Erc. Ünv. Fen Bil. Derg., 10, 1-2 (1993) 5-11

SONSUZ SERİLERİN $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ TOPLANABİLME ÇARPANLARI

Veli KILIÇ
Erciyes Üniversitesi , Kayseri Meslek Yüksek Okulu , Kayseri

ÖZET: Bu çalışmada Singh [3]'in bir teoremini genelleştiren $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili bir teorem ispat edilmiştir.

$|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ SUMMABILITY FACTORS OF INFINITE SERIES

SUMMARY

In this paper a theorem on $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ summability factors, which generalizes a theorem of Singh [3] , has been proved.

1. GİRİŞ

Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ sonsuz serisi verilmiş olsun. Ayrıca (q_n),

$$Q_n = \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu \longrightarrow \infty \quad , n \to \infty \quad (Q_{-1} = q_{-1} = 0) \qquad (1.1)$$

olacak şekilde pozitif reel sabitlerin bir dizisi olsun.

$$A_0^\alpha = 1,\ A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} ,(\alpha>-1,\ n = 1, 2,\ldots) \qquad (1.2)$$

olmak üzere,

$$q_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} q_\nu \quad \text{ve} \quad Q_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu^\alpha \quad (Q_{-1}^\alpha = q_{-1}^\alpha = 0) \qquad (1.3)$$

ifadelerini tanımlayalım.

$$T_n^\alpha = \frac{1}{Q_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu^\alpha s_\nu$$

diziden diziye dönüşümü (s_n) dizisinin $(\bar{N}, q_n^\alpha)$ ort...

Tanım 1. $k \geq 1$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha} \right)^{k-1} \left| T_n^\alpha - T_{n-1}^\alpha \right|^k < \infty \qquad (1.5)$$

ise $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ toplanabilirdir denir [1].

Burada özel olarak $\alpha = 0$ ve $k = 1$ alırsak, $|\bar{N}, q_n|$ toplanabilmesini elde ederiz.

Ayrıca $k \geq 1$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{\nu=0}^{n} q_\nu^\alpha |s_\nu|^k = O(Q_n^\alpha) \qquad (1.6)$$

ise, bu takdirde $\sum a_n$ serisi $\left[\bar{N}, q_n^\alpha\right]_k$ sınırlıdır denir [2].
Bu tanımda özel olarak $\alpha = 0$ ve $k = 1$ alırsak $\left[\bar{N}, q_n\right]$

sınırlılığı elde ederiz.

R. Singh [3] $|\bar{N}, q_n|$ toplanabilme ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi ispatladı.

TEOREM A. $\sum a_n$ serisi $\left[\bar{N}, q_n\right]$ sınırlı olsun.

Eğer (q_n) ve (λ_n) dizileri

$$\sum_{n=1}^{m} q_n |\lambda_n| = O(1) \qquad (2.1)$$

$$Q_n |\Delta\lambda_n| = O(q_n |\lambda_n|), \quad n \to \infty \qquad (2.2)$$

koşullarını sağlıyorsa, bu takdirde $\sum a_n \lambda_n Q_n$ serisi $|\bar{N}, q_n|$ toplanabilirdir. Burada önemli bir noktayı belirtelim. Teorem A'nın hipotezinde

$$q_{n+1} = O(q_n) \qquad (2.3)$$

şartınında bulunması gerekir. Aksi takdirde bu hipotez olmadan teoremin ispatı mümkün değildir.

3. Bu çalışmanın amacı $k \geq 1$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere Teorem A yı $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ metodu için ispat etmektir. Dolayısıyla burada aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

TEOREM. $\alpha > -1$ ve $k \geq 1$ olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $\left[\bar{N}, q_n^\alpha\right]_k$ sınırlı ve (λ_n), (q_n^α) dizileri

$$q_{n+1}^\alpha = O(q_n^\alpha) \qquad (3.1)$$

$$\sum_{n=1}^{m} q_n^\alpha |\lambda_n| = O(1) \qquad (3.2)$$

$$q_n^\alpha |\Delta\lambda_n| = O(q_n^\alpha |\lambda_n|), \quad n \longrightarrow \infty \qquad (3.3)$$

şartlarını sağlıyorsa, bu takdirde $\sum a_n \lambda_n Q_n^\alpha$ serisi $|\bar{N}, q_n^\alpha|_k$ toplanabilirdir.

Burada teoremin ispatına geçmeden önce ilk olarak teoremin ispatında kullanacağımız bir Lemma ifade ve ispat edelim.

LEMMA : Eğer (λ_n) ve (q_n^α) dizileri teoremin (3.2) ve (3.3) şartlarını sağlıyorsa bu takdirde

$$Q_m^\alpha |\lambda_m| = O(1) \quad m \longrightarrow \infty \qquad (3.4)$$

İSPAT :

$$\sum_{n=1}^{m} q_n^\alpha \lambda_n$$

ifadesine Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=1}^{m} q_n^\alpha \lambda_n = \sum_{n=1}^{m-1} Q_n^\alpha \Delta\lambda_n + Q_m^\alpha \lambda_m$$

elde ederiz. Buradan,

$$| Q_m^{\alpha} \lambda_m | = | \sum_{n=1}^{m} q_n^{\alpha} \lambda_n - \sum_{n=1}^{m-1} Q_n^{\alpha} \Delta\lambda_n |$$

$$\leq \sum_{n=1}^{m} q_n^{\alpha} |\lambda_n| + \sum_{n=1}^{m-1} Q_n^{\alpha} | \Delta\lambda_n |$$

$$= \sum_{n=1}^{m} q_n^{\alpha} |\lambda_n | + O(1) \sum_{n=1}^{m-1} q_n^{\alpha} |\lambda_n |$$

$$= O(1), \ m \to \infty$$

olur.

Simdi teoremimizin ispatına geçebiliriz.

Genel olarak kaideyi bozmaksızın, $a_o = s_o = 0$ **kabul edebiliriz.** O halde $\sum a_n \lambda_n Q_n^{\alpha}$ serisinin $(\bar{N}, q_n^{\alpha})$ **ortalamasını** T_n^{α} **ile** gösterelim.

$$T_n^{\alpha} = \frac{1}{Q^{\alpha}} \sum_{\nu=o}^{n} q_{\nu}^{\alpha} \sum_{z=o}^{\nu} a_z \lambda_z Q_z^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{Q^{\alpha}} \sum_{\nu=o}^{n} (Q_n^{\alpha} - Q_{\nu-1}^{\alpha}) a_{\nu} Q_{\nu}^{\alpha} \lambda_{\nu}$$

$$T_n^{\alpha} - T_{n-1}^{\alpha} = \frac{q_n^{\alpha}}{Q_n^{\alpha} Q_{n-1}^{\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\nu-1}^{\alpha} Q_{\nu}^{\alpha} a_{\nu} \lambda_{\nu}, \qquad n \geq 1$$

Abel transformasyondan dolayı

$$T_n^{\alpha} - T_{n-1}^{\alpha} = \frac{q_n^{\alpha}}{Q_n^{\alpha} Q_{n-1}^{\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n-1} Q_{\nu}^{\alpha} q_{\nu}^{\alpha} s_{\nu} \lambda_{\nu}$$

$$= \frac{q_n^{\alpha}}{Q_n^{\alpha} Q_{n-1}^{\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n-1} Q_{\nu}^{\alpha} \Delta\lambda_{\nu} q_{\nu}^{\alpha} s_{\nu}$$

$$-\frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu^\alpha Q_{\nu+1}^\alpha s_\nu \lambda_{\nu+1} + q_n^\alpha \lambda_n s_n$$

$$= T_{n,1}^\alpha + T_{n,2}^\alpha + T_{n,3}^\alpha + T_{n,4}^\alpha$$

diyelim.

Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski eşitsizliginden dolayı r = 1, 2, 3, 4 için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} | T_{n,r}^\alpha |^k < \infty$$

oldugunu göstermek yetecektir.

Bunun icin de şimdi sırasıyla $T_{n,1}^\alpha$, $T_{n,2}^\alpha$, $T_{n,3}^\alpha$, $T_{n,4}^\alpha$ ları ayrı ayrı ele alalım.

İlk olarak $T_{n,1}^\alpha$ yi ele alır ve Hölder eşitsizligini uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} | T_{n,1}^\alpha |^k$$

$$= \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} \left| -\frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1} Q_\nu^\alpha q_\nu^\alpha s_\nu \lambda_\nu\right|^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1}(Q_\nu^\alpha \lambda_\nu)^k q_\nu^\alpha | s_\nu |^k \times \left\{\frac{1}{Q_{n-1}^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu^\alpha\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{\nu=1}^{m}(Q_\nu^\alpha | \lambda_\nu |)^k q_\nu^\alpha | s_\nu |^k \sum_{n=\nu+1}^{m+1}\frac{q_n^\alpha}{Q_n^\alpha Q_{n-1}^\alpha}$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} (Q_\nu^\alpha \mid \lambda_\nu \mid)^{k-1} q_\nu^\alpha \mid \lambda_\nu \mid \mid s_\nu \mid^k$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m} q_\nu^\alpha \mid \lambda_\nu \mid \mid s_\nu \mid^k$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} \mid \Delta\lambda_\nu \mid \sum_{z=1}^{\nu} q_z^\alpha \mid s_z \mid^k + O(1) \mid \lambda_m \mid \sum_{\nu=1}^{m} q_\nu^\alpha \mid s_\nu \mid^k$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{m-1} q_\nu^\alpha \mid \lambda_\nu \mid + O(1)\, Q_m^\alpha \mid \lambda_m \mid$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

Hipotezden dolayı

$$Q_\nu^\alpha \mid \Delta\lambda_\nu \mid = O\,(q_\nu^\alpha \mid \lambda_\nu \mid)$$

olduğunu göz önüne alırsak, $T_{n,1}^\alpha$ da olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha} \right)^{k-1} \mid T_{n,2}^\alpha \mid^k = O(1) \sum_{\nu=1}^{m} q_\nu^\alpha \mid s_\nu \mid^k \mid \lambda_\nu \mid$$

$$= O(1), \; m \longrightarrow \infty$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha} \right)^{k-1} \mid T_{n,3}^\alpha \mid^k = O(1) \sum_{\nu=1}^{m} q_\nu^\alpha \mid s_\nu \mid^k \mid \lambda_\nu \mid$$

$$= O(1), \; m \longrightarrow \infty$$

bulunur. Son olarak da

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} | T_{n,4}^\alpha |^k = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} | q_n^\alpha \lambda_n s_n|^k$$

$$= \sum_{n=1}^{m} (Q_n^\alpha| \lambda_n|)^{k-1} q_n^\alpha |\lambda_n| |s_n|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m} q_n^\alpha |s_n|^k |\lambda_n| = O(1), \ m \to \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $r = 1, 2, 3, 4$ **için**

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n^\alpha}{q_n^\alpha}\right)^{k-1} | T_{n,r}^\alpha |^k = O(1), \ m \to \infty$$

olur ki, bu da teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

1. H. Bor, A note on some absolute summability methods. Jour. Nigerian Math. Soc. 7 (1987), 1-5

2. V. Kılıç, On the absolute summability factors of infinite series. Pure and Applied Mathematika Sciences, Vol. 35, No. 1-2, (1992), 13 - 17.

3. T. Singh, A note on $|\bar{N}, p_n|$ summability factors for infinite series. Jour. Math. Sci. Vol.12-13 (1977 - 78), 25-28.