



**Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa
Bilimleri Dergisi**
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

<http://dergipark.gov.tr/usufedbid>
DOI: 10.47137/usufedbid.1137666



Araştırma makalesi

**Kesirli Mertebeden Pseudo-Hiperbolik Kısmi Diferansiyel
Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Yöntemiyle Yaklaşık
Çözümü**

Harun Çiçek, Mahmut Modanlı*

Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa, Türkiye

Geliş: 29 Haziran 2022

Kabul: 01 Ağustos 2022 / Received: 29 June 2022

Accepted: 01 August 2022

Abstract

In this study, the solution of fractional order Pseudo-hyperbolic partial differential equation with initial conditions will be examined by homotopy perturbation method. Although the fractional Pseudo-hyperbolic partial differential equation has a solution with different methods, the solution is made with this method, since its solution is shorter and the margin of error is less with the homotopy perturbation method. In addition, with the help of Matlab program, the full solution was visualized with graphics.

Keywords: *Fractional order, Pseudo-Hyperbolic equation, homotopy p perturbation method, exact solution, approximate solution.*

Özet

Bu çalışmada başlangıç değerlere bağlı kesirli mertebeden (fractional order) Pseudo-hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin homotopi pertürbasyon metoduyla çözümü incelenecektir. Kesirli mertebeden Pseudo-Hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin farklı yöntemlerle çözümü mevcut olmasına rağmen homotopi pertürbasyon yöntemiyle çözümü daha kısa ve hata payı daha az olduğundan çözüm bu yöntemle yapılmıştır. Ayrıca Matlab programı yardımıyla tam çözüm ve yaklaşık çözümün farklı değerler için grafikleri görselleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Kesirli mertebe, Pseudo-Hiperbolik denklem, homotopi p pertürbasyon metodu, tam çözüm, yaklaşık çözüm.*

©2022 Usak University all rights reserved.

*Corresponding author: Harun Çiçek

E-mail: haruncicek@harran.edu.tr (ORCID ID: 0000-0003-3018-3015)

1. Giriş

Pseudo-hiperbolik lineer denklemlerin mühendislik, fizik ve uygulamalı matematik alalarında birçok akademisyen tarafından çalışıldığı bilinmektedir. Pseudo-hiperbolik fonksiyonların çeşitli problemlerde birçok uygulaması vardır, örneğin fonksiyonel diferansiyel denklemler, integral denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler. Kesirli diferansiyel sistem; adi diferansiyel sistemin çözüm üretmediği alanlarda devreye girer ve çözüm üretir. Kesirli mertebeden Pseudo-Hiperbolik denklemlerin çözümleri daha az kişi tarafından çalışılmıştır ve çalışılmaya devam edilmektedir. Kesirli mertebeden denklemlerin çözümü yapılırken birçok yöntem kullanılmaktadır. 2011'de Liu vd. [1] "Genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodunu", 2006'da Momani vd. [2] ve 2013'de Sakar vd. [3] "Adomian ayrıştırma metodunu", 2000'de Zubik-Kowal [4] "Chebyshev pseudo spektral metodunu", 2014'de Kumar vd. [5] "Değiştirilmiş Laplace dönüşümü metodunu", 2012'de yine Kumar vd. [6] "Sumudu dönüşümü metodunu", 2012'de Tanthanuch [7] "Grup analiz metodunu", 2010'da Kurulay [8] "Dinamik akış modelini" kullanarak çözümler yapmışlardır.

Pseudo-Hiperbolik diferansiyel denklemlerle ilgili 2022'de Abdulazeez vd. [9], 2020'de Modanlı vd. [10], 2016'da Fedotov vd. [12], 2021'de Osman vd. [11] ve birçok akademisyen çalışmalar yapmışlardır.

Homotopi yöntemiyle diferansiyel denklem çözümleri; 2014'de Chavan vd. [13] tarafından Üçüncü mertebeden Korteweg-De Vries denklemine, 2021'de He vd. [14] tarafından Fraktal Toda osilatörüne, 2021'de Karimiasl vd. [15] tarafından piezoelektrik çok ölçekli sandviç kompozit çift kavisli gözenekli sıg kabukların burkulma sonrası analizine, 2021'de Rezapour vd. [16] tarafından Nanopartiküller sağlayan nanotüplerin dinamik analizinde, 2021'de Modanlı vd. [17] Üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin çözümünde Homotopi yöntemini kullanmıştır.

Kesirli mertebeden Pseudo-Hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin çözümü farklı yöntemlerle mevcut olmasına rağmen literatürde homotopi permütasyon yöntemiyle çözüm azdır ve bu yöntemle çözüm daha kısa ve hata payı daha azdır. Bu yöntemin bu denklemler için son derece verimli olduğunu gözlemliyoruz. Çünkü diğer yöntemlerin kesin çözümünü elde etmek için daha fazla adıma ihtiyaç duyulmasına rağmen yeni elde ettiğimiz yöntemle daha az adım atarak tam bir çözüm oluşturulmuştur. Tabi kullanılan başlangıç değer problemine bağlı olarak bazen tam çözüme değil yaklaşık çözüm elde edilir. Dolayısıyla uygun başlangıç değer problemimizin çözümünü bu yöntemle yaptık ve tam çözümünü elde ettik.

2. Materyal ve Yöntem

Şimdi aşağıda verilen kesirli mertebeden pseudo-hiperbolik denkleminin çözümü için homotopi pertürbasyon metodunu oluşturalım. Bu denklem

$$\begin{cases} \frac{\partial^\rho \mu(u,v)}{\partial u^\rho} = k\mu_{uv}(u,v) + \mu_{vv}(u,v) + h(u,v) \\ \mu(0,v) = \vartheta_1(v), \quad \mu_u(0,v) = \vartheta_2(v), \quad 0 \leq v \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde dir. Burada, $1 \leq \rho \leq 2$ ve $\frac{\partial^\rho \mu(u,v)}{\partial u^\rho}$ ifadesi de ρ . mertebeden Caputo kesirli türevidir.

(2.1) probleminin Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^p \mu(u,v)}{\partial u^p} \right\} = \mathcal{L} \{ k\mu_{uvv}(u, v) + \mu_{vv}(u, v) + h(u, v) \} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.1) denklemindeki başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$U(s, x) = \frac{1}{s^\rho} [s\vartheta_1(v) + \vartheta_2(v) + H(s, v)] + \mathcal{L} \{ k\mu_{uvv}(u, v) + \mu_{vv}(u, v) \}$$

bulunur. Burada $\mu(s, v)$, $\mu(u, v)$ 'in ve $H(s, v)$, $h(u, v)$ in Laplace dönüşümüdür. $\mu(s, v)$ fonksiyonu

$$\mu(s, v) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i \mu_i(s, v)$$

formunda bulunabilir. Burada $i = 0, 1, 2, \dots$ $\mu_i(s, v)$ in bilinmeyen fonksiyonudur. Bu durumda

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i \mu_i(s, v) = \frac{1}{s^\rho} [s\vartheta_1(v) + \vartheta_2(v) + H(s, v)] - \frac{p}{s^\rho} \mathcal{L} \{ k\mu_{uvv}(u, v) + \mu_{vv}(u, v) \}$$

formülü elde edilebilir. p 'nin kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılması ile

$$p^0: \mu_0(s, v) = \frac{1}{s^\rho} [s\vartheta_1(v) + \vartheta_2(v) + H(s, v)],$$

$$p^1: \mu_1(s, v) = \frac{1}{s^\rho} \mathcal{L} \{ k(\mu_0)_{tt}(u, v) + (\mu_0)_{vv}(u, v) \},$$

(2.3)

$$p^2: \mu_2(s, v) = \frac{1}{s^\rho} \mathcal{L} \{ k(\mu_1)_{tt}(u, v) + (\mu_1)_{vv}(u, v) \},$$

⋮

$$p^{n+1}: \mu_{n+1}(s, v) = \frac{1}{s^\rho} \mathcal{L} \{ k(\mu_n)_{tt}(u, v) + (\mu_n)_{vv}(u, v) \}.$$

formülleri bulunur. $p \rightarrow 1$ iken, (2.1) probleminin çözümü

$$H_n(s, v) = \sum_{i=0}^n p^i \mu_i(s, v) \quad (2.4)$$

olarak bulunur. (2.4) formülünün ters Laplace dönüşümü alınır

$$\mu(s, v) \cong \mu_n(s, v) = L^{-1} \{ H_n(s, v) \} \quad (2.5)$$

yazılır. Burada

$$\mu_n(s, v) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^{2p} d_i H_n \left(i \frac{\ln 2}{t}, v \right), \quad p > 0$$

ve

$$d_i = (-1)^{i+p} \sum_{j=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{\min(i,p)} \frac{i^p (2j)!}{(p-j)! (j-1)! (i-1)! (2j-1)!}$$

dir.

3. Bulgular ve Tartışma

$$\begin{cases} \frac{\partial^\rho \mu(u,v)}{\partial u^\rho} = k\mu_{uv}(u,v) + \mu_{vv}(u,v) + h(u,v) \\ \mu(0,v) = \vartheta_1(v), \quad \mu_u(0,v) = \vartheta_2(v) \quad v e 0 \leq v \leq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü homotopi permütasyon metodu ile bulalım. Bunun için aşağıdaki örnek problemi inceleyelim;

$$\begin{cases} \frac{\partial^\rho \mu(u,v)}{\partial u^\rho} = 2\mu_{uv}(u,v) + \mu_{vv}(u,v) + h(u,v) \\ h(u,v) = \left(\frac{6u^{3-\rho}}{\Gamma(4-\rho)} - 6u^2 - u^3 + 1 \right) e^{-v} \\ \mu(0,v) = -e^{-v}, \quad \mu_u(0,v) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

(3.2) denkleminin yaklaşık çözümü için her tarafın Laplace dönüşümü alınırsa;

$$L \left\{ \frac{\partial^{2\rho} \mu(u,v)}{\partial u^{2\rho}} \right\} = L \{ 2\mu_{uv}(u,v) + \mu_{vv}(u,v) \} + L \{ h(u,v) \} \quad (3.3)$$

olur. Bu denklemi detaylandırırız

$$\begin{aligned} S^\rho \mu(s,v) - S^{\rho-1} \mu(0,v) - S^{\rho-2} \mu_u(0,v) \\ = L \{ 2\mu_{uv}(u,v) + \mu_{vv}(u,v) \} + \left(\frac{6}{s^{4-\rho}} - \frac{12}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} \right) e^{-v} \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak yazılır. (3.4) denklemi (3.2) denklemindeki veriler kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$S^\rho \mu(s,v) = -S^{\rho-1} e^{-v} + \left(\frac{6}{s^{4-\rho}} - \frac{12}{s^3} + \frac{1}{s} \right) e^{-v}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mu(s,v) = e^{-v} \left(\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s} - \frac{12}{s^{3+\rho}} + \frac{1}{s^{1+\rho}} \right) + \frac{1}{S^\rho} L \{ 2\mu_{uv}(u,v) + \mu_{vv}(u,v) \}$$

olur. (2.3) formülünden

$$\mu_0(s,v) = e^{-v} \left(\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s} - \frac{12}{s^{3+\rho}} + \frac{1}{s^{1+\rho}} \right)$$

yazılabilir. Bu son denklemde ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$\mu_0(u,v) = \frac{e^{-v}}{S^\rho} L^{-1} \left(\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s} - \frac{12}{s^{3+\rho}} + \frac{1}{s^{1+\rho}} \right)$$

$$= e^{-v} \left(u^3 - 1 - \frac{12}{\Gamma(\rho + 3)} u^{\rho+2} + \frac{1}{\Gamma(\rho + 1)} u^\rho \right)$$

elde edilir. (2.3) formülünden

$$\mu_{n+1}(s, v) = \frac{1}{s^\rho} L\{2(\mu_n)_{uvv}(u, v) + (\mu_n)_{vv}(u, v)\} \quad (3.5)$$

genellemesi yazılabilir. Şimdi de elde ettiğimiz (3.5) genellemesini kullanarak μ_1, μ_2, \dots değerlerini bulmak için ilk olarak $n = 0, 1, 2 \dots$ değerleri genellemede sırasıyla yerine yazılır ve (3.2) denklemindeki başlangıç değerleriyle bir sonuç elde edilir. Bu sonuçların ters laplascaları alınarak μ_1, μ_2, \dots değerleri yani problemimizin yaklaşık çözümlerini bulmuş oluruz. $n = 0, 1, 2 \dots$ değerlerini yazarak işlemlere başlayalım;

$$\begin{aligned} \mu_1(s, v) &= \frac{1}{s^\rho} L\{2(\mu_0)_{uvv}(u, v) + (\mu_0)_{vv}(u, v)\} \\ &= \frac{1}{s^\rho} \left(\frac{12}{s^3} - \frac{24}{s^{\rho+2}} + \frac{2}{s^\rho} + \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s} - \frac{12}{s^{\rho+3}} + \frac{1}{s^{\rho+1}} \right) \\ &= e^{-v} \left(\frac{12}{s^{3+\rho}} - \frac{24}{s^{2\rho+2}} + \frac{2}{s^{2\rho}} + \frac{6}{s^{\rho+4}} - \frac{1}{s^{\rho+1}} - \frac{12}{s^{2\rho+3}} + \frac{1}{s^{2\rho+1}} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

yazılabilir. Şimdide (3.6) denkleminin ters laplasını alalım;

$$\begin{aligned} \mu_1(u, v) &= L^{-1}\{\mu_1(s, v)\} \\ &= e^{-v} \left(\frac{12}{\Gamma(\rho + 3)} u^{\rho+2} - \frac{24}{\Gamma(2\rho + 2)} u^{2\rho+1} + \frac{2}{\Gamma(2\rho)} u^{2\rho-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{\Gamma(\rho + 4)} u^{\rho+3} - \frac{1}{\Gamma(\rho + 1)} u^\rho - \frac{12}{\Gamma(2\rho + 3)} u^{2\rho+2} + \frac{1}{\Gamma(2\rho + 1)} u^{2\rho} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

sonucunu elde ederiz. Aynı şekilde (3.5) formülünden

$$\begin{aligned} \mu_2(s, v) &= \frac{1}{s^\rho} L\{2(\mu_1)_{uvv}(u, v) + (\mu_1)_{vv}(u, v)\} \\ &= \frac{e^{-v}}{s^\rho} L \left\{ \frac{24}{\Gamma(\rho + 2)} u^{\rho+1} - \frac{48}{\Gamma(2\rho + 1)} u^{2\rho} + \frac{4}{\Gamma(2\rho - 1)} u^{2\rho-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{\Gamma(\rho + 3)} u^{\rho+2} - \frac{2}{\Gamma(\rho)} u^{\rho-1} - \frac{24}{\Gamma(2\rho + 2)} u^{2\rho+1} + \frac{2}{\Gamma(2\rho)} u^{2\rho-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{\Gamma(\rho + 3)} u^{\rho+2} - \frac{24}{\Gamma(2\rho + 2)} u^{2\rho+1} + \frac{2}{\Gamma(2\rho)} u^{2\rho-1} + \frac{6}{\Gamma(\rho + 4)} u^{\rho+3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\rho + 1)} u^\rho - \frac{12}{\Gamma(2\rho + 3)} u^{2\rho+2} + \frac{1}{\Gamma(2\rho + 1)} u^{2\rho} \right\} \\ &= e^{-v} \left(\frac{24}{s^{2\rho+2}} - \frac{48}{s^{3\rho+1}} + \frac{4}{s^{3\rho-1}} + \frac{12}{s^{2\rho+3}} - \frac{2}{s^{2\rho}} - \frac{24}{s^{3\rho+2}} + \frac{2}{s^{3\rho}} + \frac{12}{s^{2\rho+3}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{24}{s^{3\rho+2}} + \frac{2}{s^{3\rho}} + \frac{6}{s^{2\rho+4}} - \frac{1}{s^{2\rho+1}} - \frac{12}{s^{3\rho+3}} + \frac{1}{s^{3\rho+1}} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

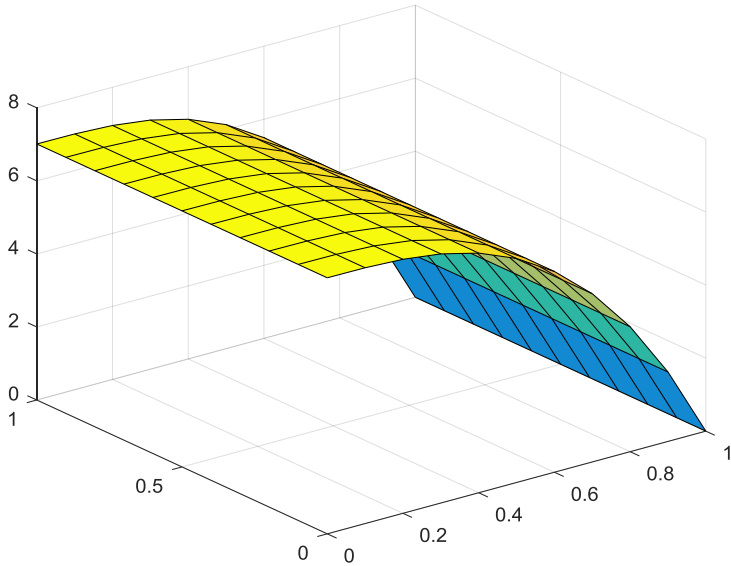
yazılabilir. Şimdide (3.8) denkleminin ters Laplace dönüşümünü alalım;

$$\mu_2(u, v) = L^{-1}\{\mu_2(s, v)\} \quad (3.9)$$

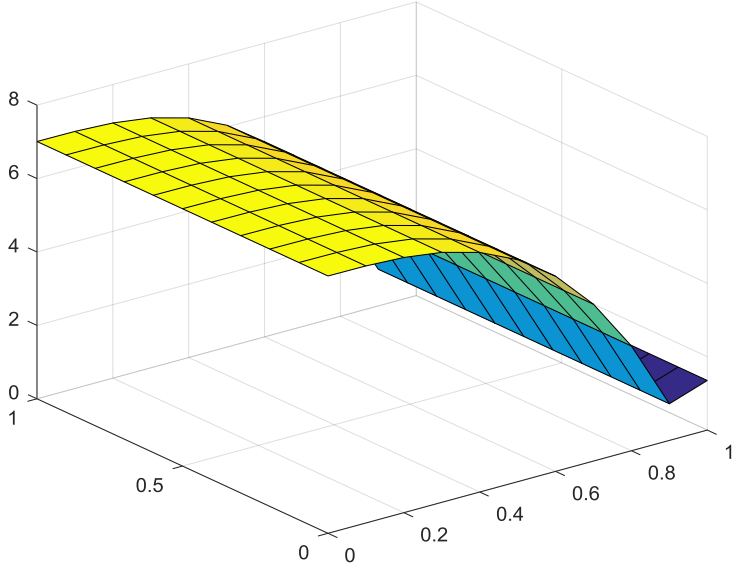
$$\begin{aligned} &= e^{-v} \left(\frac{24}{\Gamma(2\rho + 2)} u^{2\rho+1} - \frac{47}{\Gamma(3\rho + 1)} u^{3\rho} + \frac{4}{\Gamma(3\rho - 1)} u^{3\rho-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{24}{\Gamma(2\rho + 3)} u^{2\rho+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\Gamma(2\rho)} u^{2\rho-1} - \frac{48}{\Gamma(3\rho + 2)} u^{3\rho+1} + \frac{4}{\Gamma(3\rho)} u^{3\rho-1} + \frac{6}{\Gamma(2\rho + 4)} u^{2\rho+3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(2\rho + 1)} u^{2\rho} - \frac{12}{\Gamma(3\rho + 3)} u^{3\rho+2} \right) \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde $n = 2,3,4 \dots$ değerleri içinde hesaplamalar yapılabilir.

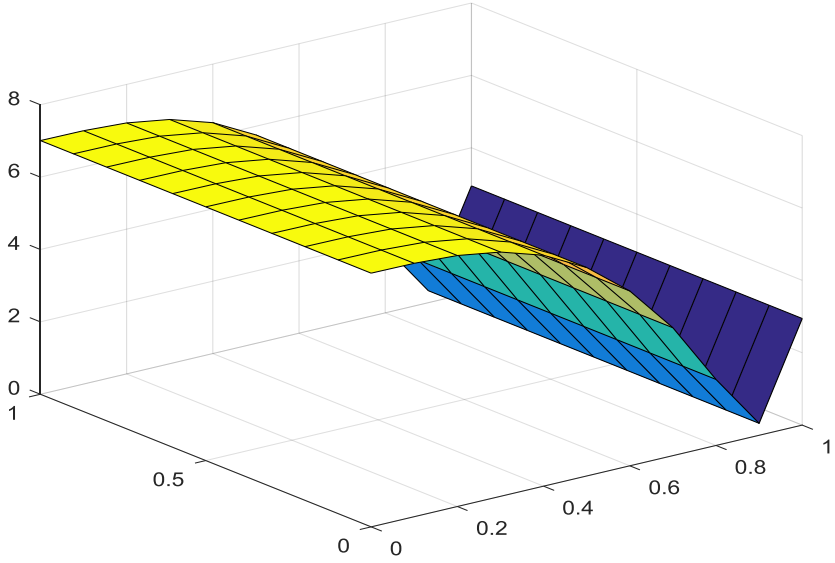
Şimdi de Matlab programı yardımıyla (3.2)'de verilen problemin tam çözümünü gösteren grafik, $\rho = 1.01$,
 $\rho = 1.75$ ve $\rho = 2$ noktalarındaki yaklaşık çözümü gösteren grafikleri verelim.



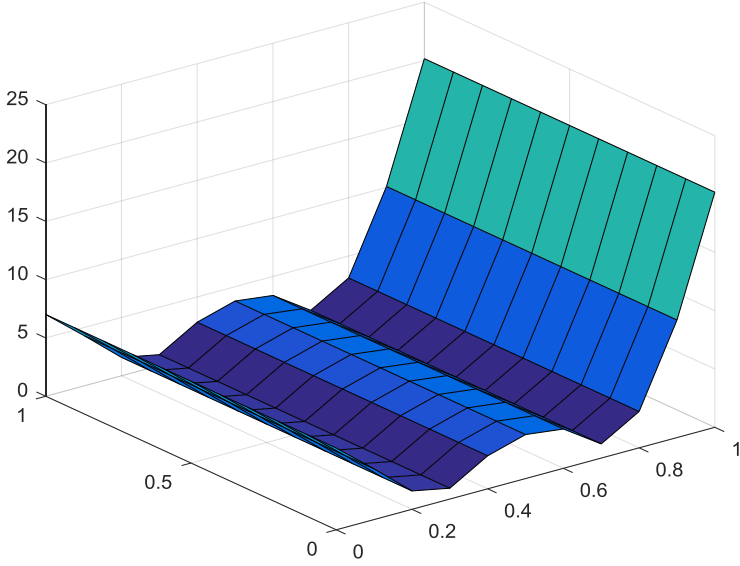
Şekil 1. (3.2) probleminin tam çözüm grafiği



Şekil 2. $\rho = 2$ için Homotopi pertürbasyon metodu ile hesaplanan (3.2) probleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 3. $\rho = 1.75$ için Homotopi pertürbasyon metodu ile hesaplanan (3.2) probleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4. $\rho = 1.01$ için Homotopi pertürbasyon metodu ile hesaplanan (3.2) probleminin yaklaşık çözüm grafiği

4. Sonuçlar

Kesirli mertebeden Pseudo-Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemini olan (3.2) ile verilen başlangıç değer probleminin tam çözümü Homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak bulundu. Bu yöntemin kullanılmasının temel nedeni ;Kesirli mertebeden Pseudo-Hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin farklı yöntemlerle çözümü mevcut olmasına rağmen homotopi pertürbasyon yöntemiyle çözümü daha kısa ve hata payı daha az olduğundan çözüm bu yöntemle yapılmıştır. Daha sonra (3.2) ile verilen kesirli mertebeden Pseudo-Hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümünün ve $\rho = 2$, $\rho = 1.75$ ve $\rho = 1.01$ noktalarındaki yaklaşık çözümü gösteren grafikler sırasıyla şekil 1, şekil 2, şekil 3, şekil 4'de verildi.

Kaynaklar

1. Liu J, Hou G. Numerical solutions of the space- and time-fractional coupled Burgers equations by generalized differential transform method, Applied Mathematics and Computation, 2011;217(16):7001-7008.
2. Momani S, Odibat Z. Analytical solution of a time-fractional Navier-Stokes equation by Adomian decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 2006;177(2):488-494.
3. Sakar MG, Erdogan F. The homotopy analysis method for solving the time-fractional Fornberg-Whitham equation and comparison with Adomian's

- decomposition method, Applied Mathematical Modelling, 2013;37(20-21): 8876–8885.
4. Zubik-Kowal B. Chebyshev pseudospectral method and waveform relaxation for differential and differential-functional parabolic equations, Applied Numerical Mathematics, 2000;34(2-3):309–328.
 5. Kumar S, Kumar D, Abbasbandy S, Rashidi MM. Analytical solution of fractional Navier-Stokes equation by using modified Laplace decomposition method, Ain Shams Engineering Journal, 2014;5(2):569–574.
 6. Kumar S, Yıldırım A, Khan Y, Jafari H, Sayevand K, Wei L. Analytical solution of fractional Black-Scholes European option pricing equation by using Laplace transform, Journal of Fractional Calculus and Applications, 2012;2(8):1-9.
 7. Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012;17(12):4978–4987.
 8. Kurulay M. The approximate and exact solutions of the space and time-fractional Burgers equations, International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, 2010;3(3):257–263.
 9. Abdulazeez ST, Modanlı M. Solutions of fractional order pseudo-hyperbolic telegraph partial differential equations using finite difference method, Alexandria Engineering Journal, 2022;61(12):12443-12451.
 10. Modanlı M, Abdulazeez ST, Husien AM. A residual power series method for solving pseudo hyperbolic partial differential equations with nonlocal conditions, Numer Methods Partial Differential Eq., 2021;37:2235–2243.
 11. Osman WM, Elzaki TM, Siddig NAA. Modified Double Conformable Laplace Transform and Singular Fractional Pseudo-Hyperbolic and Pseudo-Parabolic Equations, Journal of King Saud University – Science, 2021;33(2021):101378.
 12. Fedotov I, Shatalov M, Marais J. *Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration*, ActaMech 2016;227:3315–3324.
 13. Chavan SS, Panchal MM. Solution of third order Korteweg-De Vries equation by homotopy perturbation method using Elzaki transform. Int J Res Appl Sci Eng Tech., 2014;2:366-9.
 14. He JH, El-Dib YO, Mady AA. Homotopy perturbation method for the fractal Toda oscillator. Fractal and Fractional, 2021;5(3):93-102.
 15. Karimiasl M, Ebrahimi F, Mahesh V. Postbuckling analysis of piezoelectric multiscale sandwich composite doubly curved porous shallow shells via Homotopy Perturbation Method, Engineering with Computers, 2021;37(1): 561-577.
 16. Rezapour B, Fariborzi Araghi MA, Vázquez-Leal H. Application of homotopy perturbation method for dynamic analysis of nanotubes delivering nanoparticles, Journal of Vibration and Control, 2021;27(7-8):802-814.
 17. Modanlı M, Eş H. Üçüncü Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemin Homotopy Pertürbasyon Metodu ile Çözümü, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi (BEU Journal of Science), 2021;10(4):1527-1534.