Erc. Ünv. Fen Bil. Derg., 10, 1-2 (1993) 47-54

AYRILMA AKSİYOMLARI

Mehmet BARAN

Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat
Fakültesi, Matematik Bölümü, KAYSERİ

AMS Classification ; 54A20, 54B30, 54D10.
Keywords: Temel eksen dönüşümü, Hausdorff uzay, Normal uzay.

ÖZET. [1] de topolojik uzaylar kategorisinde bilinen ayrılma aksiyomları değişik şekillerde topolojik kategoriye genişletildi. Bu çalışmada, bu ayrılma aksiyomlarını değişik şekillerde karakterize eden teoremler topolojik uzaylar kategorisinde ispatlandı.

SEPARATION PROPERTIES

ABSTRACT. In [1], various generalizations of the usual separation properties of the category of topological spaces to an arbitrary topological category are given. In this paper, the theorems that characterize these separation properties in various ways in the category of topological spaces are proved.

1. GİRİŞ.

Topolojik uzay kavramının genişletilmesi olarak Herrlich [6] da topolojik kategori kavramını geliştirdi. Bazı araştırmacılar, örneğin, Brümmer [4], Harvey [5], Hoffmann [7] ve Marny [9] T_0-aksiyomunu değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmesini yaptılar. Husek [8] ve Weck-Schwarz [11] de bu genişlemeler arasındaki ilişkileri incelediler. Baran [1] ve [2] de Topoloji'nin önemli kavramlarından biri olan ayrılma aksiyomları ve kapalılık kavramını her hangi bir topolojik kategoriye genişletilmesini verdi. Bu genişlemeler bir kaç değişik şekillerde ortaya çıktılar. Bu genişlemeleri yapmanın bir amacı bu kavramların Topoloji'nin önemli teoremlerinden nişleme teoremin ifadelerinde yer almalarıdır. Diğer bir amacıda kapalılık kavramı ile karakterize edilebilen kompaktlık ve bağlantılılık kavramlarını topolojik kategoriye genişletmektir. Bu çalışmada, ayrılma aksiyomlarını topolojik kategoriye nasıl genişletilebileceğini karakterize eden teorem ispatlandı.

2. TEMEL SONUÇLAR.

X boştan farklı bir cümle ve $X^2 V_\Delta X^2$, Δ (X'in diagonali) da wedge çarpımı [1](X^2'nin ayrık iki kopyasının Δ da çakışmasıdır) olsun.

TANIM 2.1.([1]) Temel Eksen Dönüşümü, $A : X^2 V_\Delta X^2 \to X^3$
eğer (x,y) birinci bileşende ise $A((x,y)_1) = (x,y,x)$
eğer (x,y) ikinci bileşende ise $A((x,y)_2) = (x,x,y)$
ile tanımlanır. Skewed Eksen Dönüşümü, $S : X^2 V_\Delta X^2 \to X^3$,
eğer (x,y) birinci bileşende ise $S((x,y)_1) = (x,y,y)$
eğer (x,y) ikinci bileşende ise $S((x,y)_2) = (x,x,y)$
ile tanimlanir. Katlama Dönüşümü (The Fold Map), $\nabla : X^2 V_\Delta X^2 \to X^2$ eğer (x,y) birinci veya ikinci bileşende ise bu taktirde $\nabla((x,y)_i) = (x,y)$ $i = 1,2$ ile tanımlanır. Eğer A, S, ∇ dönüşümleri $X V_p X$ üzerine kısıtlandığında A_p, S_p, ∇_p p de Temel,Skewed ve katlama dönüşümleri elde edilir [3].

$X = (B,\beta)$ bir topolojik uzay olsun.

TEOREM 2.2. (1) X Uzayının T_0 olması için gerek ve yeter koşul $B^2 V_\Delta B^2$ üzerinde $\{ A : B^2 V_\Delta B^2 \to X^3,\ \nabla : B^2 V_\Delta B^2 \to DX^2 = (B^2, P(B^2)) \}$ fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır.

(2) X Uzayının T_1 olması için gerek ve yeter koşul $B^2 V_\Delta B^2$ üzerinde $\{ S : B^2 V_\Delta B^2 \to X^3,\ \nabla : B^2 V_\Delta B^2 \to DX^2 \}$ fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır.

(3) X Uzayının $PreT_2$ olması için gerek ve yeter koşul $B^2V_\triangle B^2$ üzerinde A ve S nin ürettiği topolojilerin aynı olmasıdır (X'in $PreT_2$ olması icin gerek ve yeter koşul X'in her farklı x ve y noktaları için eğer {x,y} cümlesi indiskre değilse bu taktirde x ve y nin ayrık komşuluklarının var olmasıdır).

(4) X T_2 uzayıdır $\Leftrightarrow$ X T_0 ve $PreT_2$ uzayıdır.

(5) X uzayının T_3 olması için gerek ve yeter koşul X'in bostan farklı her kapalı F alt cümlesi için X/F'in $PreT_2$ ve X in T_1 olmasıdır. X/F [1] de tanımlanan bölüm uzayıdır.

(6) X uzayının T_4 olması için gerek ve yeter koşul X in T_1 ve X/F in T_3 olmasıdır .

ISPAT. (1) $B^2 V_\triangle B^2$ üzerinde A ve $\triangledown$ nin ürettiği topoloji diskre olsun. X'in T_0 olduğunu gösterelim . Yani, X de her $x \neq y$ için y yi kapsayan x in her N_x komşuluğu için y nin en az bir N_y komşuluğu vardır öyleki $x \notin N_y$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x \neq y$ ve $X^2V_\triangle X^2$ diskre olduğundan $\{(x,y)_1\} = \triangledown^{-1}(U) \cap A^{-1}(W)$ olacak şekilde X^3 de W ve DX^2 de $U = \{(x,y)\}$ açık cümleleri vardır. W açik olduğundan X de x in en az bir N_x ve y nin en az bir N_y komşulukları vardır öyleki $A((x,y)_1) = (x,y,x) \in N_x \times N_y \times N_x \subset W$ dir. İddia ediyoruz ki $x \notin N_y$ dir. $x \in N_y$ olsun. x in her komsuluğu y yi içerdiğinden $\{(x,y)_1,(x,y)_2\} = \triangledown^{-1}(U) \cap A^{-1}(W)$ olacaktır. $(x,y)_1 \neq (x,y)_2$ olduğundan bu da yukarısı ile çelişir. O halde $x \notin N_y$ dir.

Tersine olarak, X T_0 uzayı olsun. Yani her bir farklı x, y için x in y yi içermeyen bir N_x komşuluğu vardır veya y nin x i içermeyen bir N_y komşuluğu var olsun. Uzayın diskre olduğunu göstermek için uzayda alınan her tek nokta cümlesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki ilk şart sağlansın. Yani, $y \notin N_x$ olsun. Eğer $U = \{(x,y)\}$ ve $W = N_x \times N_x \times X$ alınırsa ki bunlar sırasıyla DX^2 ve X^3 de açık cümlelerdir . Buradan açık olarak $\{(x,y)_2\} = \triangledown^{-1}(U) \cap A^{-1}(N_x \times N_x \times X)$ olur. Şimdide kabul edelim ki $x \notin N_y$ olsun. Eğer $U = \{(x,y)\}$ ve $W = X \times N_y \times X$ alınırsa ki bunlar sırasıyla DX^2 ve X^3 de açıklardır . Açık olarak $\{(x,y)_1\} = \nabla^{-1}(U) \cap A^{-1}(W)$ dir. Eğer $x = y$ ise $\{(x,y)_1 = (x,y)_2\} = \nabla^{-1}((x,y)) \cap A^{-1}(X^3)$ olduğu kolayca görülür. O halde A ve ∇ tarafından doğrulan topoloji diskredir.

(2) Kabul edelim ki X T_1 olsun . Bu takdirde her farklı x , y çifti için x in y yi ihtiva etmeyen bir N_x ve y nin x i içermeyen bir N_y komşulukları vardır. $(x,y) \in X^2 V_\Delta X^2$ olsun. $W = N_x \times N_y \times N_y$, $U = (\{(x,y)\})$, X^3 de ve DX^2 de açıklar olmak üzere $\{(x,y)_1\} = S^{-1}(W) \cap \nabla^{-1}(U)$ dir. Benzer olarak $W = N_x \times N_x \times N_y$, $U = (\{(x,y)\})$ sırasıyla X^3 ve DX^2 de açık cümleler olmak üzere $\{(x,y)_2\} = S^{-1}(W) \cap \nabla^{-1}(U)$ dir. Eğer $(x,y)_1 = (x,y)_2$ ise bu takdirde $W = X^3$ ve $U = (\{(x,y)\})$, X^3 de ve DX^2 de açık cümleler olmak üzere $\{(x,y)_1 = (x,y)_2\} = S^{-1}(X^3) \cap \nabla^{-1}(U)$ dir. Böylece doğrulan topoloji diskredir.

Tersine olarak $B^2 V_\Delta B^2$ üzerinde S ve ∇ tarafından doğrulan topoloji diskre olsun. $\{(x,y)_1\} = S^{-1}(W) \cap \nabla^{-1}(U)$ olacak şekilde X^3 de W ve DX^2 de U açık cümleleri mevcuttur. Özel olarak $S((x,y)_1) = (x,y,y) \in W$ ve W açik olduğundan x in N_x ve y nin N_y komşulukları vardır öyleki $(x,y,y) \in N_x \times N_y \times N_y \subset W$ dir. Açik olarak $x \notin N_y$ dir. Benzer olarak $\{(x,y)_2\} = S^{-1}(W) \cap \nabla^{-1}(U)$ olacak şekilde X^3de W ve DX^2 de $U = \{(x,y)\}$ açık cümleleri vardır. $S((x,y)_2) = (x,x,y) \in W$ ve W açık olduğundan x in bir N_x ve y nin bir N_y komşuluğu vardır ve $(x,x,y) \in N_x \times N_x \times N_y \subset W$ dir. Açık olarak $y \notin N_x$ dir. Aksi halde $\{(x,y)_1,(x,y)_2\} = S^{-1}(W) \cap \nabla^{-1}(U)$ olurdu ki bu da yukarıdaki ile çelişir. O halde $y \notin N_x$ ve X T_1 dir.

(3) Kabul edelim ki X^3 üzerindeki çarpım topolojisi ξ ve $A^{-1}(\xi) = S^{-1}(\xi)$ olsun. X in $PreT_2$ olduğunu göstermeliyiz. X in farklı her bir x ve y noktası icin $\{x,y\}$ cümlesi indiskre olmasın . O halde y nin x i ihtiva etmeyen en az bir N_y veya x in y yi ihtiva etmeyen en az bir N_x komşuluğu var-

dir. Kabul edelim ki ilk koşul sağlansın, yani y nin x i içermeyen en az bir N_y komşuluğu olsun. Dikkat edelim ki kabulden ve [10] s.80 dan $(x,y)_2 \in S^{-1}(W_2) \subset A^{-1}(W_1) \subset S^{-1}(W)$ olacak şekilde ξ nun $W = X^2 \times N_y$, $W_1 = N_x \times N_x \times (N_y \cap N_y^*)$ ve $W_2 = (N_x \cap N_x^*) \times (N_x \cap N_x^*) \times (N_y \cap N_y^* \cap N_y'') = N \times N \times M$ baz elemanları mevcuttur. İddia ediyoruz ki $N \cap M = \Phi$ dir. Aksini kabul edelim, yani en az bir $r \in N \cap M$ vardır. $(x,r,r) \in W_2$ olduğundan $(x,r)_1 \in S^{-1}(W_2)$ dir. Fakat $(x,r)_1 \notin A^{-1}(W_1)$ dir çünkü $x \notin N_y$. Bu da çelişkidir. O halde $N \cap M = \Phi$ dir. Diğer durum için ilk kısımda x ve y nin rollerinin değişimi ile elde edilir.

Tersine olarak X $PreT_2$ olsun. Göstermeliyiz ki $S^{-1}(\xi) = A^{-1}(\xi)$ dir. Önce $S^{-1}(\xi) \subset A^{-1}(\xi)$ olduğunu gösterelim. Bunun için [10] s.80 deki Lemma kullanılacaktır. U $S^{-1}(\xi)$ nin bir baz elemanı olsun, yani $U = S^{-1}(W)$ olacak şekilde X^3 üzerinde tanımlı ξ çarpım topolojisinin en az bir W baz elemanı vardır. $(x,y)_i \in U$, $i = 1,2$ olsun. Bu taktirde $S(x,y)_i = (x,x,y) \in W$ veya $(x,y,y) \in W$ olacaktır. $(x,y,y) \in W$ olsun. Bu takdirde x in ve y nin en az bir N_x ve N_y komşuluğu var öyleki $W = N_x \times N_y \times N_y$ dir. Eğer {x,y} cümlesi indiskre ise açık olarak $(x,y)_1 \in A^{-1}(W) \subset S^{-1}(W)$ dir. Eğer {x,y} cümlesi indiskre değilse, X $PreT_2$ olduğundan x ve y nin sırasıyla ayrık açık komşulukları N_x^* ve N_y^* mevcuttur. Buna gore $W_1 = (N_x \cap N_x^*) \times (N_y \cap N_y^*) \times (N_x \cap N_x^*)$ olsun. Açık olarak $(x,y)_1 \in A^{-1}(W_1)$ dir. $A^{-1}(W_1) \subset S^{-1}(W)$ olduğunu gösterelim. $(c,d) \in A^{-1}(W_1)$ olsun. Bu takdirde $A(c,d) = (c,d,c) \in W_1$ veya $(c,c,d) \in W_1$ dir. $A(c,d)_2 = (c,c,d) \in W_1$ olması halinde $d \in N_x^* \cap N_y^*$ olur ki bu da uzayın $PreT_2$ olması ile çelişir. O halde $A(c,d) = (c,d,c)$ olmak zorundadır. $d \in N_y$ olduğundan $(c,d) \in S^{-1}(W)$ dir. Dolayısıyla $A^{-1}(W_1) \subset S^{-1}(W)$ dir. $(x,x,y) \in W = N_x \times N_x \times N_y$ olacak şekilde x in N_x ve y nin N_y komşuluğu vardir. Eğer {x,y} cümlesi indiskre ise açık olarak $W_1 = N_x \times (N_x \cap N_y) \times N_y \subset W$ ve $(x,y)_2 \in A^{-1}(W_1) \subset S^{-1}(W)$ dir. Eğer {x,y} cümlesi indiskre değilse bu takdirde hipotezden x ve y nin ayrık N_x' ve N_y'

komşulukları vardır. $W_1 = (N_x \cap N_x') \times (N_x \cap N_x') \times (N_y \cap N_y')$ olsun. Açık olarak $(x,y)_2 \in A^{-1}(W_1) \subset S^{-1}(W)$ dir. O halde $S^{-1}(\varepsilon) \subset A^{-1}(\varepsilon)$ dir .

Tersine olarak $A^{-1}(\varepsilon) \subset S^{-1}(\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. Yine [10] s. 80 deki Lemma kullanılacaktır. U, $A^{-1}(\varepsilon)$ nun bir baz elemanı, yani $U = A^{-1}(W)$ olacak şekilde ε nun en az bir W baz vardır ve $(x,y) \in U$ olsun. Bu takdirde $A((x,y)_2) = (x,x,y) \in W$ veya $(x,y,x) \in W$ dır. Kabul edelim ki $(x,x,y) \in W = N_x \times N_x \times N_y$ olsun. Eğer $\{x,y\}$ cümlesi indiskre ise $W_1 = (N_x \cap N_y) \times N_x \times N_y \subset W$ alındığında $S^{-1}(W_1) \subset A^{-1}(W)$ dır. Eğer $\{x,y\}$ indiskre değilse, hipotezden x ve y nin ayrık N_x' ve N_y' komşulukları mevcuttur. $W_1 = (N_x \cap N_x') \times (N_x \cap N_x') \times (N_y \cap N_y')$ olsun ve açık olarak $(x,y) \in S^{-1}(W_1) \subset A^{-1}(W)$ dir. Şimdi $(x,y,x) \in W$ $N_x \times N_y \times N_x$ olsun. Eğer $\{x,y\}$ indiskre ise açık olarak $S^{-1}(W) \subset A^{-1}(W)$ dir. Eğer $\{x,y\}$ cümlesi indiskre değilse, kabulden x in N_x' ve y nin N_y' ayrık komşulukları vardır. $W_1 = (N_x' \cap N_x') \times (N_y \cap N_y') \times (N_y \cap N_y')$ olsun ve açık olarak $S^{-1}(W_1) \subset A^{-1}(W)$. Böylece $A^{-1}(\varepsilon) \subset S^{-1}(\varepsilon)$ dir ve sonuç olarak $A^{-1}(\varepsilon) = S^{-1}(\varepsilon)$.

(4) un ispatı açıktır.

(5) X uzayı T_3 olsun. X/F in $PreT_2$ olduğunu göstereceğiz. X in T_1 olduğu açıktır. X T_1 olduğundan X/F de T_1 dir çünkü $q^{-1}(X/F-\{*\}) = X-F$ açıktır(F kapalı, q süreklidir) ve $x \neq *$ için $q^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ ve $\{*\}$ kapalıdırlar. Kabul edelim ki her $x \neq *$ için $\{x,*\}$ cümlesi indiskre olmasın. $x \notin q^{-1}(\{*\}) = F$ kapalı ve X T_3 olduğundan x in N_x ve F nin N_F ayrık komşulukları vardır. $q(N_F)$ ve $q(N_x)$ açıktırlar çünkü $q^{-1}(q(N_F)) = N_F \cup F^c \subset N_F$ ve $q^{-1}(q(N)_x) = N_x \cup F^c \subset N_x$ açıktırlar. (q bölüm fonksiyonudur ve $F^c = X-F$) ve $q(N_x) \cap q(N_F) = \Phi$ olduğu kolayca görülür. $x \neq * \neq y$ için $\{x,y\}$ cümlesi indiskre olmasın. $x , y \in X-F$, $X-F$ T_3 ve q X-F ye kısıtladığından bire-bir olduğundan $q(N_x \cap N_y) = N_x \cap N_y = \Phi$ olur. Dolasıyla X/F $PreT_2$ dir.

Tersine olarak X T_1 ve X/F $PreT_2$ olsun. $F \subset X$ de keyfi, kapalı ve her hangi bir x için $x \notin F$ olsun. X/F T_1(yukarıda gösterildi) ve $PreT_2$ olduğundan $q(F) = *$ i ihtiva eden en az bir N_* ve $q(x) = x$ i ihtiva eden en az bir N_x vardır öyleki $N_* \cap N_x = \Phi$ olacaktır. q sürekli olduğundan $F \subset q^{-1}(N_*)$ ve $x \in q^{-1}(N_x)$, X de açıktırlar ve $q^{-1}(N_*) \cap q^{-1}(N_x) = q^{-1}(N_* \cap N_x) = q^{-1}(\Phi) = \Phi$ dir. Dolayısıyla X T_3 dir .

(6) nın ispatı kolayca (5) teki gibi yapılır.

UYARI 2.3 (1). $X = (B, \rho)$ bir topolojik uzay ve $i_1, i_2 : X^2 \to B^2 V_\Delta B^2$ kanonik gömmeler olsun. ε'' topolojisi $B^2 V_\Delta B^2$ üzerinde i_1, i_2 tarafından üretilen topoloji ve ε da X^3 üzerinde tanımlı çarpım topolojisi olsun. [3] deki Teorem 2.3 ve uyarı 2.5 den $A^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon''$ dir.

(2). X uzayının T_0 olması için gerek ve yeter koşul $id : B^2 V_\Delta B^2 \to (B^2 V_\Delta B^2, \varepsilon'')$ ve $\nabla : B^2 V_\Delta B^2 \to DX^2 = (B^2, P(B^2))$ tarafından üretilen topolojinin diskre olmasıdır(Teorem 2.2 ve (1)).

(3). Teorem 2.2 ve (1) den $S^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon''$ elde edilir ki bu da $PreT_2$ olmanın başka bir karakterizasyonudur.

(4). (2) ve (3) ile ve Teorem 2.2 den T_3 ve T_4 uzaylarını iki değişik yolla , T_2 uzayınıda dört değişik yolla karakterize etmek mümkündür. Ayrıca, kapalılık kavramı p de T_0ve p de T_1 kavramları ile tanımlanmıştır [2]. Kapalılık kavramını kulanılarak yukarıdaki T_2,T_3 ve T_4 aksiyomlarının çeşitli karakterizasyonlarına ilaveten bunların herbirisinin iki değişik şekilde karakterizesi verildi [1].

(5). Genel olarak, her hangi bir topolojik kategori için bizim yukarıda tanımladığımız T_0'lar ile [4], [5], [8] ve [11] de verilen T_0 'ların birbirinden bağımsız oldukları [2] de gösterildi.

(6). İlerideki çalışmalarımızda, her hangi bir topolojik kategori için [1] de tanımlanan ayrılma aksiyomları arasındaki ilişkiler ile kapalılık kavramını kulanarak kompaktlık kavramının nasıl genişletilebileceği gösterilecek.

KAYNAKLAR

[1]. M. Baran, Separation Properties, Indian J.Pure and Appl. Math., 23(5) (1992), 333-341.

[2]. M. Baran, The Notion of Closedness in Topological Categories, Comment.Math.Univ.Carolinae, 34,2(1993),383-395.

[3]. M. Baran ve H. Şimşek, p de Ayrılma Aksiyomları, Erc. Ünv. Fen Bil. Derg., (basılaçak).

[4]. G.C.L. Brümmer, A Categorical Study of Initiality in Uniform Topology, Thesis (1971), Univ. of Cape Town.

[5]. J.M. Harvey, T_0-Separation in Topological Categories, Quaestiones Math., 2 (1977), 177-190.

[6]. H. Herrlich, Topological Functors, Gen. Top. Appl., 4 (1974), 125-142.

[7]. R-E. Hoffmann, (E,M)-Universal Topological Functors, Habilitationsschrift, (1974), Universitat Dusseldorf.

[8]. M. Husek, Disconnectedness, Quaestiones Math.,13(1990) 449-459.

[9]. TH. Marny, Rechts-Bikategoriestrukturen in Topologischen Kategorien, Dissertation (1973), Freie Univ. Berlin.

[10]. J.M. Munkres, Topology : A First Course, Prentice Hall. Inc., (1975).

[11].S. Weck-Schwarz, T_0-Objects and Separated Objects in Topological Categories, Quaestiones Math, 14(1991),315-325.