Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **23** (1-2) 204 - 207 (2007)
http://fbe.erciyes.edu.tr/
ISSN 1012-2354

N^* ' da AYIRTIK SERBEST GRUPLAR

Sabri BİRLİK[a*] , Serap BABANINOĞLU[b]

[a] *Gaziantep Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü , Gaziantep, TÜRKİYE*
[b] *Gaziantep Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, , Matematik Bölümü, Gaziantep, TÜRKİYE*

ÖZET

Bu çalışmada $(\beta N, +)$ 'nın en küçük idealindeki her maksimal grubun iki üreteçleri üzerindeki serbest grubun 2^c kopyayı ihtiva ettiğini ve bunlardan herhangi ikisinin yalnızca birimde kesiştiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest grup, Üreteç, Maksimal grup, İzomorfizma, Homomorfizma.

DİSCRETE FREE GROUPS in N^*

ABSTRACT

In this paper we show that every maksimal group in the smallest ideal of $(\beta N, +)$ contains 2^c discrete copies of the free group on two generators and the closures of any two of which intersect only at the identity.

Keywords: Free group, Generator, Maksimal group, İsomorphism, Homomorphism.

[*] **E-posta:** birlik@gantep.edu.tr

1.GİRİŞ

$(\beta\mathrm{N},+)$ 'nin cebirsel yapısına göz atarak başlayalım. $\beta\mathrm{N}$ 'i N 'de ultrafiltrelerin bir kümesi olarak N 'deki noktaları temel ultrafiltreler olarak görelim. '+' işlemi , $\beta\mathrm{N}$ 'yi $(\beta\mathrm{N},+)$ ile topolojik merkezinde N 'yi kapsayan (her $x\in\mathrm{N}$ için, $\lambda_x(q)=x+q$ ile tanımlanan λ_x fonksiyonu süreklidir), kompakt sağ topolojik yarıgruba (her $p\in\beta\mathrm{N}$ için, $\rho_p(q=q+p)$ ile tanımlanan ρ_p fonksiyonu süreklidir) genişletir. Herhangi kompakt (Hausdorff) sağ topolojik yarıgrup gibi $(\beta\mathrm{N},+)$ bir en küçük çift taraflı $K(\beta\mathrm{N})$ idealine sahiptir. Bu ideal tüm minimal sağ ideallerin birleşimi olduğu gibi tüm sol minimal ideallerin birleşimidir. Herhangi minimal sağ ideallerin kesişimi bir gruptur ve bu tür gruplar izomorfiktir. $\beta\mathrm{N}$ 'de 2^c minimal sağ ve 2^c minimal sol ideal ve sonuç olarak en küçük idealde 2^c maksimal grup vardır.
$\beta\mathrm{N}\setminus\mathrm{N}$ kümesini N^* ve X 'in sonlu boş olmayan alt kümelerinin kümesini P_{ff} (X) ile gösterelim. Aynı zamanda $\mathrm{w}=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$ olsun. $x\in\mathrm{N}$ verilsin; $\mathrm{supp}(x)$, $H\in\mathrm{P}_f(\mathrm{w})$ öyle ki $x=\sum_{t\in H}2^t$ olsun. $\beta\mathrm{N}$ 'nin belirli bir alt yarıgrubunu şöyle tanımlayalım:

Tanım 2.1. $\mathrm{H}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{2^n\mathrm{N}}$.

$(\beta\mathrm{N},+)$ 'nin tüm idempotentleri H'de bulunur [1]. $\beta\mathrm{N}$ 'nin en küçük idealindeki her maksimal grup 2^c kopyayı ihtiva ettiğini, birim hariç ayrık olduğunu ve 2 üreteçlerinde serbest grup olduğunu göstermeye çalışalım.

Yardımcı Teorem 2.2. $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ farklı üreteçlerinde bir F serbest grubunu kapsayan bir kompakt topolojik C grubu vardır [1].

Yardımcı Teorem 2.3. C ve F , Yardımcı Teorem 2.2'deki gibi olsun. A_1,A_2,A_3 ve A_4 , N 'nin ikişer ikişer ayrık sonsuz alt kümeleri ve $q\in K(\beta\mathrm{N})$ olsun. $i\in\{1,2,3,4\}$ için $u_i\in\mathrm{N}^*\bigcap c\ell\{2^n:n\in A_i\}$ ve $r_i=q+u_i+q$ olsun.
G , $q+\beta\mathrm{N}+q$ 'nun $\{r_1,r_2,r_3,r_4\}$ tarafından üretilen alt grubu olsun. $\mathrm{s}:\{0\}\bigcup\mathrm{H}\Rightarrow C$ sürekli bir homomorfizma vardır öyle ki $\mathrm{s}_{|G}$ F 'yi örten bir izomorfizmadır ve her $i\in\{1,2,3,4\}$ için $\mathrm{s}(r_i)=a_i$.

İspat. C 'nin birimini e ile gösterelim. $f:\mathrm{w}\to C$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $n\in\mathrm{w}$ için,

$$f(2^n)=\begin{cases} a_i & n\in A_i \\ e & n\notin\bigcup_{i=1}^{4}A_i \end{cases}.$$

$L\in\mathrm{P}_f(\mathrm{w})$, $f\left(\sum_{n\in L}2^n\right)=\prod_{n\in L}f(2^n)$ olsun ve çarpım artan sıralı indislere sahip olsun. $f(0)=e$ 'dir.
$\tilde{f}:\beta\mathrm{w}\to C$, f 'nin sürekli genişlemesi ve s , $\tilde{f}$ 'nin $\{0\}\bigcup\mathrm{H}$ ' ye kısıtlaması olsun [1]. $A=\{2^n\mathrm{w}:n\in\mathrm{N}\}$ koleksiyonuna uygulandığında, s bir homomorfizmadır.

s $[G]=F$ olduğunu görmek için $i\in\{1,2,3,4\}$ almak yeterlidir ve s $(r_i)=a_i$ olduğunu gösterelim. f daima $\{2^n : n\in A_i\}$'de a_i'ye eşittir, s $(u_i)=a_i$ olduğunu biliyoruz. $q+q=q$ olduğundan s $(q)=e$. Bu yüzden s $(r_i)=ea_ie=a_i$.

Şimdi $h:F\to G$, her $i\in\{1,2,3,4\}$ için $h(a_i)=r_i$ ile tanımlı bir homomorfizma olsun ve $h[F]=G$ olduğuna dikkat ediniz. O halde s $\circ h:F\to F$ ve her $i\in\{1,2,3,4\}$ için s $\circ h(a_i)=a_i$, böylece s $\circ h$, F'de birimdir böylece s bire-birdir. ,

Teorem 2.4. $A_1,A_2,A_3,A_4,C,F,G,u_1,u_2,u_3,u_4,\{r_1 \text{ ve } r_2\},\{r_3,r_4\}$ ve s, Yardımcı Teorem 2.3'deki gibi olsun. G_1, $\{r_1,r_2\}$ ile üretilen G_2, $\{r_3,r_4\}$ ile üretilen G'nin alt grupları olsun. O halde $c\ell(G_1, \{q\})\cap c\ell(G_2, \{q\})=\varnothing$. $i\in\{1,2\}$ ve $q\notin c\ell(G_i, \{q\})$ ise G_i, F' nin ayırtık bir kopyasıdır.

İspat. $c\ell(G_1, \{q\})\cap c\ell(G_2, \{q\})\neq\varnothing$ olsun. $(G_1, \{q\})\cap c\ell(G_2, \{q\})\neq\varnothing$ veya $(G_2, \{q\})\cap c\ell(G_1, \{q\})\neq\varnothing$. Genellik kaybı olmaksızın farz edelim ki $(G_1, \{q\})\cap c\ell(G_2, \{q\})\neq\varnothing$ ve bu kesişimden w elemanını alalım. w$=q$ olduğunu göstermeliyiz. G_1'deki r_1 ve r_2' nin ters görüntülerini s_1 ve s_2 ile gösterelim. $m\in$ N ve $p_1,p_2,\dots,p_m\in\{r_1,r_2,s_1,s_2\}$ alalım öyle ki w$=p_1+p_2+\dots+p_m$ olsun.

$\theta:\mathrm{N}\to\mathrm{w}$, $\theta(n)=\sum\{2^t : t\in\operatorname{supp}(n)\cap(A_1\cup A_2)\}$'yi tanımlayalım ve θ'nın sürekli genişlemesi $\tilde{\theta}:\beta\mathrm{N}\to\beta\mathrm{w}$ olsun [1]. $\theta_{|\mathrm{H}}$ bir homomorfizmadır. Aynı zamanda $\tilde{\theta}\,[\mathrm{H}]\subseteq \mathrm{H}\cup\{\mathbf{0}\}=$ tanım kümesi(s). $i\in\{1,2\}$ için θ, $\{2^n : n\in A_i\}$'de birimdir böylece $\tilde{\theta}(u_i)=u_i$ ve buradan $q=q+q$, s $\left(\tilde{\theta}(q)\right)=e$.

Böylece $i\in\{1,2\}$ için

$$
\begin{aligned}
\mathrm{s}\left(\tilde{\theta}(r_i)\right) &= \mathrm{s}\left(\tilde{\theta}(q+u_i+q)\right)\\
&= e\mathrm{s}\,(u_i)e\\
&= \mathrm{s}\,(q+u_i+q)\\
&= \mathrm{s}\,(r_i)
\end{aligned}
$$

Aynı zamanda s $\left(\tilde{\theta}(s_i)\right)=$ s $\left(\tilde{\theta}(r_i)\right)^{-1}=$ s (s_i) .

Şimdi $i\in\{3,4\}$, s $\left(\tilde{\theta}(r_i)\right)=e$ için $\tilde{\theta}(u_i)=0$ böylece $\tilde{\theta}(r_i)=\tilde{\theta}(q)+0+\tilde{\theta}(q)$ olduğunu göztermek yeterlidir. Böylece s $\circ\tilde{\theta}[G_2]=\{e\}$ olduğundan s $\left(\tilde{\theta}(p_1+p_2+\dots+p_m)\right)=e$. Fakat

$s\left(\tilde{\theta}\left(p_1+p_2+...+p_m\right)\right)=s\left(p_1+p_2+...+p_m\right)$ ve s , G 'de bir izomorfizma olduğundan $p_1+p_2+...+p_m=q$ bulunur.

Buradan $i\in\{1,2\}$ ve $q\notin c\ell\left(G_i,\ \{q\}\right)$ ise G_i , F 'nin bir ayırtık kopyasıdır.

Sonuç 2.5. $q=q+q\in K\left(\beta\mathrm{N}\right)$ olsun. $\left(q+\beta\mathrm{N}+q\right)\cap\mathrm{H}$ 'de 2 üreteçlerinin serbest grubunun 2^c kopyası vardır. Bunların herhangi ikisinin kapanışının arakesiti $\{q\}$ 'dur.

İspat. $\mathrm{N}^*\cap\overline{\{2^n:n\in\mathrm{N}\}}$ 'nin iki elemanlı alt kümelerine ayrışımı $\alpha<2^c$ için $H_\alpha=\{x_\alpha,y_\alpha\}$ olsun. Her $\alpha<2^c$ için $q+x_\alpha+q$ ve $q+y_\alpha+q$ ile üretilen $q+\beta\mathrm{N}+q$ 'nun altgrubu G_α olsun. $\alpha<\beta<2^c$ ise N 'nin A_1,A_2,A_3,A_4 ayrık kümelerini seçebiliriz öyle ki $\{2^n:n\in A_1\}$, $\{2^n:n\in A_2\}$, $\{2^n:n\in A_3\}$, $\{2^n:n\in A_4\}$ sırası ile $x_\alpha,y_\alpha,x_\beta$ ve y_β ' nin üyeleridir. Böylece Teorem 2.4'ten bazı $\mathrm{d}\neq\alpha$ ile $c\ell\{G_\alpha,\ \{q\}\}\cap c\ell\{G_\mathrm{d},\ \{q\}\}\neq\varnothing$ için en fazla bir $\alpha<2^c$ vardır [2-7].

KAYNAKLAR

1. Hindman, N. , D.Strauss, "Algebra in the Stone-Čech Compactification:Theory and Applications", de Gruyter, Berlin, 1998.
2. R.C. Walker, The Stone–Čech Compactification, Springer, Berlin, 1974.
3. Ruppert, W. A. F. ,Compact Semitopological Semigroups, Lecture Notesin Mathematics 1079, Springer, Berlin, 1984.
4. Hindman, N. , Pym, J. , Free groups and semigroups in βN, Semigroup Forum 30 (1984), 177-193.
5. Hindman, N., Algebra in βS and its applications to Ramsey Theory, Math. Japonica 44 (1996)
6. Hindman, N. , Strauss, D. , ''Prime properties of the smallest ideal of βS'', Semigroup Forum 52 (1996), 357-364
7. Neil Hindman's Home Page, http://members.aol.com/nhindman/