Erc. Ünv. Fen Bil. Derg., 10, 1-2 (1994) 105-115

SONSUZ SERİLERİN MUTLAK TOPLANABİLME CARPANLARI HAKKINDA *

Veli KILIÇ

Erciyes Üniversitesi, Kocasınan Meslek Yüksekokulu, Kayseri

ÖZET : Bu çalışmada Mishra ve Srivastava [3] nın bir teoremini genelleştiren $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili bir teorem ispat edilmiştir.

ON THE ABSOLUTE SUMMABILITY FACTORS OF INFINITE SERIES

SUMMARY

In this paper a theorem on $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ summability factors, which generalizes a theorem of Mishra and Srivastava [3] , has been proved.

1. GİRİŞ

Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ sonsuz serisi verilmiş olsun. Ayrıca (q_n),

$$Q_n = \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu \longrightarrow \infty \qquad , n \to \infty \; (Q_{-1} = q_{-1} = 0) \quad (1.1)$$

olacak şekilde pozitif reel sabitlerin bir dizisi olsun.

$$A_0^\alpha = 1, \; A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} \quad , \; (\alpha > -1, \; n = 1,2,..) \quad (1.2)$$

olmak üzere,

$$q_n^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} q_{\nu} \quad \text{ve} \quad Q_n^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n} q_{\nu}^{\alpha} \quad (Q_{-1}^{\alpha} = q_{-1}^{\alpha} = 0) \qquad (1.3)$$

eşitliklerini tanımlayalım.

$$T_n^{\alpha} = \frac{1}{a_n^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} q_{\nu}^{\alpha} s_{\nu} \qquad (1.4)$$

dizıden dıziye dönüşümü (s_n) dizisinin $(\bar{N}, q_n^{\alpha})$ ortalamasını tanımlar. $k \geq 1$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere, eger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n^{\alpha}}{q_n^{\alpha}} \right)^{k-1} | T_n^{\alpha} - T_{n-1}^{\alpha} |^k < \infty \qquad (1.5)$$

ise $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, q_n^{\alpha}|_k$ toplanabilirdir denir [1]. Burada özel olarak $\alpha = 0$ ve $k = 1$ alırsak, $|\bar{N}, q_n|$ toplanabilmeyi elde ederiz.

2. Mishra ve Srivastava [3] $|\bar{N}, q_n|$ toplanabilme ile ilgili olarak aşagıdaki teoremi ispatladılar.

TEOREM A. (X_n) pozitif azalmayan bir dizi olsun ve ayrıca,

$$|\Delta\lambda_n| \leq \beta_n \qquad (2.1)$$

$$\beta_n \longrightarrow 0 , \qquad n \longrightarrow \infty \qquad (2.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, |\Delta\beta_n| \, X_n < \infty \qquad (2.3)$$

$$|\lambda_n| \, X_n = O(1) , \qquad n \longrightarrow \infty \qquad (2.4)$$

ve

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu|}{\nu} = O\,(X_n)\ , \qquad n \longrightarrow \infty \tag{2.5}$$

şartlarını sağlayan (β_n) ve (λ_n) dizileri bulunsun. Bunlardan başka eğer (q_n),

$$Q_n = O\,(nq_n) \tag{2.6}$$

$$Q_n \Delta q_n = O\,(q_n q_{n+1}) \tag{2.7}$$

olacak şekilde bir dizi ise, bu takdirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n Q_n}{nq_n}$$ serisi $|\bar{N},\ q_n|$ toplanabilirdir.

3. Bu çalışmanın amacı $k \geq 1$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere Teorem A yı $|N,\ q_n^\alpha|_k$ metodu için aşağıdaki şekilde ispat etmektedir.

TEOREM. Kabul edelimki (X_n), (β_n) ve (λ_n) dizileri Teorem A nın (2.1) - (2.4) şartlarını sağlasınlar. Eğer,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu|^k}{\nu} = O\,(X_n)\ , \qquad n \longrightarrow \infty \tag{3.1}$$

ise ve (q_n^α) dizisi

$$Q_n^\alpha = O\,(n\ q_n^\alpha) \tag{3.2}$$

$$Q_n^\alpha\ \Delta q_n^\alpha = O\,(q_n^\alpha\ q_{n+1}^\alpha) \tag{3.3}$$

şartlarını sağlıyorsa bu takdirde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n Q_n^\alpha}{nq_n^\alpha}$$ serisi $|\bar{N},\ q_n|_k$ toplanabilirdir. Burada $\alpha > -1$ ve $k \geq 1$ dır. Dikkat edilecek olursa bu teoremde $\alpha = 0$ ve $k = 1$ alırsak Teorem A yı elde ederiz.

4. Bu teoremin ispatında aşağıdaki lemmalardan faydalanacağız.

LEMMA 1 ([2]). Eğer (q_n^α) dizisi (3.2) ve (3.3) şartlarını sağlıyorsa, bu takdirde

$$\Delta \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha} \right) = 0 \left(\frac{1}{\nu} \right) \tag{4.1}$$

LEMMA 2 [4]. Eğer (X_n), (λ_n) ve (β_n) dizileri Teorem A nın (2.1) - (2.3) şartlarını sağlıyorsa bu takdirde,

$$n\beta_n X_n = 0(1) \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n < \infty \tag{4.3}$$

dur.

5. TEOREMİN İSPATI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n Q_n^\alpha \lambda_n}{n q_n^\alpha} \quad \text{serisinin } (\bar{N}, q_n^\alpha)$$

ortalamasını T_n^α ile gösterelim. Bu takdirde, tanımdan dolayı

$$T_n^\alpha = \frac{1}{Q_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu \sum_{z=1}^{\nu} \frac{a_z Q_z^\alpha \lambda_z}{z q_z^\alpha} = \frac{1}{Q_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} (Q_n^\alpha - Q_{\nu-1}^\alpha) \frac{a_\nu Q_\nu^\alpha \lambda_\nu}{\nu q_\nu^\alpha}$$

Şimdi $T_n^\alpha - T_{n-1}^\alpha$ farkını teşkil edelim. $n \geq 1$ için

$$T_n^\alpha - T_{n-1}^\alpha = \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{Q_{\nu-1}^\alpha Q_\nu^\alpha a_\nu \lambda_\nu}{\nu q_\nu^\alpha}$$

Bu ifadenin sag tarafındaki toplama Abel kısmi toplama formülüne uygularsak,

$$T_n^\alpha - T_{n-1}^\alpha = \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{Q_{\nu-1}^\alpha Q_\nu^\alpha \lambda_\nu}{\nu q_\nu^\alpha} \right) \sum_{z=1}^{\nu} a_z$$

$$+ \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \cdot \frac{Q_{n-1}^\alpha Q_n^\alpha \lambda_n}{n q_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu \Delta \left(\frac{Q_{\nu-1}^\alpha Q_\nu^\alpha \lambda_\nu}{\nu q_\nu^\alpha} \right)$$

$$+ \frac{s_n \lambda_n}{n} = \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu \left(\frac{Q_{\nu-1}^\alpha Q_\nu^\alpha \lambda_\nu}{\nu q_\nu^\alpha} - \frac{Q_\nu^\alpha Q_{\nu+1}^\alpha \lambda_{\nu+1}}{(\nu+1) q_{\nu+1}^\alpha} \right)$$

$$+ \frac{s_n \lambda_n}{n} = \frac{s_n \lambda_n}{n} + \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu \frac{Q_{\nu+1}^\alpha Q_\nu^\alpha \Delta\lambda_\nu}{(\nu+1) q_{\nu+1}^\alpha}$$

$$+ \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} Q_\nu^\alpha s_\nu \lambda_\nu \Delta \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha} \right) - \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu Q_\nu^\alpha \lambda_\nu \frac{1}{\nu}$$

$$= T_{n,1}^\alpha + T_{n,2}^\alpha + T_{n,3}^\alpha + T_{n,4}^\alpha$$

diyelim. Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski eşitsizligi geregince $r = 1, 2, 3, 4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha} \right)^{k-1} |T_{n,r}^\alpha| < \infty$$

oldugunu göstermek kafidir. Dikkat edilmelidir ki Teoremin hipotezleri altında (λ_n) dizisi sınırlıdır ve

$$\Delta\lambda_n = O\left(\frac{1}{n} \right)$$

dir. Gerçekten de (2.4) den dolayı $|\lambda_n| = O(1)$ dır. Diger taraftan (4.2) den dolayı

$$\beta_n = O\left(\frac{1}{nX_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dır.

Halbuki $|\Delta\lambda_n| \le \beta_n$ olduğundan $\Delta\lambda_n = O(1/n)$ dır. Şimdi teoremin ispatına devam edelim.

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} |T_{n,1}^\alpha|^k = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} \left|\frac{s_n\lambda_n}{n}\right|^k$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} |s_n|^k |\lambda_n|^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} |s_n|^k |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{n\, q_n^\alpha}\right)^{k-1} |\lambda_n| \frac{|s_n|^k}{n}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n| \frac{|s_n|^k}{n} = O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta |\lambda_n| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|s_\nu|^k}{\nu}$$

$$+ |\lambda_m| \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} |s_n|^k = \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\lambda_n| X_n + O(1)\ |\lambda_m| X_m = \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n X_n$$

$$+ O(1)\ |\lambda_m| X_m = O(1),\ m \longrightarrow \infty .$$

Hipotezden dolayı,

$$Q_{\nu+1}^\alpha = O((\nu+1) q_{\nu+1}^\alpha)$$

oldugundan,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha} \right)^{k-1} |T_{n,2}^\alpha|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^{\alpha k}} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} Q_\nu^\alpha s_\nu \Delta\lambda_\nu \right|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^{\alpha k}} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{Q_\nu^\alpha}{q_\nu^\alpha} \, q_\nu^\alpha s_\nu \Delta\lambda_\nu \right|^k$$

Şimdi burada Hölder eşitsizligini kullanırsak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha} \right)^{k-1} |T_{n,2}^\alpha|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{q_\nu^\alpha} \right)^k |s_\nu|^k \, q_\nu^\alpha \, |\Delta\lambda_\nu|^k$$

$$\times \left\{ \frac{1}{Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu^\alpha \right\}^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{q_\nu^\alpha} \right)^k |s_\nu|^k \, q_\nu^\alpha \, |\Delta\lambda_\nu|^k \sum_{n=\nu+1}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{q_\nu^\alpha} \right)^k |s_\nu|^k \, q_\nu^\alpha |\Delta\lambda_\nu|^{k-1} \, |\Delta\lambda_\nu| \, \frac{1}{Q_\nu^\alpha}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{q_\nu^\alpha} \right)^k |s_\nu|^k \, q_\nu^\alpha \, \left(\frac{1}{\nu} \right)^{k-1} \beta_\nu \, \frac{1}{Q_\nu^\alpha}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha} \right)^{k-1} |s_\nu|^k \, \beta_\nu = O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu \, |s_\nu|^k$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \nu\beta_\nu \frac{|s_\nu|^k}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \Delta(\nu\beta_\nu) \sum_{z=1}^{\nu} \frac{|s_z|^k}{z}$$

$$+ O(1) m\beta_m \sum_{\nu=1}^{m} \frac{|s_\nu|^k}{\nu}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} |\Delta(\nu\beta_\nu)| X_\nu + O(1) m\beta_m X_m$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} |\nu\beta_\nu - (\nu+1)\beta_{\nu+1}| X_\nu + O(1) m\beta_m X_m$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} \nu|\Delta\beta_\nu| X_\nu + O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} |\beta_{\nu+1}| X_\nu + O(1) m\beta_m X_m$$

$$= O(1), \quad m \longrightarrow \infty$$

Şimdi de Lemma 1'i kullanarak ve yine Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} |T_{n,3}^\alpha|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^{\alpha k}} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} Q_\nu^\alpha s_\nu \lambda_\nu \Delta\left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha}\right) \right|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^{\alpha k}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} Q_\nu^\alpha |s_\nu| |\lambda_\nu| \frac{1}{\nu} \right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^{\alpha k}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{Q_\nu^\alpha}{q_\nu^\alpha} q_\nu^\alpha |s_\nu| |\lambda_\nu| \frac{1}{\nu} \right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha} \right)^k q_\nu^\alpha |s_\nu|^k \, |\lambda_\nu|^k$$

$$\times \left\{ \frac{1}{Q_{n-1}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu^\alpha \right\}^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha} \right)^k q_\nu^\alpha \, |s_\nu|^k \, |\lambda_\nu|^k \sum_{n=\nu+1}^{m+1} \frac{q_\nu^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha} \right)^k \frac{q_\nu^\alpha}{Q_\nu^\alpha} \, |s_\nu|^k |\lambda_\nu|^k \, \frac{\nu}{\nu}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^\alpha}{\nu q_\nu^\alpha} \right)^{k-1} |\lambda_\nu|^k \, \frac{|s_\nu|^k}{\nu}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} |\lambda_\nu|^{k-1} \, |\lambda_\nu| \, \frac{|s_\nu|^k}{\nu} = O(1) \sum_{\nu=1}^{m} |\lambda_\nu| \, \frac{|s_\nu|^k}{\nu}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} \Delta|\lambda_\nu| \sum_{z=1}^{\nu} \frac{|s_z|^k}{z} + O(1) \, |\lambda_m| \sum_{\nu=1}^{m} \frac{|s_\nu|^k}{\nu}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} |\Delta\lambda_\nu| s_\nu + O(1) \, |\lambda_m| X_m = O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} \beta_\nu X_\nu$$

$$+ O(1) |\lambda_m| X_m = O(1) \, , \; m \longrightarrow \infty$$

Şimdi de son olarak $T_{n,4}^\alpha$ yı göz önüne alalım.

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha} \right)^{k-1} |T_{n,4}^\alpha|^k \le \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^{\alpha k}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} |s_\nu| \frac{Q_\nu^\alpha}{\nu} \, |\lambda_\nu\right.$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^{\alpha}}{Q_n^{\alpha} Q_{n-1}^{\alpha k}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{k-1} |s_\nu| \frac{Q_\nu^{\alpha}}{\nu q_\nu^{\alpha}} q_\nu^{\alpha} |\lambda_\nu| \right\}^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n^{\alpha}}{Q_n^{\alpha} Q_{n-1}^{\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{Q_\nu^{\alpha}}{\nu q_\nu^{\alpha}} \right)^k q_\nu^{\alpha} |s_\nu|^k |\lambda_\nu|^k$$

$$\times \left\{ \frac{1}{Q_{\nu-1}^{\alpha}} \sum_{\nu=2}^{n-1} q_\nu^{\alpha} \right\}^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^{\alpha}}{q_\nu^{\alpha}} \right)^k q_\nu^{\alpha} |s_\nu|^k |\lambda_\nu|^k \sum_{n=\nu+1}^{m+1} \frac{q_n^{\alpha}}{Q_n^{\alpha} Q_{n-1}^{\alpha}}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^{\alpha}}{\nu q_\nu^{\alpha}} \right)^k \frac{q_\nu^{\alpha}}{Q_\nu^{\alpha}} |s_\nu|^k |\lambda_\nu|^k$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{Q_\nu^{\alpha}}{\nu q_\nu^{\alpha}} \right)^{k-1} \frac{|s_\nu|^k}{\nu} |\lambda_\nu|^{k-1} |\lambda_\nu|$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} |\lambda_\nu| \frac{|s_\nu|^k}{\nu}$$

$$= O(1), \quad m \longrightarrow \infty$$

O halde biz, $r = 1, 2, 3, 4$ için

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^{\alpha}}{q_n^{\alpha}} \right)^{k-1} |T_{n,r}^{\alpha}|^k = O(1), \quad m \longrightarrow \infty$$

olduğunu göstermiş olduk. Bu da Teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

1. H. Bor, A note on some absolute summability methods. Jour. Nigerian Math. Soc. 7 (1987), 1-5.

2. V. Kılıç, Sonsuz Serilerin Mutlak Riesz Toplanabilme Çarpanları, Doktora Tezi, Kayseri, 1990.

3. K.N. Mishra and R.S.L. Srivastava, On |N, Pn| Summability Factors of Infinite Series. Indian J. Pure Appl. Math., 15 (1984), 651 - 656.

4. K.N. Mishra, On the absolute Nörlund Summability factors of infinite series, Indian J. Pure Appl. Math. 14 (1983), 40-43