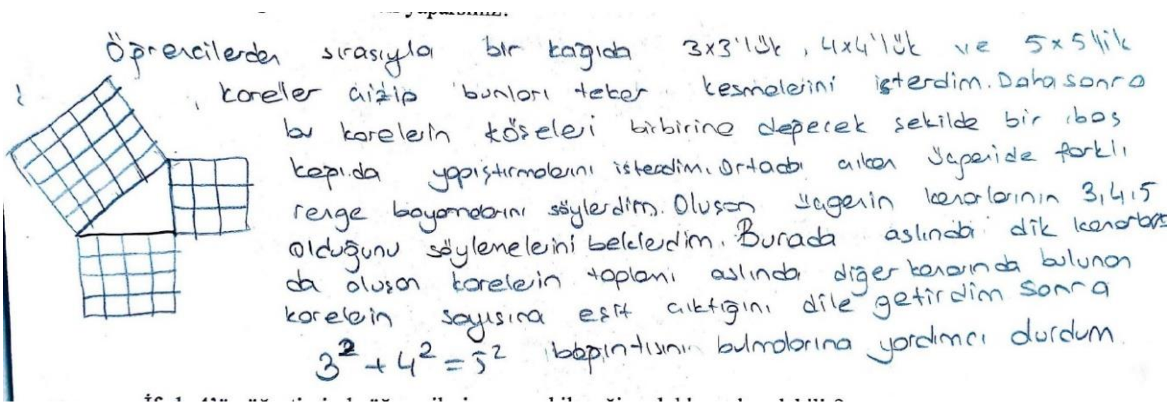
Çocuklara başka bir dik üçgen üzerinden de bu etkinliği yaptıracağım. (Örneğin; 6, 8, 10 dik üçgeni)
"Peki çocuklar bu ifade yani "dik kenarların uzunlukların kareleri toplamı, üçüncü kenarın uzunluğunun karesine eşittir" ifadesi tüm dik üçgenler için de geçerli olur mu?"
"Evet öğretmenim iki örnekte de geçerli oldu."
"Doğru çocuklar tüm dik üçgenlerde bu ifade geçerlidir." "Biz bu dik açının karşısındaki dik kenara hipotenüs diyoruz."
"Peki o zaman bir dik üçgen çizeyim bunun da aynı şekilde ifade edin."

$a^2 + c^2 = b^2$

"Çok güzel, çocuklar bu bağıntıya pisagor bağıntısı denir."

Figure 10. Example of a valid activity for the fourth relation (PT6)

In Figure 10, there is a valid activity example of PT6 for the Pythagorean relation. In the activity he planned, PT6 had the students first construct a square on the sides of the right triangle 3,4,5, and had them establish a relationship between the side lengths of the right triangle and the areas of the squares. Then, he questioned the relationship between the areas of the squares. Thus, the Pythagorean relation for the right triangle (3-4-5) and then was discovered by the students. He suggested that they reach generalization by diversifying the examples to show that it would be valid for other right triangles as well.



Öğrencilerden sırasıyla bir kağıda 3x3'lük, 4x4'lük ve 5x5'lik kareler çizip bunları tekrar kesmelerini isterdim. Daha sonra bu karelerin köşeleri birbirine değecek şekilde bir boş kağıda yapıştırmalarını isterdim. Ortada oluşan üçgeni de farklı renge boyamalarını söylerdim. Oluşan üçgenin kenarlarının 3, 4, 5 olduğunu söylemelerini beklerdim. Burada aslında dik kenarlarda oluşan karelerin toplamı aslında diğer kenarında bulunan karelerin sayısına eşit çıktığını dile getirdim sonra $3^2 + 4^2 = 5^2$ bağıntısını bulmalarına yardımcı olurdum

Figure 11. Example of a partially valid activity for the fourth relation (PT18)

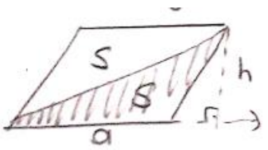
In Figure 11, there is an example of a partially valid activity of PT18 for the fourth relation. PT18 tried to verify the Pythagorean theorem by having students construct 3,4,5 right triangles with squares on the sides. However, he did not establish a relationship between the sides of the triangles and the areas of the squares. He did not reproduce the examples to generalize to other right triangles.

Gruplara ayırır öğrencilere üçgen oluşturacak parçalar dağıtırım. Örneğin 4cm ve 5cm'lik şeritler. Bunları dik birleştirmelerini isterim. Diğer kenara uzunluğunu bilmediğimiz şerit keserler ve birleştirirler. Şeritlerin uzunluklarını değiştirip çeşitli üçgenler oluştururlar.
Bu dik üçgenlerin kenarları arasında bir kural var mı? Uzunluğunu bilmediğimiz kenarın uzunluğunu cetvelle ölçmeden bulabilir miyiz? Hadi 4 ve 5'in karelerini alalım. Toplayalım. Cetvelle ölçüp teyit edelim.

Figure 12. Example of an ınvalid activity for the fourth relation (PT22)

Figure 12 shows an invalid event example of PT22 for the Pythagorean relation. PT22 considers a triangle with right sides of 4 cm and 5 cm. He did not give any information about the third side. He asked the students if there was a relationship between the sides of this right triangle and told them to measure the length of the third side with a ruler. It is not possible for students to reach the Pythagorean relation with these directions.

It is seen in Table 7 that the fifth relation, the area relation of the triangle, was one of the relations in which the PTs formed the least valid activity (1); at the same time, they formed the most partially valid activity (36). The PT, who created a valid activity, expressed an activity to discover the area of the triangle from the area of the parallelogram. Most of the PTs (25), which constituted a partially valid activity, created an activity for the area relation of the right triangle with the area of the rectangle. Five of the PTs, which constituted a partially valid activity, created an activity for reaching the area relation by giving the area and heights of the triangles and establishing a relationship. In addition, it is understood from the table that the area relation is one of the relations with the highest number of invalid events (8). Four PTs who created invalid activities used general expressions, such as "I use the area of the rectangle." While two of the PTs developed activities to obtain the area of the triangle by assuming that they knew the area of the right triangle, the other two created an activity to reach the area by counting the unit squares in the triangle drawn on squared paper. Examples of PTs' answers to the fifth relation are given below.



Paralelkenarın alanı görüldüğü üzere a.h'dır. = 2S
Üçgenin alanı ise paralelkenar alanın yarısı olduğu şekilde gözüküyor. Yani öğrenciler bu sorunun cevabına $\frac{a.h}{2}$ diyecektir.

Figure 13. Example of a valid activity for the fifth relation (PT21)

In Figure 13, there is a valid activity example of PT21 for the area relation of the triangle. PT21 showed that when we divide the parallelogram in two from its diagonal, two triangles with the same base and height will be formed. It was planned that the students reach the area relation of the triangle from the area relation of the parallelogram.

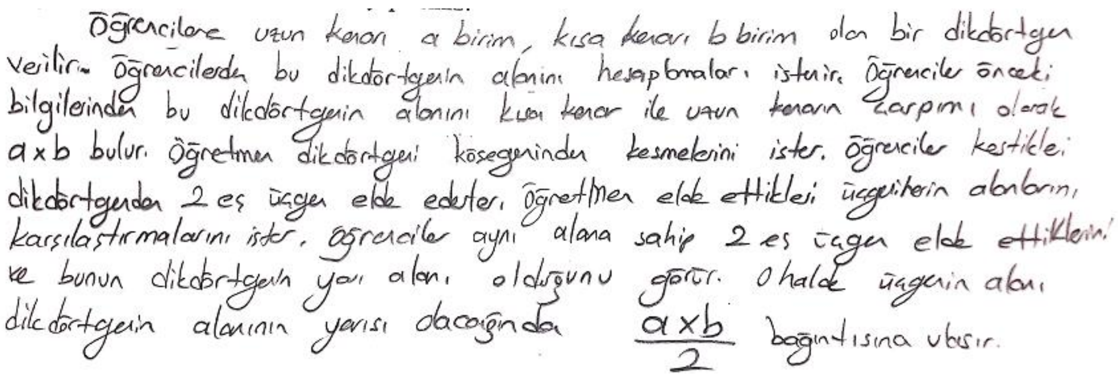
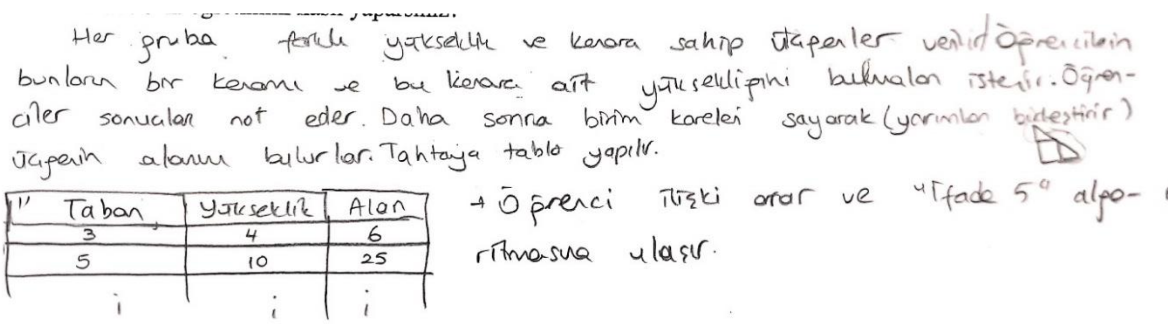

Öğrencilere uzun kenarı a birim, kısa kenarı b birim olan bir dikdörtgen verilir. Öğrencilerden bu dikdörtgenin alanını hesaplamaları istenir. Öğrenciler önceki bilgilerinden bu dikdörtgenin alanını kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı olarak a x b bulur. Öğretmen dikdörtgeni köşegeninden kesmelerini ister. Öğrenciler kestikleri dikdörtgenden 2 eş üçgen elde ederler. Öğretmen elde ettikleri üçgenlerin alanlarını karşılaştırmalarını ister. Öğrenciler aynı alana sahip 2 eş üçgen elde ettiklerini ve bunun dikdörtgenin yarı alanı olduğunu görür. O halde üçgenin alanı dikdörtgenin alanının yarısı olacağından $\frac{a \times b}{2}$ bağıntısına ulaşır.

Figure 14. Example of a partially valid activity for the fifth relation (PT7)

In Figure 14, there is a partially valid activity example of PT7 for the area relation of the triangle. PT7 used the area relation of the rectangle here. In the activity he created, he did not state that the triangles formed when he separated the rectangle from its diagonal were right triangles, and that the area relation he found was valid for right triangles. He did not question whether it was valid for all triangles.


Her gruba farklı yükseklik ve kenara sahip üçgenler verilir. Öğrencilerin bunların bir kenarını ve bu kenara ait yüksekliğini bulmaları istenir. Öğrenciler sonuçları not eder. Daha sonra birim kareleri sayarak (yarımları birleştirir) üçgenin alanını bulurlar. Tahtaya tablo yapılır.

Taban	Yükseklik	Alan
3	4	6
5	10	25
⋮	⋮	⋮

+ Öğrenci ilişki arar ve "İfade 5" algoritmasına ulaşır.

Figure 15. Example of an ınvalid activity for the fifth relation (PT14)

In Figure 15, there is an example of invalid activity belonging to PT14 for the area relation of the triangle. PT14 here aimed to find the area of the triangles given by the students on the squared paper by counting the unit squares and establishing a relationship between the base, height, and area in the table. However, his approach to counting unit squares for the area of triangles was flawed. On the squared paper, it is not possible to complete the unit squares in this way since unit squares will not always be divided in the middle, contrary to what PT14 stated in the triangle formed.

Findings regarding knowledge of content and students:

Findings Related to Difficulties Students may Experience in Learning Relations: the PTs were asked to explain the difficulties that middle school students would experience in learning relations to evaluate their knowledge of content and students. As a result of the data analysis, the frequencies and percentages of the common difficulties stated by the PTs for the relations are given in Table 8.

Table 8. *Frequencies and percentages regarding difficulties ındicated by PTs for relations*

Difficulties	1st Relation		2nd Relation		3rd Relation		4th Relation		5th Relation		Total
	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n
Difficulties with Motor Skills	27	60	18	40	8	18	1	2	0	0	54
Difficulty Building Relationship-Exploring Relations	2	4	7	16	21	47	14	31	5	11	49
Difficulty Based on Lack of Knowledge	8	18	6	13	6	13	11	24	12	27	43
Difficulty Generalizing to All Triangles	10	22	6	13	3	7	4	9	0	0	23
Difficulty Understanding Direction	4	9	2	4	1	2	3	7	1	2	11
Difficulty Visualizing	2	4	1	2	0	0	0	0	0	0	3

As can be seen from Table 8, the frequencies of the difficulties stated by the PTs varieed from relation to relation. For example, while for the first relation, the PT indicating difficulties with motor skills was quite high (60%), only one PT was indicated for the fourth relation. For the fifth relation, none of the PTs addressed this difficulty. The reason for this may be due to the activities they mentioned in their teaching according to the relation. However, the most mentioned difficulty was motor skill difficulties. PTs stated that they might have difficulties with their motor skills when cutting angles with scissors, combining angles by bringing them together, measuring angles with a protractor, using a compass and ruler, threading rope, and tying rope. The second difficulty most frequently stated by the PTs was the difficulty in establishing relationships and discovering the connection. In addition to the PTs stating that they may have difficulty establishing and discovering a relationship with general expressions, there are also PTs expressing the given relationship. For example, in PT31, for the third relation, "they may have difficulty in discovering the correlation." While PT30 stated the difficulty with the fourth relation as "he cannot grasp the situation where the square of the lengths of the sides is equal to the side of the hypotenuse and cannot reach the square expression." expressed in the form. Another difficulty most frequently mentioned by PTs was difficulties based on a lack of knowledge. As a difficulty based on lack of knowledge, there were PTs that used general statements. For example, they might experience difficulties due to their lack of prior knowledge, as well as PTs that indicated a specific topic specific to the relation. The PTs indicated that there was a straight angle, the sum of the interior angles of the polygon, the corresponding and opposite angles for the first relation; the concept of angle, types of angles, and types of triangles for the second relation; the absolute value and the concept of inequality for the third relation; and the radicals for the fourth relation. For the fifth relation, they stated that they had difficulty because they did not know the area of the rectangle, the area of the right triangle, the concept of height, and the concept of the diagonal. In addition to these difficulties, some PTs stated that generalizing the relationships to all triangles would be difficult. For example, the statement of PT40, who stated that they might think that the sum of the interior angles of the triangles for the first relation would be different for triangles of different sizes and that they would have difficulty generalizing the relation to all triangles, is as follows.

> "Some students will have cut large triangles, while others will have cut small triangles. A person who cuts a small triangle thinks that his friend, who cuts a large triangle, can find the sum of the interior angles larger. They realize this is not the case as a result of the activity."

In the teaching part, PT40 suggested the activity where they would add the angles on the inside of the triangle to make a right angle.

Apart from the difficulties mentioned in Table 8, the PTs also indicated other difficulties specific to these relations for the first relation and the fifth relation. These difficulties are; for the first relation, "difficulty in seeing that a right angle is formed (n=8; 18%)" for the fifth relation, "difficulty in forming a triangle from a rectangle, square or parallelogram (n=10; 22%)," "difficulty in seeing that the two formed triangles are congruent (n=7; 16%," "difficulty in seeing that the height of the triangle is equal to the side of the rectangle (n=3; 7%)," "difficulty in finding the height of the base (n=5; 11%)."

As a result, the PTs, whose mathematical representations and proofs regarding triangle relations in the middle school curriculum for CCK within the scope of SMK were examined, haddeficiencies and even mistakes. Although the mathematical representations of the PTs varied from relation to relation, there were 60% and 80% correct representations for the "triangle inequality" and the "Pythagorean relation." It was observed that the correct representation was relatively low, especially for the second relation for the angle-side relation and the area relation, which is the fifth relation. On the other hand, it was determined that the proof of the relations could not be performed by the PTs, and there were many cases (66%) that were left blank and considered invalid proof. Especially in the second relation for the angle-side relationship in the triangle and the third relation for the triangle inequality, it was seen that almost all of the PT (93%) were either left blank or their proofs were invalid. It was determined that the valid and partially valid activities (80%) of the PTs whose activities for the relations of triangles were examined within the scope of knowledge of content and teaching within the PCK were considerably higher than the invalid activities (16%). Especially in the first relation for the sum of the interior angles of the triangle and the third relation for the triangle inequality, the efficacy of almost half of the PTs (56%-42%) was found to be valid. On the other hand, it was discovered that while the PTs discussed the general difficulties that middle school students would face when learning triangle relations, they did not discuss the relation-specific difficulties.

Conclusions and Discussion

This study aims to uncover the existing SMK and PCK of the PTs related to triangle relations. For this, questions were asked that could reveal the knowledge of PTs about the relations related to triangles in the middle school curriculum. The total correct mathematical representations (43%) of PTs for the relations were less than half of all representations. The findings showed that the total valid proofs (13%) and total partially valid proofs (21% of the PTs) for the relations were also quite low., This finding suggests that the common content knowledge of the PTs is not sufficient within the scope of the subject matter knowledge. On the other hand, 80% of all activities developed by PTs for teaching relations were valid activities or partially valid activities. This suggests that the teaching knowledge of PTs within the scope of pedagogical content knowledge is quite sufficient. However, it was determined that the subject-specific knowledge of the PTs was not sufficient to define the possible difficulties of the students in the learning of relations. This points to the inadequacy of PTs' knowledge of the content and students' knowledge within the scope of pedagogical content knowledge.

One of the components of CCK is the correct use of mathematical language (Ball et al., 2008). For this, the notations, symbols, and drawings used by the PTs while expressing the relations were evaluated. According to the findings, the correct representations are less than half since most of the PTs do not pay attention to symbols, such as angle, degree, side, area, and absolute value and do not take into account all the conditions related to the relation. This situation, consistent with the results reached by Ubah (2021), shows that most PTs cannot use their own language of mathematics correctly. There are also those who do not show the sum of interior angles and the angle-side relationship. It is worth noting that, despite knowing about these relationships since middle school, PTs left the representation of these relationships blank. Most of the PTs represented the triangle inequality correctly. This may be because they used the inequality triangle in their undergraduate courses. The relation in which all the representations are correct or partially correct is the area relation. However, because the majority did not specify the base and its height, they were only able to show it partially correct. Given that teacher knowledge constitutes student knowledge (Blömeke and Delaney, 2012; Even and Tirosh, 1995; Hill, Rowan and Ball, 2005), this point in the triangle area that PTs do not pay attention to (Alatorre and Saiz, 2009; Altıntaş and İlgün, 2017; Cunningham and Roberts, 2010; Gutiérrez and Jaime, 1999) can be thought to cause incomplete information and even misconceptions for students.

CCK also requires knowing the rules, definitions, and theorems related to the subject (Ball et al., 2008). However, the findings of this study showed that the PTs were quite unsuccessful in proving relations related to triangles. It was observed that none of the PTs could provide valid proof, especially in the angle-side relationship and triangle inequality relations. Even the vast majority did not prove anything at all. In this category, PTs who made the proof of the area relation valid or partially valid generally obtained the relation using a parallelogram, rectangle, or square. Yew, Zamri, and Lian (2010) also concluded that those who could not explain the triangle's area relation in this way did not learn the formula in a meaningful way. However, in most of the proofs in the present study, the area relation for a right triangle has been reached. However, the accuracy of the relation for any triangle has not been generalized. Therefore, most proofs are considered partially valid. As a result, it can be said that PTs have difficulties proving generally valid relations related to triangles. They cannot provide sufficient explanations in their attempts to prove, and they cannot present their justifications. Güner and Topan (2016) also concluded that pre-service teachers' proof skills of theorems in triangle teaching are weak. It has also been determined that they usually validate certain sample values as proof. Teachers and pre-service teachers can interpret the concept of proving as verifying certain examples and making calculations (Martin and Harel, 1989; Morris, 2002; Simon and Blume, 1996; Weber, 2001). As a result of his research, Uygun (2016) stated that constructing geometric shapes within the framework of argumentation made it easier for pre-service teachers to prove, and she even reached the conclusion that their knowledge of triangle subjects improved.

It has been understood that the PTs are quite successful in the activities they propose for the relations, in contrast to the situation in the proof of the relations. Most of the activities they suggest for relations are valid or need to be developed. Also, the dropout rate is very low. The point that draws attention here is that PTs generally plan to explore the angle-side relationship and the triangle inequality relationship through an example. This situation may prevent students from understanding that these relations are always valid and may create misconceptions. Most of the activities developed for teaching the Pythagorean relation are only partially valid. Because although the squares built on the sides of the right triangle are shown, the relationship between the sides of the triangle and the areas of the square has not been fully explained, and a generalization has been made with a single example. Huang and Leung (2002) also stated in their teaching analysis that Chechen and Hong Kong teachers tended to verify the theorem visually. Similarly, Zazkis and Zazkis (2016) stated that pre-service teachers tend to use visual and numerical representations for teaching the Pythagorean theorem. For the conceptual teaching of this theorem, Moutsios-Rentzos et al. (2014) emphasized that the process of experiential thinking with the origins of a right-angled triangle and then abstracting it into an algebraic statement proven in the axiomatic system supports student understandings. The teacher in Yang's (2009) study also revised and improved his lesson on justifying propositions and producing propositions to support students' understanding of the Pythagorean theorem. The relation that creates the most partially valid activity is the area relation of the triangle. Because most PTs made use of the area of the rectangle only for the area relation of the right triangle and did not generalize it to any triangle, it was partially valid.

In terms of KCS, the PTs mentioned possible difficulties students may experience. However, they mostly mentioned the general difficulties that can be experienced in the learning of each relation, such as difficulties in motor skills, a lack of knowledge, difficulty seeing the relationship, and difficulty understanding the instruction. However, adequate KCS requires mastery of subject-specific difficulties and misconceptions (Ball et al., 2008). Yurtyapan and Karataş (2020) also stated in their study that teachers correctly identified students' misconceptions about triangles and were able to explain the reason. In Bilik's (2016) study, pre-service teachers were able to state that students had problems determining the base and the height of this base while finding the area. In this study, there were PTs who indicated this difficulty. As a matter of fact, in the studies conducted with students, misconceptions specific to relations about triangles were identified. Apart from these difficulties, in the literature, while finding the area of triangles, students did not divide the product of the base and the height of this base into two (Orhan, 2013); to find the area of the triangle, it was seen that the students multiplied the lengths of three sides, calculated the perimeter, and multiplied the hypotenuse with a right side for the area of the right triangle (Gökdal, 2004). However, the PTs in this study did not address these difficulties.

In general, it has been seen that the subject matter knowledge of PTs is not sufficient in terms of using mathematical language and making proofs. In terms of pedagogical content knowledge, it can be said that PTs cannot adequately plan the teaching process. Their students' knowledge of thinking is also insufficient. Therefore, in addition to improving the knowledge of pre-service teachers, it should also aim to improve their teaching practices in the practice courses. Real or simulated solutions from students can be used to analyze students' understandings and concepts in the field method courses. In further research, it is planned to obtain more detailed findings by interviewing pre-service teachers and examining the pedagogical content knowledge of pre-service teachers taking practical courses in the last year of teacher education.

References

Alatorre, S., & Saiz, M. (2009). Teachers and triangles. In R. Sutherland (Ed.). *Proceedings of Congress of Educational Research in Mathematics Education* (pp. 1890-1900). Lyon; France.

Altıntaş, E., & İlgün, Ş. (2017). Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometride "yükseklik" ve "diklik merkezi" kavramına ilişkin kavram yanılgıları. *Turkish Studies (Elektronik)*, *12*(29), 73–86. http://dx.doi.org/10.7827/TurkishStudies.12532

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 145–172. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000021943.35739.1c

Aslan-Tutak, F., & Adams, T. L. (2015). A study of geometry content knowledge of elementary pre-service teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *7*(3), 301–318.

Aslan-Tutak, F. & Köklü, O. (2016). Öğretmek için matematik bilgisi. In E. Bingölbali, A. Arslan, & İ. Ö. Zembat (Eds.). *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 701–719). Ankara: Pegem Akademi.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241–247. https://doi.org/10.1177/0022487100051003013

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bilik, A. (2016). *Pre-service middle school mathematics teachers' pedagogical content knowledge regarding the area of triangles* (Unpublished master thesis). Middle East Technical University, Turkey.

Blömeke, S., Delaney, S. (2014). Assessment of Teacher Knowledge Across Countries: A Review of the State of Research. In: Blömeke, S., Hsieh, FJ., Kaiser, G., Schmidt, W. (eds) *International Perspectives on Teacher Knowledge, Beliefs and Opportunities to Learn. Advances in Mathematics Education.* Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6437-8_25

Cochran, K. F., DeRuiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education, 44*, 263–272. https://doi.org/10.1177/0022487193044004004

Couta, A., & Vale, I. (2014). Pre-service teachers knowledge on elementary geometry concepts. In J. Portela, I. Vale, F. Huckaby & G. Bieger (Eds.). *The Proceedings of the 23th Annual Conference of the European Teacher Education Network* (pp. 37–51). Hasselt, Belgium.

Cunningham, R. F., & Roberts, A. (2010). Reducing the mismatch of geometry concept definitions and concept images held by pre-service teachers. *IUMPST: The Journal, 1*, 1–17.

Even, R. & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 1–20. https://doi.org/10.1007/BF01273897

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York: Macmillan.

Fidan, Y. & Türnüklü, E. (2010). İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 27*(27), 185–197.

Gall, D. M., Gall, P.J. & Borg, W.R. (2007). *Educational research an ıntroduction*. Boston, MA; Pearson.

Gökdal, N. (2004). *Ilköğretim 8. sınıf ve ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin alan ve hacim konularındakı kavram yanılgıları.* Unpublished master thesis, Gazi University.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(3), 253–275. https://doi.org/10.1023/A:1009900719800

Güner, P. & Topan, B. (2016). Prospective elementary mathematics teachers' abilities of using geometric proofs in teaching of triangle. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED), 10*(2), 210–242. doi: 10.17522/balikesirnef.277730

Hızarcı, S., Ada, Ş. & Elmas, S. (2006). Geometride temel kavramların öğretilmesi ve öğrenilmesindeki hatalar. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 13*, 337–342.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Huang, R., & Leung, F. K. (2002). How Pythagoras' theorem is taught in Czech Republic, Hong Kong and Shanghai: A case study. *ZDM, 34*(6), 268–277. https://doi.org/10.1007/BF02655725

Jin, H., & Wong, K. Y. (2021). Complementary measures of conceptual understanding: a case about triangle concepts. *Mathematics Education Research Journal*, 1–22. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00381-y

Johnson, H. L., Blume, G. W., Shimizu, J. K., Graysay, D., & Konnova, S. (2014). A teacher's conception of definition and use of examples when doing and teaching mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(4), 285–311. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.953018

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in geometry. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics, 20*(3), 109–114.

Luneta, K. (2015). Understanding students' misconceptions: an analysis of final Grade 12 examination questions in geometry: original research. *Pythagoras, 36(1),* 1–11.

Martin, W. G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 41–51. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.20.1.0041

Milli Eğitim Bakanlığı (2018). *Matematik dersi öğretim programı* (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar). Erişim adresi: https://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201813017165445-MATEMAT%C4%B0K%20%C3%96%C4%9ERET%C4%B0M%20PROGRAMI%202018v.pdf 30.08.2020.

Moutsios-Rentzos, A., Spyrou, P., & Peteinara, A. (2014). The objectification of the right-angled triangle in the teaching of the Pythagorean Theorem: an empirical investigation. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 29–51. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9498-y

NCTM, (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Orhan, N. (2013). *An investigation of private middle school students' common errors in the domain of area and perimeter and the relationship between their geometry self-efficacy beliefs and basic procedural and conceptual knowledge of area and perimeter.* (Unpublished master thesis). Middle East Technical University, Turkey.

Patkin, D., & Levenberg, I. (2012). Geometry from the world around us. *Learning and Teaching Mathematics*, *13*(1), 14–18.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the Knowledge Quartet.* London: Sage.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Simon, M. & Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 3–31. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2014). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education 47, 497–509 (2015).* https://doi.org/10.1007/s11858-014-0641-8

Ubah, I. (2021). Pre-service mathematics teachers' semiotic transformation of similar triangles: Euclidean geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–22. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1857858

Ubuz, B. & Aydın, U. (2018). Geometry knowledge test about triangles: evidence on validity and reliability. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 659–673. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0964-y

Ulusoy, F. (2021). Prospective early childhood and elementary school mathematics teachers' concept images and concept definitions of triangles. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(5), 1057–1078. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10105-6

Uygun, T. (2016). *Developing mathematical practices in a social context: A hypothetical learning trajectory to support preservice middle school mathematics teachers' learning of triangles.* Unpublished doctoral dissertation, Middle East Technical University, Turkey.

Van der Sandt, S., & Nieuwoudt, H. D. (2003). Grade 7 teachers' and prospective teachers' content knowledge of geometry. *South African Journal of Education, 23*(3), 199–205.

Ward, R. A. (2004). An investigation of K-8 preservice teachers' concept images and mathematical definitions of polygons. *Issues in Teacher Education, 13*(2), 39–56.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119. https://doi.org/10.1023/A:1015535614355

Yang, Y. (2009). How a Chinese teacher improved classroom teaching in Teaching Research Group: A case study on Pythagoras theorem teaching in Shanghai. *ZDM Mathematics Education, 41*, 279–296 (2009). https://doi.org/10.1007/s11858-009-0171-y

Yew, W.T., Zamri, S.N.A.S. & Lian, L.H. (2010). Examining preservice teachers' knowledge of area formulae. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8,* 198–206. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.027

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9.baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Yurtyapan, M. İ., & Karataş, İ. (2020). Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Üçgenler ve Dörtgenler Konusuna İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin İncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *11*(1), 53-90. doi:10.16949/turkbilmat.443825

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Zazkis, D., & Zazkis, R. (2016). Prospective teachers' conceptions of proof comprehension: Revisiting a proof of the Pythagorean theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(4), 777–803. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9595-0