Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **23** (1-2) 208 - 214 (2007)
http://fbe.erciyes.edu.tr/
ISSN 1012-2354

FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLİRLİĞİ

Abdullah SÖNMEZOĞLU*

Bozok Üniversitesi Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Yozgat, TÜRKİYE

ÖZET

Bu çalışmada, $\phi(t) \in BV(0,\pi)$ olmak üzere monotonik pozitif (p_n) ve (q_n) dizileri için $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu herhangi bir f fonksiyonunun Fourier serisinin $0 < k < 1$ olmak üzere düzgün olarak $|N,p,q|_k$ toplanabilmesi ile ilgili bir teorem ispatlandı.

Anahtar Kelimeler : Fourier serisi, Mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme.

ABSOLUTE GENERALIZED NÖRLUND SUMMABILITY OF THE FOURİER SERIES

ABSTRACT

In this study, it is accepted that $\phi(t) \in BV(0,\pi)$ and we prove a theorem about which $|N,p,q|_k$ uniformly summability of Fourier series of a periodic f function having 2π period where (p_n) and (q_n) are monotonic positive sequences by means of Lebesgue integrable in $(-\pi,\pi)$ for $0 < k < 1$.

Keywords: Fourier series, Absolute generalised Nörlund summability.

E-posta: asonmezoglu1907@hotmail.com

1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 1.1.1 : f fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir fonksiyon olsun.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi veya f fonksiyonuna karşılık getirilen Fourier serisi denir ve

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1.1.1)$$

şeklinde gösterilir. [1].

Tanım 1.1.2 : (p_n) ve (q_n) herhangi iki dizi olmak üzere $r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v$ olsun. Diğer taraftan $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere, (s_n) dizisinden (t_n) dizisine

$$t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v s_v \qquad (1.1.2)$$

ile tanımlanan dönüşüme genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü denir ve (N,p,q) ile gösterilir.

Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirdir denir ve $s_n \to s(N,p,q)$ ile gösterilir . [2].

Tanım 1.1.3: Yukarıdaki tanımlara ek olarak $k > 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ve $\Delta r_n = r_n - r_{n-1}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r_n}{\Delta r_n}\right|^{k-1}|t_n - t_{n+1}|^k < \infty \qquad (1.1.3)$$

ise, (s_n) dizisine mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirdir denir yada $|N,p,q|_k$ toplanabilirdir denir. [2].

Sonuç 1.1.4 : Tanım 1.1.3 de $q_n = 1$ ve $k = 1$ alınırsa $|N,p,q|_k$ toplanabilmeden $|N,p_n|$ Nörlund toplanabilme metodu elde edilir.

Teorem 1.1.5 : $\phi(t) \in BV(0,\pi)$, (p_n) dizisi de $n \to \infty$ iken $P_n \to \infty$, $R_n \in BV$ ve $S_n \in BV$ olacak şekilde pozitif monoton bir dizi olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun Fourier serisi $t = x$ noktasında $|N, p_n|$ toplanabilirdir. [3].

Teorem 1.1.6 : $\phi_1(t) = t^{-1}\int_0^t \phi(u)du$ olmak üzere $\phi_1(t) \in BV(0,\pi)$ ve (p_n) dizisi de $R_n \in BV$, $(p_{n+1} - p_n)$ dizisi monoton azalan ve $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{P_k} = O\left(\frac{n}{P_n}\right)$ olacak şekilde pozitif bir dizi olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun Fourier serisi $t = x$ noktasında $|N, p_n|$ toplanabilirdir. [4].

2. FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

Teoremin ispatına geçmeden önce teoremin ispatında kullandığımız aşağıdaki Lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.1.
m ve n herhangi pozitif sayılar olmak üzere $\forall t \in (0,\pi]$ için m ve n ye göre düzgün olarak

$$\left|\sum_{v=m}^{n} \frac{\sin vt}{v}\right| \le K$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı mevcuttur. [5].

Teorem 2.2.

1) f fonksiyonu, Tanım 1.1.1 deki gibi tanımlanmak üzere

$$\phi(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \in BV(0,\pi)$$

2) (p_n), monoton azalan pozitif bir dizi
3) (q_n), monoton artan pozitif bir dizi
4) (r_n), $n \to \infty$ iken $r_n \to \infty$ olacak şekilde bir dizi
5) $q_n = O\left(\frac{r_n}{2^n}\right)$

şartları sağlansın. Bu takdirde $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu f fonksiyonunun (1.1.1) de ifade edilen Fourier serisi $0 < k < 1$ için düzgün olarak $|N, p, q|_k$ toplanabilirdir.

İspat :

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_v q_{n-v}$$

olduğundan teoremin (2) ve (3) hipotezinden yararlanarak

$$r_n - r_{n-1} = \sum_{v=0}^{n} p_v q_{n-v} - \sum_{v=0}^{n-1} p_v q_{n-v-1} = \sum_{v=0}^{n} (q_{n-v} - q_{n-v-1}) p_v \ge 0$$

elde edilir ki bu (r_n) dizisinin pozitif ve monoton artan bir dizi olduğunu gösterir. Diğer taraftan (1.1.1) de verilen f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi $(s_n(x))$ olsun. f fonksiyonunu, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$ şartını sağlayacak şekilde seçersek, $a_0 = 0$ olur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt \cos kx dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt \sin kx dt\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(x-t)dt\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Toplamın içindeki integrale $x - t = u$ değişken değiştirmesi yaparak ve f fonksiyonunun 2π periyotlu olmasını kullanarak

$$
\begin{aligned}
s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\cos ku du\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\cos ku du\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x-u)\cos ku du + \int_{0}^{\pi} f(x-u)\cos ku du\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(x+u)\cos ku du + \int_{0}^{\pi} f(x-u)\cos ku du\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\phi(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \quad \text{ve} \quad D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt
$$

olmak üzere

$$
s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\phi(t)D_n(t)dt
$$

yazılabilir. Böylece $0 < k < 1$ için $t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v s_v$ olmak üzere

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r_n}{\Delta r_n}\right|^{k-1}|t_n - t_{n+1}|^k < \infty \quad \text{veya buna denk olan} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{k-1}|t_n - t_{n-1}|^k < \infty
$$

olduğunu ispatlayacağız.

(r_n) pozitif ve monoton artan bir dizi olduğundan

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{k-1}|t_n - t_{n-1}|^k = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{k-1}|t_n - t_{n-1}|^k
$$

yazılabilir.

İlk olarak

$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v - \frac{1}{r_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v-1} q_v s_v = \sum_{v=0}^{n}\left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}}\right) q_v s_v$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)\left[\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}}\right) q_v D_v(t)\right] dt \tag{2.1}$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki ifadeye Abel kısmi toplama formülü uygulandıktan sonra toplamların sırasını değiştirme metodunu kullanarak

$$\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}}\right) q_v D_v(t) = \sum_{v=0}^{n-1}\left(D_v(t) - D_{v+1}(t)\right)\sum_{j=0}^{v}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right) q_j + D_n(t)\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right) q_j$$

$$= \sum_{v=1}^{n}\cos vt \sum_{j=0}^{v-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j + D_n(t)\left[\frac{1}{r_n}\sum_{j=0}^{n} p_{n-j} q_j - \frac{1}{r_{n-1}}\sum_{j=0}^{n} p_{n-j-1} q_j\right]$$

$$= \sum_{v=1}^{n}\cos vt \sum_{j=0}^{v-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j + D_n(t)\left[\frac{r_n}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1} p_{n-j-1} q_j - \frac{p_{-1} q_n}{r_{n-1}}\right]$$

$$= \sum_{v=0}^{n-1}\cos(v+1)t \sum_{j=0}^{v}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j \sum_{v=j}^{n-1}\cos(v+1)t \tag{2. 2}$$

elde edilir. (2.2) ifadesi (2.1) de yerine yazılırsa

$$t_n - t_{n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j \sum_{v=j}^{n-1}\cos(v+1)t\right] dt$$

olup eşitliğin sağındaki integrale kısmi integrasyon metodu uygulanarak

$$\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j \sum_{v=j}^{n-1}\cos(v+1)t\right] dt = dz, \qquad \phi(t) = u$$

olmak üzere

$$\Delta t_n = \frac{2}{\pi}\left\{\phi(t)\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j \sum_{v=j+1}^{n}\frac{\sin vt}{v}\right]\right\}_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right) q_j \sum_{v=j+1}^{n}\frac{\sin vt}{v} d\phi(t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\phi(\pi)\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}} - \frac{p_{n-j}}{r_n}\right) q_j \sum_{v=j+1}^{n}\frac{\sin v\pi}{v}\right]\right\} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right) q_j \sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}\right] d\phi(t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\{-\phi(\pi).0 - 0\} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n} - \frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right) q_j \sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}\right] d\phi(t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}\right]d\phi(t)$$

elde edilir.Lebesgue integralin özelliğinden yararlanarak

$$|t_n - t_{n-1}| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}\right]d\phi(t)\right|$$

$$\leq \left(\frac{2}{\pi}\right)\left[\int_0^{\pi}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}\right||d\phi(t)|\right]$$

$$\leq \left(\frac{2}{\pi}\right)\left[\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j\left|\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}\right||d\phi(t)|\right]$$

yazılabilir. Lemma 2.1. den yararlanarak son eşitsizlik

$$|t_n - t_{n-1}| \leq K\left[\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j|d\phi(t)|\right] = K\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j\int_0^{\pi}|d\phi(t)|$$

şeklinde yazılabilir. $\phi(t)\in BV(0,\pi)$ olduğundan $\int_0^{\pi}|d\phi(t)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. O halde

$$|t_n - t_{n-1}| \leq K\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j$$

dır. Diğer taraftan (p_n) dizisinin monoton azalan ve (r_n) dizisinin de monoton artan olduğu göz önüne alınarak

$$\frac{p_n}{r_n}-\frac{p_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{p_n r_{n+1} - p_n r_n + p_n r_n - p_{n+1} r_n}{r_n r_{n+1}} = \frac{p_n(r_{n+1}-r_n)+r_n(p_n - p_{n+1})}{r_n r_{n+1}} \geq 0$$

elde edilir ki bu $\left(\frac{p_n}{r_n}\right)$ dizisinin monoton azalan olduğunu gösterir. $\left(\frac{p_n}{r_n}\right)$ dizisinin monoton azalan olmasından dolayı

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}-\frac{p_{n-j}}{r_n}\right)q_j = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}q_j - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{p_{n-j}}{r_n}q_j$$

$$= \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}} - \sum_{j=0}^{n}\frac{p_{n-j}q_j}{r_n} + \frac{p_0 q_n}{r_n} = 1 - \frac{r_n}{r_n} + \frac{p_0 q_n}{r_n} = \frac{p_0 q_n}{r_n}$$

yazılabilir. Buna göre (5) hipotezinde $q_n = O\left(\frac{r_n}{2^n}\right)$ olduğundan

$$|t_n - t_{n-1}| = O(1)\left(\frac{p_0 q_n}{r_n}\right) = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

olup

$$\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k = O(1)\left[\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)^k\right]$$

elde edilir. Teoremin (4) hipotezi ile (r_n) dizisinin monoton artanlığını kullanarak $0 < k < 1$ için

$$\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{k-1} = \left(\frac{\Delta r_{n-1}}{r_{n-1}}\right)^{1-k} = O(1)$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k = O(1)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta r_{n-1}}{r_{n-1}}\right)^{1-k}\left(\frac{1}{2^n}\right)^k\right] = O(1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nk}}\right)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nk}} < \infty$ olduğundan pozitif terimli seriler için karşılaştırma testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty$$

dır. Bu ise f fonksiyonunun (1.1.1) deki Fourier serisinin $(s_n(x))$ kısmi toplamlar dizisinin $0 < k < 1$ için $\left|N, p, q\right|_k$ toplanabilir dolayısıyla f fonksiyonunun (1.1.1) deki Fourier serisinin düzgün olarak $\left|N, p, q\right|_k$ toplanabilir olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

1. Hardy, G. H., Divergent series , Oxford, 1949.
2. Nurcombe, J. R., Limitation and ineffectivens theorems for generalised Nörlund summability. Analysis, 9, 347- 356, 1989.
3. Pati, T., Addendum: On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. Jour London Math. Soc, 37, 256, 1962.
4. Dikshit, H. P., On the absolute $\left|N, p_n\right|$ of a Fourier series at a point. Proc. Cambridge Philos Soc, 65, 495-505,1969.
5. 5. Titchmarsh, E. C., Theory of Functions. Oxford University, Oxford,1949.