www.dergipark.gov.tr
ISSN:2148-3736
El-Cezerî Fen ve Mühendislik Dergisi
Cilt: 9, No: 4, 2022 (1201-1214)

El-Cezerî Journal of Science and Engineering
Vol: 9, No: 4, 2022 (1201-1214)
DOI : 10.31202/ecjse.1131830

ECJSE

Makale / Research Paper

Specht Oranına Göre Berezin Sayı Eşitsizlikleri

Mehmet GÜRDAL[1a], Hamdullah BAŞARAN[1b*]

[1]Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Isparta/TÜRKİYE
[*]07hamdullahbasaran@gmail.com

Received/Geliş: 16.06.2022 **Accepted/Kabul:** 07.09.2022

Öz: Berezin dönüşümü, düzgün fonksiyonları analitik fonksiyonların Hilbert uzayları üzerindeki operatörlerle ilişkilendirir. Hilbert fonksiyonel uzay $\mathcal{H}(\Omega)$ üzerinde bir A operatörünün Berezin sembolü ve Berezin sayısı

$$\tilde{A}(\mu) = \langle A\frac{K_\mu}{K_\mu}, \frac{K_\mu}{K_\mu}\rangle, \mu \in \Omega \text{ ve } ber(A) = \sup_{\mu\in\Omega}\left|\tilde{A}(\mu)\right|$$

şeklinde tanımlanır. Bu $\tilde{A}$ sınırlı fonksiyonu kullanılarak Hilbert fonksiyonel uzay operatörlerinin bazı yeni Berezin sayı eşitsizliklerini sunulmuştur. Specht oranı yardımıyla bazı eşitsizlikler genelleştirilmiş ve iyileştirilmiştir. Aynı zamanda bu iyileştirmeler kullanılarak Berezin yarıçap ve Berezin norm için çeşitli yeni eşitsizlikler gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Berezin sayısı, Hilbert fonksiyonel uzay, Specht oranı, pozitif operatör.

Berezin number inequalities in terms of Specht's ratio

Abstract: Smooth functions are associated with operators on Hilbert spaces of analytic functions through the Berezin transform. The Berezin symbol and the Berezin number of an operator A on the Hilbert functional space $\mathcal{H}(\Omega)$ over some set Ω with the reproducing kernel are defined, respectively, by

$$\tilde{A}(\mu) = \langle A\frac{K_\mu}{K_\mu}, \frac{K_\mu}{K_\mu}\rangle, \mu \in \Omega \text{ and } ber(A) = \sup_{\mu\in\Omega}\left|\tilde{A}(\mu)\right|.$$

By using this bounded function $\tilde{A}$, we present some new Berezin number inequalities of Hilbert functional space operators. Some inequalities with respect to Specht's ratio are improved and generalized. Using these modifications, we also establish various new inequalities for the Berezin radius and Berezin norm of operators.

Keywords: Berezin number, Hilbert functional space, Specht's ratio, positive operator.

1. Giriş

Matematik analizde, operatörlerin özelliklerini üst ve alt limitler şeklinde analiz etmek için eşitsizlikler kullanılır. Bilim ve mühendisliğin hemen hemen tüm alanlarında, matematiksel eşitsizlikler, gerçek dünyadaki sorunları tanımlamanın ve bunlara çözümler önermenin en büyük yoludur. Matematiksel ve fonksiyonel analiz dahil olmak üzere analiz derslerinde incelenen birçok operatör türünün sınırlılık özelliği, teori ve uygulama oluşturmada kritik bir unsurdur. Örneğin üst ve alt limitler, ilgili konuların ele alınmasında önemli olan operatör normunu oluşturmak için kullanılır. Matematik ve matematiksel fizikteki birçok araştırmacı, çekirdek üreten Hilbert uzayında tanımlanan bir operatörün Berezin dönüşümü ile ilgilenmektedir. Bu bağlamda, birkaç matematikçi (1)'de verilen Berezin yarıçap eşitsizliği hakkında önemli araştırmalar yürütmüştür (bkz. [1-3]). Aslında, bu eşitsizliğin iyileştirilmesi ve genişletilmesi akademisyenlerin ilgisini çekmektedir [4-7].

Bu makaleye atıf yapmak için
Gürdal, M., Başaran, H., "Spech Oranına Göre Berezin Sayı Eşitsizlikleri" El-Cezerî Fen ve Mühendislik Dergisi 2022, 9(4); 1201-1214.

How to cite this article
Gürdal, M., Başaran, H., "Berezin number inequalities in terms of Specht's ratio" El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2022, 9(4); 1201-1214.
ORCID ID: [a]0000-0003-0866-1869; [b]0000-0002-9864-9515

Bu araştırmanın amacı, çekirdek üreten Hilbert uzayındaki operatörler için Berezin dönüşümünü kullanarak Specht oranına göre bazı eşitsizlikleri iyileştirmek ve genelleştirmektir. Ayrıca, Berezin normu ve operatörlerin Berezin yarıçapı için birkaç ek eşitsizlik göstermek için daha önce açıklanan iyileştirmeler kullanılmıştır. İlgili sonuçlar [8] numaralı kaynakta yer almaktadır. Şimdi bu araştırmanın bulgularına devam etmek için gereken ön kavramları ana hatlarıyla belirteceğiz.

Bir çekirdek üreten Hilbert uzayı (kısaca, ÇÜHU) veya fonksiyonel Hilbert uzayı $\varphi_\mu(f) = f(\mu)$, $\mu \in \Omega$ fonksiyonelleri $\mathcal{H}$ üzerinde sürekli olacak şekilde bazı Ω kümesi üzerinde karmaşık değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayı olduğunu hatırlatalım. Buradan fonksiyonel analizdeki Riesz teoreminden her $\mu \in \Omega$ ve $f \in \mathcal{H}$ için $f(\mu) = \langle f, k_\mu \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_\mu \in H$ fonksiyonu vardır. Aynı zamanda $\{k_\mu : \mu \in \Omega\}$ kümesi $\mathcal{H}$ uzayının çekirdeği üretenidir. Literatürdeki iyi bilinen ÇÜHU'lar birim disk üzerinde Hardy uzayı, Fock uzayı, Bergman uzayı ve Dirichlet uzayıdır. Aronzajn [9] çekirdek üretenler ve ÇÜHU'ların teorisine katkı sağlamıştır.

Tanım 1. $\mathcal{H}$ bir Ω kümesinde bir ÇÜHU olsun. Eğer T, $\mathcal{H}$ uzayında sınırlı lineer bir operatör ise, o zaman

a. $\mu \in \Omega$ için μ de T nin Berezin dönüşümü (veya T nin Berezin sembolü)

$$\widetilde{\mathrm{T}}(\mu) := \langle \mathrm{T}\hat{\mathrm{k}}_\mu, \hat{\mathrm{k}}_\mu \rangle_{\mathcal{H}},$$

b. T nin Berezin aralığı (veya T nin Berezin kümesi)

$$\mathrm{Ber}(\mathrm{T}) := \mathrm{Range}(\widetilde{\mathrm{T}}) = \{\widetilde{\mathrm{T}}(\mu) : \mu \in \Omega\},$$

c. T nin Berezin yarıçapı (veya T nin Berezin sayısı)

$$\mathrm{ber}(\mathrm{T}) := \sup_{\mu \in \Omega} |\widetilde{\mathrm{T}}(\mu)|$$

ile verilir.

Ayrıca $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatörlerinin sözde Berezin normunu

$$\|T\|_{Ber} := \sup_{\mu \in \Omega} \|T\hat{k}_\mu\|$$

biçiminde tanımlıyoruz. Burada $\|T\|_{Ber}$ ifadesi $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uzayında bir yeni operatör norm belirler ve $ber(T) \leq \|T\|_{Ber} \leq \|T\|$ olduğu kolayca görülebilir. Çekirdek üreten Hilbert uzaylar hakkında daha fazla bilgi için Aronzajn [9] çalışmasına bakınız. Diğer taraftan Berezin dönüşümünün kendisi F. Berezin tarafından [10]'da tanıtılmış ve önemli operatörlerin birçok temel özelliği Berezin dönüşümlerinde kodlandığından operatör teorisinde kritik bir araç olduğu ispatlanmıştır. Operatörlerin Berezin aralığı ve Berezin yarıçapı, Karaev tarafından [11]'de tanıtılan ÇÜHU üzerindeki operatörlerin yeni sayısal özellikleridir.

$\mathcal{H}$ üzerinde her sınırlı T operatörü için Berezin dönüşümü $\tilde{T}$, Ω üzerinde sınırlı bir gerçel-analitik fonksiyondur. T operatörünün özellikleri genellikle $\tilde{T}$ Berezin dönüşümünün özelliklerine yansıtılır. Sırasıyla $Ber(T)$ ve $ber(T)$ ile de gösterilen Berezin kümesi ve sayısı iddiaya göre ilk olarak Karaev tarafından [11]'de resmen tanıtılmıştır.

Bir çekirdek üreten Hilbert uzayında T operatörünün Berezin aralığı (veya kümesi)

$$W(T) := \{\langle Tx, x \rangle : x \in \mathcal{H} \ ve \ \|x\| = 1\}$$

şeklinde tanımlı T nin sayısal aralığının bir altkümesidir. Bu sebeple

$$ber(T) \leq w(T) \coloneqq sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathcal{H}(\Omega)\ ve\ \|x\| = 1\}$$

(T operatörünün sayısal yarıçapı) olur. Bir operatörün sayısal aralığının bazı ilginç özellikleri vardır. Örneğin, bir operatörün spektrumunun, sayısal aralığının kapanışında yer aldığı iyi bilinmektedir. Bu teori ile ilgili temel özellikler için [12-15]'e başvururuz.

Diğer taraftan herhangi $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ için

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\| \tag{1}$$

ve

$$ber(T) \leq w(T) \leq \|T\| \tag{2}$$

iyi bilinen eşitsizliklerdir.

$(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$'nin karmaşık bir Hilbert uzayı olduğunu $\mathcal{L}(\mathcal{H})$'nin $\mathcal{H}$ üzerindeki tüm sınırlı lineer opeartörlerin C^*-cebirini gösterdiğini varsayalım. [16]'dan bazı tanımları ve kavramları hatırlıyoruz.

Eğer T operatörü kendine eş ($T = T^*$) ve $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ ise o zaman bir $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatörü pozitiftir ve $T \geq 0$ ile tanımlıdır. Denk olarak T pozitif olması için gerekli ve yeterli koşul bazı $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatörü için $T = R^*R$ olmasıdır. Bazı skaler d ve D ve her $x \in \mathcal{H}$ için $d \leq \langle Tx, x\rangle \leq D$ ise $dI \leq T \leq DI$ yazabiliriz. Burada I operatörü $\mathcal{L}(\mathcal{H})$'nin birim operatörü olarak tanımlanır. T'nin mutlak değeri $|T| = (T^*T)^{1/2}$ ile tanımlıdır. Kendine eş T operatörü için $dI \leq T \leq DI$ olması için gerekli ve yeterli koşul $sp(T) \subset [d, D]$. Ayrıca tüm pozitif tersinebilir operatörlerin kümesi $\mathcal{L}^+(\mathcal{H})$ ile tanımlanır.

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve R bir pozitif operatör olsun. $\beta \in [0,1]$ için T ve R operatörlerinin β-ağırlıklı geometrik ortalaması

$$T \ddagger_\beta R = T^{1/2}\left(T^{-1/2}RT^{-1/2}\right)^\beta T^{1/2}$$

ile tanımlıdır. Eğer pozitifliği korursa bir $\varphi: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{F})$ lineer dönüşümün pozitif olduğunu hatırlayınız. Eğer $\varphi(I_{\mathcal{H}}) = I_{\mathcal{F}}$ ise dönüşüm normalleştirilmiştir adını alır. Specht oranı bir h pozitif gerçel sayılar için

$$S(h) = \frac{h^{\frac{1}{h-1}}}{elogh^{\frac{1}{h-1}}}\ (h \neq 1)$$

biçiminde tanımlanır (bkz. [17, 18]). Bu kavram aşağıdaki özellikleri sağlar:

a. $S(1) = 1$ ve $h > 0$ için $S(h) = S\left(\frac{1}{h}\right) > 1$.

b. $S(h)$, $(1, \infty)$ üzerinde monoton artan bir fonksiyondur.

c. $S(h)$, $(0,1)$ üzerinde monoton azalan bir fonksiyondur.

Şimdi Specht oranı ile ilgili olarak aşağıda bazı sonuçlar verilmiştir:

Yardımcı Teorem 1 ([19])**.** $x, y > 0$ ve $\beta \in [0,1]$ için $(1-\beta)x + \beta y \geq S\left(\left(\frac{y}{x}\right)^r\right) x^{1-\beta} y^{\beta}$ dir. Burada $r = \min\{\beta, 1-\beta\}$ ve $S(.)$ ise Specht oranıdır.

Makale boyunca $\beta \in [0,1]$, $r = \min\{\beta, 1-\beta\}$ ve $S(.)$ ise Specht oranı olsun.

Teorem 1 ([19])**.** T ve R iki pozitif operatör olsun ve d, d', D, D' pozitif gerçel sayıları ise $h = \frac{D}{d}$ ve $h' = \frac{D'}{d'}$ olmak üzere (i) $0 \leq d'I \leq T \leq dI \leq DI \leq R \leq D'I$ veya (ii) $0 \leq d'I \leq R \leq dI \leq DI \leq T \leq D'I$ koşullarından en az birini sağlasın. O zaman

$$(1-\beta)T + \beta R \geq S(h^r) T \ddagger_{\beta} R \geq T \ddagger_{\beta} R \geq S(h^r)\{(1-\beta)T^{-1} + \beta R^{-1}\}^{-1}$$
$$\geq \{(1-\beta)T^{-1} + \beta R^{-1}\}^{-1}.$$

Uyarı 1. Eğer Teorem 1'de $T = xI, R = yI$, $\beta = \frac{1}{2}$ ve $r = \frac{1}{2}$ alınırsa o zaman

$$S(\sqrt{h})\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \tag{3}$$

dir.

[20] numaralı referansta Huban vd.

$$\mathrm{ber}(T) \leq \frac{1}{2}\||T| + |T^*|\|_{\mathrm{ber}} \leq \frac{1}{2}\left(\|T\|_{\mathrm{ber}} + \|T^2\|_{\mathrm{ber}}{}^{1/2}\right) \leq \|T\|_{\mathrm{ber}} \tag{4}$$

ve

$$\mathrm{ber}^r(T) \leq \frac{1}{2}\left\||T|^{2r\zeta} + |R^*|^{2r(1-\zeta)}\right\|_{\mathrm{ber}}, r \geq 1, 0 < \zeta < 1 \tag{5}$$

sonuçlarını ispatlamıştır. Başaran ve Gürdal ise [4]'te iyileştirilmiş Hölder-McCarthy eşitliği yardımıyla (5) eşitliğinin sol tarafını genelleştirmişlerdir. Huban vd. [7]'de iki operatörün çarpımı ile

$$\mathrm{ber}^r(R^*T) \leq \frac{1}{2}\||T|^r + |R|^r\|_{\mathrm{ber}}, r \geq 1 \tag{6}$$

eşitsizliğini göstermişlerdir.

2. Bilinen Yardımcı Teoremler

Bu bölümde, bazı eşitsizlikleri iyileştirmek ve genelleştirmek için ihtiyaç duyduğumuz bazı yararlı Yardımcı teoremler sunuyoruz.

Yardımcı Teorem 2 ([21])**.** $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olsun. Her $x, y \in \mathcal{H}$ için

(i) Eğer $0 \leq \alpha \leq 1$ ise o zaman

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \langle |T|^{2\alpha}x, x\rangle^{1/2}\langle |T^*|^{2(1-\alpha)}y, y\rangle^{1/2}, \tag{7}$$

(ii) Eğer f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar $f(t)g(t) = t$ koşulunu sağlıyorsa o zaman

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \sqrt{\|f(|T|)x\|\|g(|T^*|)y\|} \tag{8}$$

dir.

Bir konveks $f: J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve herhangi $u, v \in J$ için iyi bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \int_0^1 f(tu + (1-t)v)dt \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} \tag{9}$$

eşitsizliğinden elde edilir.

Yardımcı Teorem 3 ([22])**.** $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatörü $sp(T) \subset J$ özelliğine sahip kendine eş bir operatör ve $x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1$, olsun. O halde f, J üzerinde bir konveks fonksiyon ise

$$f(\langle Tx, x\rangle) \leq \langle f(T)x, x\rangle \tag{10}$$

dir. Eğer f içbükey ise, yukarıdaki eşitsizlik tersine çevrilir.

Bu bölümdeki dördüncü Yardımcı Teorem, [23]'ün doğrudan bir sonucudur.

Yardımcı Teorem 4. Eğer f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyon ve $T, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pozitif operatörler olsun. O zaman her $0 \leq \beta \leq 1$ için

$$\|f((1-\beta)T + \beta R)\| \leq \|(1-\beta)f(T) + \beta f(R)\| \tag{11}$$

olur.

Şimdi, üçüncü bölümde ihtiyacımız olan aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2. $T \in \mathcal{L}^+(\mathcal{H})$, R bir kendine eş operatör ve f, J gerçel aralığı üzerinde $sp(T^{-1/2}RT^{-1/2})$'de bulunan sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman sürekli fonksiyonel hesap kullanarak f-bağıntısı σ_f ile gösterilir ve

$$T\sigma_f R = T^{1/2} f(T^{-1/2}RT^{-1/2})T^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $0 \leq \beta \leq 1$ olmak üzere t^β ve $(1-\beta) + \beta t$ fonksiyonları için yukarıdaki tanımın, sırasıyla operatör ağırlıklı geometrik ortalamaya ve operatör ağırlıklı aritmetik ortalamaya yol açtığına dikkat ediniz.

Yardımcı Teorem 5 ([24])**.** $T, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bir pozitif operatörler olsun. O zaman

$$\|T + R\| \leq \frac{1}{2}\left(\|T\| + \|R\| + \sqrt{(\|T\| + \|R\|)^2 + 4\|T^{1/2}R^{1/2}\|^2}\right)$$

ve $\|T^{1/2}R^{1/2}\| \leq \|TR\|^{1/2}$ dir.

Eğer $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bir pozitif operatörse o zaman $\langle z, y\rangle_X = \langle Xz, y\rangle$ değeri $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir iç çarpım tanımladığını ve ayrıca [8]'den her bir $x, y, z \in \mathcal{H}$ ve $\langle x, x\rangle_X = \|x\|_X^2$ için

$$\frac{1}{2}\left(\|x\|_X\|z\|_X + |\langle x, z\rangle_X|\right)\|y\|_X^2 \leq |\langle x, y\rangle_X \langle y, z\rangle_X| \tag{12}$$

sonucunu çıkardığını hatırlayınız.

3. Temel Sonuçlar

Şimdi ilk teoremi ispatlayalım.

Teorem 2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ bir ÇÜHU olsun. Eğer $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve d, d', D, D' pozitif gerçel sayıları ise $h = \frac{D}{d}$ ve $h' = \frac{D'}{d'}$ olmak üzere (i) $0 \leq d'I \leq |T| \leq dI \leq DI \leq |T^*| \leq D'I$ veya (ii) $0 \leq d'I \leq |T^*| \leq dI \leq DI \leq |T| \leq D'I$ koşullarından en az birini sağlasın. O zaman

$$\mathrm{ber}(T) \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\|T\|_{ber} + \|T^2\|_{ber}^{1/2}\right) \tag{13}$$

dir.

İspat. $\hat{k}_\mu$ normalleştirilmiş çekirdek üreten olsun. $\alpha = \frac{1}{2}$ için (7) eşitsizliğini ve (3) eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\langle T\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right| \leq \langle |T|\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}} \langle |T^*|\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\langle |T|\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle + \langle |T^*|\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\langle (|T| + |T^*|)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right)$$

elde edilir. $\mu \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{\mu\in\Omega}\left|\langle T\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right| \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})} \sup_{\mu\in\Omega}\left(\langle (|T| + |T^*|)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right) \tag{14}$$

olur. Bu sebeple

$$\mathrm{ber}(T) \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\||T| + |T^*|\|_{ber}$$

elde edilir. (4) eşitliğinden

$$\mathrm{ber}(T) \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\|T\|_{ber} + \|T^2\|_{ber}^{1/2}\right)$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Aşağıdaki teoremi ispatlamak için Yardımcı Teorem 4'ü kullanıyoruz.

Teorem 3. $T, R, X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, f ve g fonksiyonları her $t \in [0, \infty)$ için $f(t)g(t) = t$ koşulunu sağlayan $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ve τ, ise $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan artan konveks fonksiyon olsun. Ayrıca d, d', D, D' pozitif gerçel sayıları ise $h = \frac{D}{d}$ ve $h' = \frac{D'}{d'}$ olmak üzere (i) $0 \leq d' \leq (R^*f^2(\widetilde{|X|})R)(\mu) \leq d \leq D \leq (T^*g^2(\widetilde{|X^*|})T)(\mu) \leq D'$ veya (ii) $0 \leq d' \leq (T^*f^2(\widetilde{|X|})T)(\mu) \leq d \leq D \leq (R^*g^2(\widetilde{|X^*|})R)(\mu) \leq D'$ koşullarından en az birini sağlasın. O zaman

$$\tau\big(\mathrm{ber}(T^*XR)\big) \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\|\tau(R^*f^2(|X|)R) + \tau(T^*g^2(|X^*|)T)\|_{\mathrm{ber}}$$

elde edilir.

İspat. $\mu \in \Omega$ keyfi sayı olsun. (8) eşitliği kullanılarak

$$\left|\langle T^*XR\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right| \leq \left|\langle XR\hat{k}_\mu, T\hat{k}_\mu\rangle\right| \leq \sqrt{\langle R^*f^2(|X|)R\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\langle T^*g^2(|X^*|)T\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle} \tag{15}$$

elde edilir. Şimdi (3) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\langle R^*f^2(|X|)R\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\langle T^*g^2(|X^*|)T\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle} \\
&\qquad\leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\big(\langle R^*f^2(|X|)R\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle + \langle T^*g^2(|X^*|)T\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\big) \\
&\qquad= \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\big(\langle(R^*f^2(|X|)R + T^*g^2(|X^*|)T)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\big)
\end{aligned}$$

olur. Son elde edilen eşitsizlik ve (15) eşitsizliği

$$\left|\langle T^*XR\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right| \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\big(\langle(R^*f^2(|X|)R + T^*g^2(|X^*|)T)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\big)$$

olduğunu verir. $\mu \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\mathrm{ber}(T^*XR) \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\|R^*f^2(|X|)R + T^*g^2(|X^*|)T\|_{\mathrm{ber}}$$

elde edilir. Ayrıca (10) eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{ber}(T^*XR)\big) &\leq \tau\left(\frac{2}{2S(\sqrt{h})}\left\|\frac{R^*f^2(|X|)R + T^*g^2(|X^*|)T}{2}\right\|_{\mathrm{ber}}\right) \\
&\leq \frac{1}{S(\sqrt{h})}\tau\left(\left\|\frac{R^*f^2(|X|)R + T^*g^2(|X^*|)T}{2}\right\|_{\mathrm{ber}}\right) && (16) \\
&\leq \frac{1}{S(\sqrt{h})}\left\|\tau\left(\frac{R^*f^2(|X|)R + T^*g^2(|X^*|)T}{2}\right)\right\|_{\mathrm{ber}} && (17) \\
&\leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\|\tau(R^*f^2(|X|)R + T^*g^2(|X^*|)T)\|_{\mathrm{ber}}
\end{aligned}$$

τ'nun negatif olmayan artan konveks fonskiyon olmasından kaynaklanan (16) ve (17) eşitsizliklerinden $\frac{1}{S(\sqrt{h})} \leq 1$ olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca Jensen eşitsizliğinden her bir pozitif $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatör için

$$\tau(\|Y\|_{\mathrm{ber}}) = \tau\left(\sup_{\mu\in\Omega}\langle Y\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\right) = \sup_{\mu\in\Omega}\big(\tau\langle Y\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle\big) \leq \sup_{\mu\in\Omega}\langle\tau(Y)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle = \|\tau(Y)\|_{\mathrm{ber}}$$

ifadesine ulaşılır. İstediğimiz sonuca sahibiz.

Uyarı 2. Her $T, R, X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ için Bakherad ve Garayev [26, Teorem 3.5] ve $f(t) = t^r$ fonksiyonundan

$$\mathrm{ber}^{r}(T^{*}XR) \le \frac{1}{2}\left\|(T^{*}|X^{*}|T)^{r} + (R^{*}|X|R)^{r}\right\|_{\mathrm{ber}}, \qquad r \ge 1 \tag{18}$$

genel Berezin yarıçap eşitsizliği ispatlanmıştır.

Eşitsizlik (18) ve Teorem 3'ten aşağıdaki eşitsizlikler verilebilir.

Sonuç 1. $f(t) = t^{r}$, $r \ge 1$ fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde artan konveks fonksiyon olsun. Ayrıca d, d', D, D' pozitif gerçel sayıları ise $h = \frac{D}{d}$ ve $h' = \frac{D'}{d'}$ olmak üzere (i) $0 \le d'I \le R^{*}|X^{*}|R \le dI \le DI \le T^{*}|X^{*}|T \le D'I$ veya (ii) $0 \le d'I \le T^{*}|X|T \le dI \le DI \le R^{*}|X^{*}|R \le D'I$ koşullarından en az birini sağlasın. O zaman

(i) $\mathrm{ber}^{r}(T^{*}XR) \le \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left\|(T^{*}|X^{*}|T)^{r} + (R^{*}|X|R)^{r}\right\|_{\mathrm{ber}}$, $r \ge 1$,

(ii) Eğer $X = I$ ise o zaman $\mathrm{ber}^{r}(T^{*}R) \le \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left\||T|^{2r} + |R|^{2r}\right\|_{\mathrm{ber}}$,

(iii) Eğer $T = R = I$ ise o zaman $\mathrm{ber}^{r}(X) \le \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left\||X^{*}|^{r} + |X|^{r}\right\|_{\mathrm{ber}}$

dir.

Şimdi, operatörlerin f-bağlantısı ile ilgili Berezin yarıçap eşitsizliğine göre aşağıdaki teoremi sunuyoruz.

Teorem 4. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ bir ÇÜHU, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, R kendine eş, $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, ve f fonksiyonu J gerçel aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca d, d', D, D' pozitif gerçel sayıları ise $h = \frac{D}{d}$ ve $h' = \frac{D'}{d'}$ olmak üzere (i) $0 \le d'I \le X^{*}T^{1/2}f^{2}\left(T^{-1/2}RT^{-1/2}\right)T^{1/2} \le dI \le DI \le T \le D'I$ veya (ii) $0 \le d'I \le T \le dI \le DI \le X^{*}T^{1/2}f^{2}\left(T^{-1/2}RT^{-1/2}\right)T^{1/2} \le D'I$ koşullarından en az birini sağlasın. O zaman

$$\mathrm{ber}\big((T\sigma_{f}R)X\big) \le \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left\|X^{*}T^{\frac{1}{2}}f^{2}\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X + T\right\|_{\mathrm{ber}} \tag{19}$$

İspat. Her $\mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\left|\langle (T\sigma_{f}R)X\hat{k}_{\mu}, \hat{k}_{\mu}\rangle\right| &= \left|\langle T^{\frac{1}{2}}f\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X\hat{k}_{\mu}, \hat{k}_{\mu}\rangle\right| \\
&= \left|\langle f\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X\hat{k}_{\mu}, T^{\frac{1}{2}}\hat{k}_{\mu}\rangle\right| \\
&\le \left\|f\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X\hat{k}_{\mu}\right\| \left\|T^{\frac{1}{2}}\hat{k}_{\mu}\right\| \\
&= \sqrt{\langle f\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X\hat{k}_{\mu}, f\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X\hat{k}_{\mu}\rangle\langle T^{\frac{1}{2}}\hat{k}_{\mu}, T^{\frac{1}{2}}\hat{k}_{\mu}\rangle} \\
&= \sqrt{\langle X^{*}T^{\frac{1}{2}}f^{2}\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X\hat{k}_{\mu}, \hat{k}_{\mu}\rangle\langle T\hat{k}_{\mu}, \hat{k}_{\mu}\rangle}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\langle\left(X^{*}T^{\frac{1}{2}}f^{2}\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X+T\right)\hat{k}_{\mu},\hat{k}_{\mu}\rangle$$

dir. $\mu \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{\mu\in\Omega}\left|\langle(T\sigma_{f}R)X\hat{k}_{\mu},\hat{k}_{\mu}\rangle\right| \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\sup_{\mu\in\Omega}\langle\left(X^{*}T^{\frac{1}{2}}f^{2}\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X+T\right)\hat{k}_{\mu},\hat{k}_{\mu}\rangle$$

ve

$$\mathrm{ber}\big((T\sigma_{f}R)X\big) \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left\|X^{*}T^{\frac{1}{2}}f^{2}\left(T^{-\frac{1}{2}}RT^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{1}{2}}X+T\right\|_{\mathrm{ber}}$$

elde edilir ki bu ise istenilen (19) eşitsizliğini üretir.

Eğer $f(t)=\sqrt{t}$ alınırsa, aşağıdaki sonuç Teorem 4'ün kolay bir sonucudur.

Sonuç 2. $T \in \mathcal{L}^{+}(\mathcal{H})$ ve R pozitif olacak şekilde $T, R, X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer Teorem 4'ün (i) veya (ii) koşullarından birisi sağlanıyorsa, o zaman

$$\mathrm{ber}\big((T \ddagger R)X\big) \leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\|X^{*}RX+T\|_{\mathrm{ber}}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremlerde, çarpım operatörleriyle ilgili Berezin yarıçap eşitsizliği için bazı eşitsizlikler Specht oranı ile iyileştirilmiştir.

Teorem 5. $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Omega)$ bir ÇÜHU olsun. X bir pozitif operatör olmak üzere $T, R, P, X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olduğunu varsayalım. Eğer d, d', D, D' pozitif gerçel sayıları ise $h=\frac{D}{d}$ ve $h'=\frac{D'}{d'}$ olmak üzere (i) $0 \leq d'I \leq T^{*}XT \leq dI \leq DI \leq R^{*}XR \leq D'I$ veya (ii) $0 \leq d'I \leq R^{*}XR \leq dI \leq DI \leq T^{*}XT \leq D'I$ koşullarından en az birini sağlasın. O zaman

$$\|T^{*}XP\|_{\mathrm{Ber}}\|R^{*}XP\|_{\mathrm{Ber}} \leq \frac{1}{2}\left\|X^{1/2}P\right\|_{\mathrm{Ber}}^{2}\left[\frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\left\|X^{1/2}T\right\|_{\mathrm{ber}}^{2}+\left\|X^{1/2}R\right\|_{\mathrm{ber}}^{2}\right)+\|R^{*}XT\|_{\mathrm{ber}}\right] \tag{20}$$

ve

$$\mathrm{ber}(P^{*}XTR^{*}XP) \leq \frac{1}{2}\left\|X^{1/2}P\right\|_{\mathrm{Ber}}^{2}\left[\frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\left\|X^{1/2}T\right\|_{\mathrm{ber}}^{2}+\left\|X^{1/2}R\right\|_{\mathrm{ber}}^{2}\right)+\|R^{*}XT\|_{\mathrm{ber}}\right] \tag{21}$$

İspat. $\hat{k}_{\mu}$ normalleştirilmiş çekirdek üreten olsun. O zaman X pozitif olduğundan ve (12) eşitsizliğinden $x, y, z \in \mathcal{H}$ olmak üzere

$$\frac{1}{2}\left(\|z\|_{X}\|y\|_{X}+|\langle z,y\rangle_{X}|\right)\|x\|_{X}^{2} \leq |\langle z,y\rangle_{X}\langle x,y\rangle_{X}|$$

dir. Bu sebeple

$$\frac{1}{2}\left[\langle Xz,z\rangle^{1/2}\langle Xy,y\rangle^{1/2}+|\langle Xz,y\rangle|\right]\langle Xx,x\rangle\leq|\langle Xz,x\rangle\langle Xx,y\rangle|$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte $z=T\hat{k}_\lambda$, $y=R\hat{k}_\xi$ ve $x=P\hat{k}_\mu$ alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\langle XT\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle XR\hat{k}_\xi,R\hat{k}_\xi\rangle^{\frac{1}{2}}+\left|\langle XT\hat{k}_\lambda,R\hat{k}_\xi\rangle\right|\right)\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\\ \leq\left|\langle\hat{k}_\lambda,T^*XP\hat{k}_\mu\rangle\langle\hat{k}_\mu,P^*XR\hat{k}_\mu\rangle\right|\end{aligned}\tag{22}$$

elde edilir. $\lambda=\xi$ ile $\lambda,\xi\in\Omega$ üzerinden supremum alınırsa her $\mu\in\Omega$ için

$$\begin{aligned}\left\|T^*XP\hat{k}_\mu\right\|\left\|R^*XP\hat{k}_\mu\right\|&=\sup_{\lambda\in\Omega}\left|\langle\hat{k}_\lambda,T^*XP\hat{k}_\mu\rangle\right|\sup_{\xi\in\Omega}\left|\langle\hat{k}_\xi,R^*XP\hat{k}_\mu\rangle\right|\\
&=\sup_{\lambda\in\Omega}\left|\langle\hat{k}_\lambda,T^*XP\hat{k}_\mu\rangle\right|\sup_{\xi\in\Omega}\left|\langle R^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\xi\rangle\right|\\
&=\sup_{\lambda\in\Omega}\left|\langle\hat{k}_\lambda,T^*XP\hat{k}_\mu\rangle\right|\sup_{\xi\in\Omega}\left|\langle\hat{k}_\mu,P^*XR\hat{k}_\xi\rangle\right|\\
&=\sup_{\lambda=\xi\in\Omega}\left\{\left|\hat{k}_\lambda,T^*XP\hat{k}_\mu\right|\left|\langle\hat{k}_\mu,P^*XR\hat{k}_\xi\rangle\right|\right\}\\
&\leq\frac{1}{2}\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\sup_{\lambda=\xi\in\Omega}\left(\langle T^*XT\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle R^*XR\hat{k}_\xi,\hat{k}_\xi\rangle^{\frac{1}{2}}+\left|\langle R^*XT\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\xi\rangle\right|\right)\\
&\leq\frac{1}{2}\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\left(\frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\langle T^*XT\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle+\langle R^*XR\hat{k}_\xi,\hat{k}_\xi\rangle\right)+\left|\langle R^*XT\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\xi\rangle\right|\right)\\
&\leq\frac{1}{2}\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\left(\sup_{\lambda\in\Omega}\frac{1}{2S(\sqrt{h})}\langle T^*XT\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle+\sup_{\xi\in\Omega}\frac{1}{2S(\sqrt{h})}\langle R^*XR\hat{k}_\xi,\hat{k}_\xi\rangle\right.\\
&\qquad\left.+\sup_{\lambda=\xi\in\Omega}\left|\langle R^*XT\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\xi\rangle\right|\right)\\
&\leq\frac{1}{2}\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\left(\frac{1}{2S(\sqrt{h})}(\|T^*XT\|_{ber}+\|R^*XR\|_{ber})+\|R^*XT\|_{ber}\right)\end{aligned}\tag{23}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$T^*XT=\left|X^{1/2}T\right|^2,R^*XR=\left|X^{1/2}R\right|^2,P^*XP=\left|X^{1/2}P\right|^2\tag{24}$$

olduğundan ve (23) den yararlanarak (20) eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$\left|\langle P^*XRT^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|=\left|\langle T^*XP\hat{k}_\mu,R^*XP\hat{k}_\mu\rangle\right|\leq\left\|T^*XP\hat{k}_\mu\right\|\left\|R^*XP\hat{k}_\mu\right\|$$

dir. (20) eşitsizliği sayesinde

$$\begin{aligned}&\left|\langle P^*XRT^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\\
&\quad\leq\frac{1}{2}\left\|X^{1/2}P\hat{k}_\mu\right\|^2\left[\frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\left\|X^{1/2}T\right\|_{ber}^2+\left\|X^{1/2}R\right\|_{ber}^2\right)+\|R^*XT\|_{ber}\right]\end{aligned}\tag{25}$$

dir. (25) eşitsizliğinde $\mu\in\Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$ber(P^*XRT^*XP)\tag{26}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\|X^{1/2}P\right\|_{Ber}^{2}\left[\frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\left\|X^{1/2}T\right\|_{ber}^{2}+\left\|X^{1/2}R\right\|_{ber}^{2}\right)+\|R^{*}XT\|_{ber}\right]$$

olur. (26) eşitsizliği ile $\mathrm{ber}(P^*XRT^*XP) = \mathrm{ber}(P^*XTR^*XP)$ olduğundan, arzulanan (21) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 6. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ bir ÇÜHU olsun. $R^*XP = P^*XT$ olacak şekilde X bir pozitif operatör olmak üzere $T, R, P, X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olduğunu varsayalım. Eğer d, d', D, D' pozitif gerçel sayıları ise $h = \frac{D}{d}$ ve $h' = \frac{D'}{d'}$ olmak üzere (i) $0 \leq d'I \leq T^*XT \leq dI \leq DI \leq R^*XR \leq D'I$ veya (ii) $0 \leq d'I \leq R^*XR \leq mI \leq DI \leq T^*XT \leq D'I$ koşullarından en az birini sağlasın. O zaman

$$\mathrm{ber}^2(P^*XT) \leq \frac{1}{2}\left\|X^{\frac{1}{2}}P\right\|_{Ber}^{2}\left[\left(\left\|\frac{\left|X^{\frac{1}{2}}T\right|^2+\left|X^{\frac{1}{2}}R\right|^2}{2S(\sqrt{h})}\right\|\right)\right]+\mathrm{ber}(R^*XT)$$

olur.

İspat. $\mu \in \Omega$ keyfi sayı olsun. (22) eşitsizliğini kullanarak her $\mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\langle T^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}}\langle R^*XR\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}}+\left|\langle R^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\right)\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\\ \geq\left|\langle\hat{k}_\mu,T^*XP\hat{k}_\mu\rangle\langle\hat{k}_\mu,R^*XP\hat{k}_\mu\rangle\right|\end{aligned} \tag{27}$$

elde edilir. Ayrıca $R^*XP = P^*XT = (T^*XP)^*$ olduğu iyi bilinen bir gerçektir. O halde her $\mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}\left|\langle\hat{k}_\mu,T^*XP\hat{k}_\mu\rangle\langle\hat{k}_\mu,R^*XP\hat{k}_\mu\rangle\right| &= \left|\langle\hat{k}_\mu,T^*XP\hat{k}_\mu\rangle\langle\hat{k}_\mu,(T^*XP)^*\hat{k}_\mu\rangle\right|\\ &= \left|\langle T^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|^2=\left|\langle P^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|^2\end{aligned} \tag{28}$$

olur. Bu sebeple (27) ve (28) eşitsizlikleri her $\mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}&\left|\langle P^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|^2\\ &\quad\leq\frac{1}{2}\left(\langle T^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}}\langle R^*XR\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}}+\left|\langle R^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\right)\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\end{aligned} \tag{29}$$

olduğunu verir. Şimdi (3) eşitsizliği kullanılarak her $\mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}\langle T^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}}\langle R^*XR\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\left(\langle T^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle+\langle R^*XR\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right)\\ &= \langle\frac{T^*XT+R^*XR}{2S(\sqrt{h})}\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla (29) eşitsizliği iyileştirebiliriz ve buda

$$\left|\langle P^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|^2\leq\frac{1}{2}\left(\langle\frac{T^*XT+R^*XR}{2S(\sqrt{h})}\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle+\left|\langle R^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\right)\langle P^*XP\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle \tag{30}$$

ima ederiz. Eşdeğer olarak, (24) kullanarak her $\mu \in \Omega$ için

$$\left|\langle P^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|^2 \le \frac{1}{2}\left(\langle\frac{\left|X^{\frac{1}{2}}T\right|^2+\left|X^{\frac{1}{2}}R\right|^2}{2S(\sqrt{h})}\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle + \left|\langle R^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\right)\langle\left|X^{1/2}P\right|^2\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\langle\left|X^{1/2}P\right|\hat{k}_\mu,\left|X^{1/2}P\right|\hat{k}_\mu\rangle\left(\langle\frac{\left|X^{\frac{1}{2}}T\right|^2+\left|X^{\frac{1}{2}}R\right|^2}{2S(\sqrt{h})}\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle + \left|\langle R^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\|X^{1/2}P\hat{k}_\mu\right\|^2\left(\langle\frac{\left|X^{1/2}T\right|^2+\left|X^{1/2}R\right|^2}{2S(\sqrt{h})}\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle + \left|\langle R^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\right)$$

yazabiliriz. Böylece her $\mu \in \Omega$ için

$$\left|\langle P^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|^2 \le \frac{1}{2}\left\|X^{1/2}P\hat{k}_\mu\right\|^2\left(\langle\frac{\left|X^{1/2}T\right|^2+\left|X^{1/2}R\right|^2}{2S(\sqrt{h})}\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle + \left|\langle R^*XT\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\rangle\right|\right) \tag{31}$$

olur. Şimdi (31) eşitsizliğinde $\mu \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa istenilen

$$\mathrm{ber}^2(P^*XT) \le \frac{1}{2}\left\|X^{1/2}P\right\|_{Ber}^2\left[\left(\left\|\frac{\left|X^{1/2}T\right|^2+\left|X^{1/2}R\right|^2}{2S(\sqrt{h})}\right\|\right)+\mathrm{ber}(R^*XT)\right]$$

eşitsizlik elde edilir.

Operatörler için Berezin yarıçap eşitsizlikleri ve diğer ilgili sonuçlarla ilgili daha yeni sonuçlar için [2, 3, 27-30] kaynaklarını öneriyoruz.

4. Sonuç

Bu çalışmada Hilbert fonksiyonel uzay operatörlerinin bazı yeni Berezin sayı eşitsizlikleri araştırılmaktadır. Specht oranı yardımıyla bazı eşitsizlikler genelleştirilmektedir ve iyileştirilmektedir. Aynı zamanda bu iyileştirmeler kullanılarak Berezin yarıçap ve Berezin norm için çeşitli yeni eşitsizlikler gösterilmektedir. Özel durumda T, R pozitif ve X sınırlı olacak şekilde $T, R, X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ için

$$\mathrm{ber}\big((T \ddagger R)X\big) \le \frac{1}{2S(\sqrt{h})}\|X^*RX+T\|_{ber}$$

elde edilmektedir.

Teşekkür

Bu çalışma Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: FDK-2022-8878.

Yazar(lar)ın Katkıları

MG ve HB birlikte teorinin tanımlanmasında, oluşturulmasında ve makalenin yazımında katkı sağlamışlardır. Her iki yazar da makalenin son halini okudu ve onayladı.

Çıkar Çatışması

Yazarlar, çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar

[1]. Garayev, M.T., Gürdal, M., Okudan, A., "Hardy-Hilbert's inequality and a power inequality for Berezin numbers for operators", Math. Inequal. Appl., 2016, 19: 883-891.

[2]. Garayev, M.T., Gürdal, M., Saltan, S., "Hardy type inequaltiy for reproducing kernel Hilbert space operators and related problems", Positivity, 2017, 21: 1615-1623.

[3]. Garayev, M.T., Guedri, H., Gürdal, M., Alsahli, G.M., "On some problems for operators on the reproducing kernel Hilbert space", Linear Multilinear Algebra, 2021, 69(11): 2059-2077.

[4]. Başaran, H., Gürdal, M., "Berezin number inequalities via inequality", Honam Math. J., 2021, 43(3): 523-537.

[5]. Başaran, H., Gürdal, V., "Berezin radius and Cauchy-Schwarz inequality", Montes Taurus J. Pure Appl. Math., 2023, 5(3): 16-22.

[6]. Başaran, H., Huban, M.B., Gürdal, M., "Inequalities related to Berezin norm and Berezin number of operators", Bull. Math. Anal. Appl., 2022, 14(2): 1-11.

[7]. Huban, M.B., Başaran, H., Gürdal, M., "New upper bounds related to the Berezin number inequalities", J. Inequal. Spec. Funct., 2021, 12(3): 1-12.

[8]. Khatib, Y., Hassani, M., Amyari, M., "Refinements numerical radius inequalities via Specht's ratio", J. Math. Ext., 2022, 16(7): 1-18.

[9]. Aronzajn, N., "Theory of reproducing kernels", Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68: 337-404.

[10]. Berezin, F.A., "Covariant and contravariant symbols for operators", Math. USSR-Izvestiya, 1972, 6: 1117-1151.

[11]. Karaev, M.T., "Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces", J. Funct. Anal., 2006, 238: 181-192.

[12]. Karaev, M.T., "Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator theory", Complex Anal. Oper. Theory, 2013, 7: 983-1018.

[13]. Haydarbeygi, Z., Amyari, M., "Some refinements of the numerical radius inequalities via Young inequality", Kragujevac J. Math., 2021, 45(2): 191-202.

[14]. Kittaneh, F., El-Haddad, M., "Numerical radius inequalities for Hilbert space operators II", Studia Math., 2007, 182(2): 133-140.

[15]. Shebrawi, K., Albadawi, H., "Numerical radius and operator norm inequalities", J. Inequal. Appl. Art. ID 492154, 2009: 11 pp.

[16]. Josip Pečarić, Takayuki Furuta, Jadranka Mićić Hot, Yuki Seo, "Mond-Pečarić, Method in Operator Inequalities, Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on Hilbert Space". Monographs in Inequalities, 1. Element, Zagreb, 2005.

[17]. Izumino, S., Seo, Y., "Determinant for positive operators and Specht's theorem", Sci. Math. Soc., 1998, 1(3): 307-310.

[18]. Specht, W., "Zur theorie der elementaren Mittel", Math. Z., 1960, 74: 91-98.

[19]. Furuichi, S., "Refined Young inequalities with Specht's ratio", J. Egyptian Math. Soc., 2012, 20(1): 46-49.

[20]. Huban, M.B., Başaran, H., Gürdal, M., Some new inequalities via Berezin numbers", Turk. J. Math. Comput. Sci., 2022, 14(1), 129-137

[21]. Kittaneh, F., “Notes on some inequalities for Hilbert space operators”, Publ. Res. Ins. Math. Sci. 1988, 24: 283-293.

[22]. Mond, B., Pečarić, J., “Convec inequalities in Hilbert space”, Houston J. Math., 1993, 46: 221-232.

[23]. Aujla, J., Silva, F., “Weak majorization inequalities and convex functions”, Linear Algebra Appl., 2003, 369: 217-233.

[24]. Kittaneh, F., “A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix”, Studia Math., 2003, 158(1): 11-17.

[25]. Dragomir, S.S., “On some inequalities for numerical radius of operators in Hilbert sapaces”, Korean J. Math., 2017, 25(2): 247-259.

[26]. Bakherad, M., Garayev, M.T., “Berezin number inequalities for operators”, Concrete Operators 2019, 6(1): 33-43.

[27]. Garayev, M., Bouzeffour, F., Gürdal, M., Yangöz, C.M., “Refinements of Kantorovich type, Schwarz and Berezin number inequalities”, Extracta Math., 2020, 35: 1-20.

[28]. Gürdal, M., Başaran, H., “A-Berezin number of operators”, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 2022, 48(1): 77-87.

[29]. Gürdal, V., Başaran, H., “Huban, M.B., Further Berezin radius inequalities”, Palestine J. Math., to appear, 2023.

[30]. Gürdal, V., Güncan, A.N., “Berezin number inequalities via operator convex functions”, Electr. J. Math. Analy. Appl., 2022, 10(2): 83-94.