Erc. Ünv. Fen Bil. Derg.,10, 1-2 (1993) 55-69

p DE AYRILMA AKSİYOMLARI

Mehmet BARAN ve Hakan ŞİMŞEK

Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi Matematik Böl.KAYSERİ

AMS Classification; 54A,54B,54D
Keywords: Wedge çarpımı,p de temel eksen dönüşümü.

ÖZET. X bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. Bu çalışmada, p de ayrılma aksiyomlarının tanımı verildi. Ayrıca, bunların herbirisin topolojik kategoriye genişletecek şekilde karakterize eden teoremler ispatlandı.

SEPARATION PROPERTIES AT p

ABSTRACT. Let X be a topological space and $p \in X$. In this paper The definitions of separation properties at p are given. Moreover The theorems that give a characterization of each of these separation properties in terms of concepts which make sense in any topological categories are given.

1. GİRİŞ.

X bir cümle ve $p \in X$ olsun. $X \amalg X$, X'in ayrık iki kopyası olsun. X'in p de wedge çarpımı $X \amalg X$'in p de çakışmasıdır ve $X \vee_p X$ şeklinde gösterilir.

LEMMA 1.1. X boştan farklı bir cümle ve X üzerinde tanımlı topolojiler T ve T', bazlarıda sırasıyla β ve β' olsun. $T \subset T'$ ancak ve ancak her bir $x \in X$ için β nin x'i ihtiva eden her bir B elemanıiçin β' nin en az bir B' elemanı vardır öyleki $x \in B' \subset B$ dir [2].

2. TEMEL SONUÇLAR

X bir cümle ve $p \in X$, $X \vee_p X$ p de wedge çarpımı olsun.

TANIM 2.1. p de Temel Eksen Dönüşümü, $A_p : X \vee_p X \longrightarrow X^2$, $A_p(x_1) = (x,p)$ ve $A_p(x_2) = (p,x)$, p de Skewed Eksen Dönüşümü, $S_p : X \vee_p X \to X^2$, $S_p(x_1) = (x,x)$ ve $S_p(x_2) = (p,x)$ ve p de Katlama Dönüşümü, $\nabla_p : X \vee_p X \longrightarrow X$, $\nabla_p(x_i) = x$, $i = 1,2$ olarak tanımlanırlar [1].

X Bir Topolojik uzay ve $p \in X$ olsun .

TANIM 2.2 (1)- X Uzayının p de T_0 olması için gerek ve yeter şart her $q \neq p$ için p nin q yı ihtiva etmeyen N_p komşuluğu veya q nın p yi ihtiva etmeyen N_q komşuluğunun var olmasıdır .

(2)- X ' in p de T_1 olması için gerek ve yeter şart her $q \neq p$ için p nin ve q nin sırasıyla N_p ve N_q komşuluklarının var olmasıdır , öyleki $q \notin N_p$, $p \notin N_q$ dir.

(3)- X uzayının p noktasında $PreT_2$ olması için gerek ve yeter şart her bir $q \neq p$ için {p,q} cümlesi indiskre değilse , bu takdirde p ve q nin ayrık komşulukları var olmasıdır.

(4)- X uzayının p noktasında T_2 olması için gerek ve yeter şart her bir $q \neq p$ için p ve q nin ayrık komşuluklarının var olmasıdır .

(5)- X in p de T_3 olması için gerek ve yeter şart X in p de T_1 ve X in p yı ihtiva etmeyen her kapalı boştan farklı F alt cümlesi için; X/F in p de $PreT_2$ olmasıd Burada $q : X \to X/F$ F' i * a özdeşleyen fonksiyondur[1].

(6)- X in p de T_4 olması için gerek ve yeter şart X in p de T_1 , X in p yi ihtiva eden boştan farklı her F alt cümlesi için X/F in * da T_3 olmasıdır .

X bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun .

TEOREM 2.3 (1) X Uzayının p noktasında T_0 olması için gerek ve yeter şart $X V_p X$ üzerinde { $A_p : X v_p X \to X^2$, $\nabla_p : X V_p X \to DX$ } fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır.Burada DX diskre topolojik uzaydır.

(2)- X Uzayının p noktasında T_1 olması için gerek ve yeter şart $X V_p X$ üzerinde { $S_p : X V_p X \to X^2$, $\nabla_p : X V_p X$

$\to X^2\}$ fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır .

(3)- X Uzayının p de $PreT_2$ olması için gerek ve yeter şart $X\,V_pX$ üzerinde A_p ,S_p nin doğurmuş olduğu topolojilerin aynı olmasıdır .

(4)- X p de T_2 uzayıdır ancak ve ancak X p de T_0 ve X p de $PreT_2$ dir .

i = 0,1,2,3,4 için X uzayı T_i dir ancak ve an- X deki her p için X uzayı p de T_i dir ..

İspat : (1)- X p noktasında T_0 uzayı olsun . $X\,V_pX$ üzerinde tanımlı induced topolojinin diskre olduğunu gösterelim .Bunun için $X\,V_pX$ de alınan her tek nokta cümlesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir .

Uzay p de T_0 olduğundan eğer $q \neq p$ ise p ' nin q ' yi içermeyen N_p komşuluğu vardır veya q 'nin p 'yi içermeyen komşuluğu vardır . Kabul edelimki ilk şart sağlansın . Yani $q \notin N_p$ olsun .

Eğer $U = \{q\}$, ve $W = N_p \times X$ alınırsa ki bunlar DX ve X^2 de açık cümlelerdir . Buradan açık olarak ;

$\{q\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ olacaktır. Çünkü $q \in A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ ise $\nabla_p(q) = q \in U = \{q\} \Rightarrow A_p(q) = (q,p)$ veya $A_p(q) = (p,q)$ dir .$q \notin N_p$ olduğundan $A_p(q) = (q,p) \notin W$ olacaktır. Buradan $\{q_2\} = \nabla_p^{-1}(U) \cap A_p^{-1}(W)$ dir .

Şimdi kabul edelimki $p \notin N_q$ olsun . $U = \{q\}$ ve , $W = N_q \times X$ sırasıyla DX ve X^2 de açık cümlelerdir .$A_p(q) = (q,p) \in W$ veya $A_p(q) = (p,q) \in W$ dir . $(p,q) \notin W$ olduğundan $\{q_1\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ dir .

Eğer $p = q$ ise $U = \{p\}$ DX de ,$W = X^2$, X^2 de açıklar olduğundan $A_p(q) = (p,q) \in W$ ve $p \in U$ dir . Buradan $\{p\} = \nabla_p^{-1}(U) \cap A_p^{-1}(W)$ sağlanır . Böylece $X\,V_pX$ üzerindeki

∇_p ve A_p nin doğurduğu uzay diskredir .

Tersine olarak, $X \vee_p X$ üzerinde A_p ve ∇_p nin doğurmuş olduğu uzay diskre olsun . X in p de T_0 olduğunu gösterelim . Yani her $q \neq p$ için p yi kapsayan , q nin her N_q komşuluğu için p nin en az bir N_p komşuluğu vardır ki $q \notin N_p$ dir .

$q \neq p$ ve $X \vee_p X$ diskre olduğundan

$\{q_1\} = \nabla_p^{-1}(\{q\}) \cap A_p^{-1}(W)$ olacak şekilde X^2 de W açık cümlesi vardır W , X^2 de açık olduğundan X de N_q ve V açıkları vardır öyleki $A_p(q) = (q,p) \in N_p \times V \subset W$ dir .

Eğer , $q \notin V \Rightarrow N_p = V$ olsun .

Eğer $q \in V$ ise $(p,q) \in N_q \times V \subset W$ dir çünkü q nin her N_q komşuluğu p yi ihtiva eder . Fakat $\{q_1, q_2\} = A_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(\{q\})$ dir . $q_1 \neq q_2$ olduğundan bu uzayın diskre olması ile çelişir . Dolayısı ile $q \notin V$ dir.

(2)- Kabul edelimki X p de T_1 olsun . Bu takdirde tanım 2.2 den her bir $q \neq p$ için q ve p nin birbirini ihtiva etmeyen komşuluğu vardır . $q \in X \vee_p X$ alalım . Yani q nın komşuluğu N_q öyleki $p \notin N_q$ ve p nin komşuluğu N_p öyleki $q \notin N_p$ dir .

$W = N_q \times N_q$ X^2 de $U = \{q\}$ DX de açık cümleler olduğundan $\{q_1\} = S_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ dir . Benzer olarak $q \neq p$ ve X p de T_1 olduğundan p nin en az bir N_q komşuluğu vardır ki $p \notin N_q$ dir . Bu takdirde

$\{q_2\} = S_p^{-1}(N_p \times N_q) \cap \nabla_p^{-1}(\{q\})$ sağlanır .

Eğer $q = p$ ise bu takdirde $W = X^2$ ve [illegible]sıyla X^2 ve DX de açık cümleler olmak üzere

$\{p\} = S_p^{-1}(X^2) \cap \nabla_p^{-1}(U)$ sağlanır

Böylece induced topoloji diskredir .

Tersine olarak $X V_p X$ üzerinde S_p ve ∇_p yoluyla doğrulan topoloji diskre olsun . $\{q_1\} = S_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(\{q\})$ olacak şekilde X^2 de en az bir W açık cümlesi mevcuttur . Özel olarak $S_p(q_1) = (q,q) \in W$ sağlanır .W açık olduğundan q nin en az bir N_q komşuluğu vardır öyleki $S_p(q_1) = (q , q) \in N_q \times N_q \subset W$ dir. Açık olarak p, N_q da değildir . Aksi halde $(p,q) \in W$ ve dolayısı ile $\{ q_1 , q_2 \} = S_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(\{q\})$ olacaktır . Bu ise uzayın diskre olması ile çelişir . $p \notin N_q$ dir .
Benzer olarak $\{q_2\} = S_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(\{q\})$ olacak şekilde X^2 de en az bir W açığı vardır . $S_p(q_2) = (p,q) \in W$ sağlanır . W açık olduğundan p nin en az bir N_p komşuluğu vardır öyleki $(p,q) \in N_p \times N_q \subset W$ dir . $q \notin N_p$ olduğundan $(q,q) \notin W$ dir . Aksi halde $\{ q_1 , q_2 \} = S_p^{-1}(W) \cap \nabla_p^{-1}(\{ q \})$ olurdu ki bu ise uzayın diskre olması ile çelişir . $q \notin N_p$ dir . Buradan uzay T_1 olacaktır .

(3)- Kabul edelimki X uzayı p noktasında $PreT_2$ olsun. Tanım 2.2 den her $q \neq p$ için eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre değilse p ve q nun ayrık açık komşulukları vardır . Şimdi $X V_p X$ üzerinde S_p ve A_p nin doğurduğu topolojilerin aynı olduğunu gösterelim . Bunu yaparken Lemma 1.1 kullanılacaktır. X^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ olsun .

Önce $A_p^{-1}(\tau) \subset S_p^{-1}(\tau)$ olduğunu gösterelim . Lemma 1.1 den $A_p^{-1}(\tau)$ nin bazının $q \in U$ elemanı için $U = A_p^{-1}(W)$ olacak şekilde τ nin en az bir W baz elemanı vardır. $q \in U$ olduğundan $A_p(q) = (p,q) \in W$ veya $A_p(q) = (q,p) \in W$ dir .

$A_p(q) = (p,q) \notin W$ olsun .Buna göre p ve q nun sırasıyla komşulukları N_p ve N_q olmak üzere $W = N_p \times N_q$ alınabilir . Çünkü W , ε nın baz elemanıdır . Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre ise açık olarak $q = q_2 \in S_p^{-1}(W) \subset A_p^{-1}(W)$ dır çünkü $r \in S_p^{-1}(W) \Rightarrow S_p(r) = (r,p) \in W$ veya $(r,r) \in W$ dır . Şu halde $r \in A_p^{-1}(W)$ dir

Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X p de $PreT_2$ olduğundan p ve q nin sırasıyla N_p' , N_q' ayrık açık komşulukları vardır .

$W_1 = (N_p \cap N_p')\times(N_q \cap N_q')$ olsun. $q = q_2 \in S_p^{-1}(W_1) \subset A_p^{-1}(W)$ olduğunu gösterelim . $r \in S_p^{-1}(W)$ olsun . Böylece $S_p(r) = (r,r) \in W_1$ veya $(p,r) \in W_1$ dir . $N_q' \cap N_p' = \Phi$ olduğundan $(r,r) \notin W_1$ dir . $A_p(r) = S_p(r) =(p,r)$ olup $r \in A_p^{-1}(W)$ dir.

$A_p(q) = (q,p) \in W$ olsun . $W = N_q \times N_p$ olacak şekilde X de p nin N_p , q nin N_q komşuluğu vardır .

Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre ise açık olarak $q_1 \in S_p^{-1} (W) \subset A_p^{-1} (W)$ dir .

Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X p de $PreT_2$ olduğundan p ve q nin ayrık açık N_p' , N_q' komşulukları vardır . $W_1 = (N_q \cap N_q') \times (N_q \cap N_q')$ olsun . Açık olarak $q_1 \in S_p^{-1}(W_1)$ dir. $S_p^{-1}(W_1) \subset A_p^{-1}(W)$ olduğunu gösterelim . $r \in S_p^{-1}(W_1)$ olsun . $S_p(r) = (r,r) \in W_1$ veya $(p,r) \in W_1$ dir. Bu takdirde $S_p(r) = (p,r) \in (N_q \cap N_q') \times (N_q \cap N_q') = W_1$, $p \in N_q$ olur ki buda çelişkidir. Şu halde $S_p(r) = (r,r) \in W_1$ olmak zorundadır . Buna göre $(r,p) \in W \Rightarrow r \in A_p^{-1}(W)$ sağlanır. Bu ise Lemma 1.1 gereğince $A_p^{-1}(\varepsilon) \subset S_p^{-1}(\varepsilon)$ olmasıdır .

Şimdide tersine olarak $S_p^{-1}(\varepsilon) \subset A_p^{-1}(\varepsilon)$ olduğunu gösterelim . Yine Lemma 1.1 i kullanacağız . U ;$S_p^{-1}(\varepsilon)$

nin bazının elamanı ve $q \in U$ olsun . Bu takdirde $U = S_p^{-1}(W)$ olacak şekilde ε nin en az bir W baz elemanı vardır . $S_p(q) = (q,q) \in W$ veya $S_p(q) = (p,q) \in W$ sağlanır .

$S_p(q) = (q,q) \in W$ olsun . Bu takdirde q nin komşuluğu N_q olmak üzere $W = N_q \times N_q$ alınabilir . Çünkü W , ε nin baz elemanıdır .

Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre ise bu takdirde $q \in A_p^{-1}(W) \subset S_p^{-1}(W)$ dir . Gerçekten $r \in A_p^{-1}(W)$ olsun. $A_p(r) = (r,p) \in W$ veya $A_p(r) = (p,r) \in W$ sağlanır . Buradan $r \in S_p^{-1}(W)$ dir .

Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X p de $PreT_2$ olduğundan p ,q nin ayrık açık N_p' ve N_q' komşulukları vardır . Buna göre $W_1 = (N_q \cap N_q') \times N_p$ olsun . $q \in U_1 = A_p^{-1}(W_1)$ dir. $U_1 = A_p^{-1}(W_1) \subset U = S_p^{-1}(W)$ olduğunu gösterelim .

$r \in A_p^{-1}(W_1)$ olsun . $A_p(r) = (r,p) \in W_1$ veya $(p,r) \in W_1$ dir . $A_p(r) = (p,r) \in W_1$ olması halinde $p \in N_q \cap N_q'$ olacaktır . Bu ise çelişkidir . O halde $A_p(r) = (r,p) \in W_1$ olmak zorundadır . Buradan $r \in S_p^{-1}(W)$ dir . Yani $r \in U_1 \Rightarrow$ $U_1 \subset U$ dir .

$S_p(q) = (p,q) \in W$ olsun . Bu takdirde q nin komşuluğu N_q olmak üzere $W = N_q \times N_q$ seçilebilir .

Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre ise bu takdirde açık olarak $A_p^{-1}(W) \subset S_p^{-1}(W)$ dir .

Eğer $\{p,q\}$ cümlesi indiskre değilse ve X p de $PreT_2$ olduğundan p ve q nin ayrık açık N_p' , N_q' komşulukları vardır . Buna göre $W_1 = (N_p \cap N_p') \times (N_q \cap N_q')$ olsun .Kolayca görülebilir ki $U_1 = A_p^{-1}(W_1) \subset U = S_p^{-1}(W)$ dir. Gerçekten $r \in U_1 = A_p^{-1}(W_1)$ olsun . $A_p(r) = (r,p) \in W_1$ veya $(p,r) \in W_1$ dir . $A_p(r) = (r,p) \in W_1$ olması halinde $p \in N_q \cap N_q'$ olurki bu çelişkidir . O halde $A_p(r) = (p,r) \in W_1$ olmak zorundadır . Bu ise $r \in S_p^{-1}(W) = U$ olmasıdır . Yani $U_1 = A_p^{-1}(W_1) \subset S_p^{-1}(W) = U$ olmasıdır .

Şu halde Lemma 1.1 dan $S_p^{-1}(\varepsilon) \subset \dot{A}_p^{-1}(\varepsilon)$ olmasıdır.Bu ise $S_p^{-1}(\varepsilon) = A_p^{-1}(\varepsilon)$ olmasınının ispatını tamamlar .

Tersine olarak $S_p^{-1}(\varepsilon) = A_p^{-1}(\varepsilon)$ olsun . X in p de $PreT_2$ olduğunu göstermeliyiz . Kabul edelimki her $q \neq p$ için $\{p,q\}$ cümlesi indiskre olmasın. Yani p nin en az bir N_p komşuluğu vardır öyleki $\{p,q\} \cap N_p = \{p\}$ veya q nin en az bir N_q komşuluğu vardırki $\{p,q\} \cap N_q = \{q\}$ dir. Kabul edelimki $\{p,q\} \cap N_p = \{p\}$ olsun . Dikkat edelimki $q_2 \in S_p^{-1}(X \times N_q)$ ve kabulden $A_p^{-1}(\varepsilon)$ nin en az bir baz elemanı $A_p^{-1}(W)$ vardır ve $A_p^{-1}(W) \subset S_p^{-1}(X \times N_q)$ dir. Öyleki burada $W = N_p \times(N_q \cap N_q')$ dir . Tekrar kabulden $S_p^{-1}(\varepsilon)$ nin q_2 yi ihtiva eden en az bir $S_p^{-1}(W)$ baz elemanı vardır . Öyleki $S_p^{-1}(W_1) \subset A_p^{-1}(W)$ dir . Burada $W_1 = (N_p \cap N_p') \times (N_q \cap N_q' \cap N_q'') = N \times M$ dir . İddia ediyoruzki $N \cap M = \Phi$ dir . Aksi halde $r \in N \cap M$ olsun . Buna göre $S_p(r) = (r,r) \in W_1$ veya $S_p(r) = (r,p) \in W_1$ dir . $p \notin N_q$ olduğundan $A_p(r) = (r,p) \notin W$ dir . Dolayısı ile

$r_1 \notin A_p^{-1}(W)$ dir . Buradan $N \cap M = \Phi$ dir .

Kabul edelimki $N_p \cap \{p,q\} = \{p\}$ olsun . Hipotezden $S_p^{-1}(\varepsilon)$ nin en az bir $S_p^{-1}(W)$, $W = N_q \times N_q$ baz elemanı vardır öyleki $q_1 \in S_p^{-1}(W) \subset A_p^{-1}(U)$ dir .($U = X \times N_p$) p, N_q da değildir . Aksi halde $S_p(q_2) = (q,p) \in W = N_q \times N_q$ dir . Fakat $S_p^{-1}(W) \subset A_p^{-1}(U)$ olduğundan $q_2 \in A_p^{-1}(U)$ dir Yani $A_p(q_2) = (p,q) \in U = X \times N_p$ olur . $q \notin N_p$ olduğundan bu çelişkidir . Yani $p \notin N_q$ dir .

ispatın bir önceki kısmında yapılan işlemlerle istenen sonuç elde edilir . Böylece X p de $PreT_2$ dir .

(4) - X p de T_2 olsun . Bu takdirde Tanım 2.2 den her bir $q \neq p$ için p ve q nin ayrık açık komşulukları vardır . Özel olarak X p de T_0 ve $PreT_2$ dir . Tersine olarak X p de T_0 ve $PreT_2$ olsun . X p de T_0 olduğundan $\{p,q\}$ cümlesi indiskre değildir . X p de $PreT_2$ olduğundan p ve q nin ayrık açık komşuluğu vardır . Bu ise X in p de T_2 olmasıdır .

(5) - $i = 0,1,2,3,4$ için X uzayı T_i dir $\Leftrightarrow$ Her p için X p de T_i dir . $i = 0,1,2,3,4$ için

<u>i = 0 olsun :</u> Yani X T_0 olması için gerek ve yeter şart her p için X in p de T_0 olmasıdır .

X T_0 olsun . Bu takdirde herbir $q \neq p$ için p nin q yi ihtiva etmeyen komşuluğu veya q nin p yi ihtiva etmeyen komşuluğu vardır . Bu ise her $p \in X$ için X in p de T_0 olmasıdır .

Tersine olarak her p için X p de T_0 olsun. Açık olarak X T_0 dır.

i = 1 olsun X T_1 dir $\Leftrightarrow$ Her p için X p de T_1 dir.

Kabul edelimki X T_1 olsun. O halde her $p \neq q$ için q nin p yi içermeyen komşuluğu ve p nin q yi ihtiva etmeyen komşuluğu vardır. Buradan X p de T_1 dir. (her p için)

Tersine olarak her p için X p de T_1 olsun. Açık olarak X T_1 dir.

[illegible] Önce bize yardımı olacak [illegible] X $PreT_2$ dir $\Leftrightarrow$ Her p için [illegible] $PreT_2$ dir.

[illegible] olsun. Özel olarak [illegible]. Her p için [illegible]

[illegible] olarak her p için, X p [illegible] olsun. Yani [illegible] her $p \neq q$ için {p,q} cümlesi [illegible] olmasın. Bu [illegible]dirde X her p için $PreT_2$ olduğundan özel olarak X $PreT_2$ dir.

Şimdi i = 2 için istenen ispatı yapabiliriz.

Kabul edelimki X T_2 olsun. Tanım 2.2 den ve ispatın (4). kısmından her p için X p de T_2 dir.

Her p için X p de T_2 olsun. Bu takdirde her $q \neq p$ için p nin en az bir N_p, q nin en az bir N_q komşuluğu vardırki $N_p \cap N_q = \Phi$ dir. Her p için sağlandığından X T_2 dir.

i = 3 olsun . Göstereceğizki X her $p \in X$ için p de T_3 olması için gerek ve yeter şart X in T_3 olmasıdır . Kabul edelimki her p için X p de T_3 olsun . Tanım 2.2 den X p de T_1 ve X / F p de $PreT_2$ olacaktır . Her p için sağlandığından yukarıdan X T_1 ve X/F p de $PreT_2$ dir . Böylece X T_3 dir .

Aksine olarak X T_3 olsun . Tanım 2.2 den ve ispatın bir önceki kısmından X her p için p de T_3 dir.

i = 4 olsun X T_4 dir $\Leftrightarrow$ Her p için X p de T_4 dür .

Tanım 2.2 den ve bir önceki ispattan dolayı açıktır .

B boştan farklı bir cümle ve $X = (B, \mathcal{E})$ herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $i_1, i_2 : X \to B\ V_p\ B$ ve $A_p : B\ V_p\ B \to (B^2, \xi)$ verilsin . Bunlar tarafından doğurulan topoloji (co-induced) sırasıyla ξ' ve $A_p^{-1}(\xi)$ olsun . ξ , X^2 üzerinde tanımlı çarpım topolojisidir .

LEMMA 2.4 $A_p^{-1}(\xi) = \xi'$ dir .

Önce $\xi' \subset A_p^{-1}(\xi)$ olduğunu gösterelim . $U \in \xi'$ olsun. ξ' nin tanımından $i_1^{-1}(U)$, $i_2^{-1}(U)$ X 'de açıktırlar . Eğer $p \in U$ ise $V = i_1^{-1}(U) \times i_2^{-1}(U)$ olsun . V , X^2 de açıktır ve $U = A_p^{-1}(V)$ dir . Gerçekten $z \in A_p^{-1}(V)$ olsun. $A_p(z) = (z,p) \in V$ veya $(p,z) \in V$ dir .

Eğer $A_p(z) = (z,p) \in V = i_1^{-1}(U) \times i_2^{-1}(U)$ ise $z \in i_1^{-1}(U)$

dir . Dolayısı ile $i_1(z) = z \in U$ dir .

Eğer $A_p(z) = (p,z) \in V = i_1^{-1}(U) \times i_2^{-1}(U)$ ise $p \in i_1^{-1}(U)$

ve $z \in i_2^{-1}(U) \Rightarrow z \in U$ dir .

Buradan $A_p^{-1}(V) \subset U$ dir .

Tersine olarak $z \in U$ olsun . $i_1^{-1}(z) = z \in i_1^{-1}(U)$ ve

$i_2^{-1}(p) = p \in i_2^{-1}(U) \Rightarrow (z,p) \in i_1^{-1}(U) \times i_2^{-1}(U) = V$ dir .

$A_p(z) \in V$ dir . $\Rightarrow z \in A_p^{-1}(V)$ olur .

Bu ise $U \subset A_p^{-1}(V)$ olmasıdır .

Yine aynı şekilde $i_1^{-1}(p) = p \in i_1^{-1}(U)$ ve $i_2^{-1}(z) = z$

$\in i_2^{-1}(U)$ ise $(p,z) \in i_1^{-1}(U) \times i_2^{-1}(U) = V$ dir . Buradanda

$z \in A_p^{-1}(V)$ olur . Yani $U \subset A_p^{-1}(V)$ sağlanır .

Böylece $U = A_p^{-1}(V)$ dir .

Eğer $p \notin U$ ise bu takdirde $V = (i_1^{-1}(U) \times B) \cup (B \times i_2^{-1}(U))$

olsun . V , X^2 de açıktır . $U = A_p^{-1}(V)$ dir . Gerçekten

$z \in A_p^{-1}(V)$ olsun . $A_p(z) = (z,p) \in V$ veya $(p,z) \in V$ dir .

Eğer $A_p(z) = (z,p) \in V$ ise bu takdirde $z \in i_1^{-1}(U)$,

$p \in B$ veya $z \in B$, $p \in i_2^{-1}(U)$ dir . $z \in i_1^{-1}(U) \Rightarrow z \in U$

dir . Eğer $z \in B$, $p \in i_2^{-1}(U)$ olsaydı buradan $p \in U$ olur

ki bu çelişkidir . $p \notin U$ dir . $z \in U$ olur .

Eğer $A_p(z) = (p,z) \in V$ ise $p \notin U$ olduğundan $z \in i_2^{-1}(U)$

$\Rightarrow z \in U$ olacaktır . Yani $A_p^{-1}(V) \subset U$ dir .

Tersine olarak $U \subset A_p^{-1}(V)$ olduğunu gösterelim . $z \in U$

olsun . $i_1^{-1}(z) = z \in i_1^{-1}(U)$, $i_2^{-1}(z) = z \in i_2^{-1}(U)$ ve $p \in B$

ise $(z,p) \in i_1^{-1}(U)\times B \subset V$ veya $(p,z) \in B\times i_2^{-1}(U) \subset V$ dir .

Böylece $A_p(z) = (z,p) \in V$ dir . Bu ise $U \subset A_p^{-1}(V)$ olmasıdır . Yani $U = A_p^{-1}(V)$ dir .

$A_p(z) = (p,z)$ olsun . $A_p(z) \in V = (i_1^{-1}(U) \times B) \cup (B\times i_2^{-1}(U))$ ise bu takdirde $(p,z) \in i_1^{-1}(U) \times B$ veya $(p,z) \in B \times i_2^{-1}(U)$ dir . Buradan $p \in U$, $z \in B$ veya $p \in B$ $z \in U$ dir . Bu ise $A_p^{-1}(V) \subset U$ olmasıdır .

Tersine olarak $z \in U$ ise bu takdirde $i_2^{-1}(z) = z \in i_2^{-1}(U)$, $i_1^{-1}(z) = z \in i_1^{-1}(U)$ ve $p \in B$ ise buradan $(p,z) \in B \times i_2^{-1}(U) \subset V$ veya $(z,p) \in i_1^{-1}(U) \times B \subset V$ dir.

Buradan $(p,z) \in V$ olacaktır . Bu ise $z \in A_p^{-1}(V)$ olmasıdır.

Böylece $U = A_p^{-1}(V)$ dir .

Şu halde $\tau \subset A_p^{-1}(\tau)$ olacaktır .

Şimdide $A_p^{-1}(\tau) \subset \tau$ olduğunu gösterelim . $U \in A_p^{-1}(\tau)$ olsun . Bu takdirde en az bir W , τ çarpım topolojisinin bazının elemanı olmak üzere $U = A_p^{-1}(W)$ yazarız .

Her bir i için N_i , M_i X de açıklar olmak üzere $W = \bigcup_{i \in I} N_i\times M_i$ X^2 de açıktır . Kolayca görülebilirki $k = 1 , 2$ için $i_k^{-1}(A_p^{-1}(N_i \times M_i)) = N_i , M_i$ veya Φ dir . Gerçekten

<u>$k = 1$ olsun</u> $i_1^{-1}(A_p^{-1}(N_i \times M_i)) = N_i$ dir .

$z \in i_1^{-1}(A_p^{-1}(N_i \times M_i))$ olsun . $i_1(z) = z_1 \in A_p^{-1}(N_i\times M_i)$

$\Rightarrow A_p(z_1) = (z,p) \in N_i \times M_i \;\Rightarrow z \in N_i$ dir yani

$i_1^{-1}(A_p^{-1}(N_i \times M_i)) \subset N_i$ olacaktır .

Tersine olarak $z \in N_i$, $p \in M_i$ olsun . Bu takdirde

$(z,p) \in N_i \times M_i \Rightarrow z_1 \in A_p^{-1}(N_i \times M_i)$ yazılır . Buradan da

$i_1(z) = z_1 \in A_p^{-1}(N_i \times M_i)$ ise $z \in i_1^{-1}(A_p^{-1}(N_i \times M_i))$ dir .

Bu ise $N_i \subset i_1^{-1}(\, A_p^{-1}(\, N_i \times M_i)\,)$ olmasıdır . Dolayısı

ile $i_1^{-1}(\, A_p^{-1}(\, N_i \times M_i)\,) = N_i$ olacaktır .

<u>k = 2 olsun</u> $i_2^{-1}(\, A_p^{-1}(\, N_i \times M_i)\,) = M_i$ dir .

$z \in i_2^{-1}(\, A_p^{-1}\,(\, N_i \times M_i\,)$ olsun . $i_2(z) = z_2 \in A_p^{-1}(\, N_i \times M_i)$

dir . Bu ise $A_p(z) = (p,z) \in N_i \times M_i$ olmasıdır . Buradan

$z \in M_i$ dir . Yani $i_2^{-1}(\, A_p^{-1}\,(\, N_i \times M_i\,)\,) \subset M_i$ sağlanır .

Tersine olarak $z \in M_i$, $p \in N_i$ olsun . Bu takdirde

$(p,z) \in N_i \times M_i$ olacaktır . Bu $\Rightarrow z_2 \in A_p^{-1}\,(\, N_i \times M_i\,)$ dir.

$i_2(z) = z_2 \in A_p^{-1}(\, N_i \times M_i\,) \Rightarrow$ bu takdirde

$z \in i_1^{-1}(\, A_p^{-1}(\, N_i \times M_i\,)\,)$ olmasıdır . Yani

$M_i \subset i_1^{-1}\,(\, A_p^{-1}(\, N_i \times M_i\,)\,)$ dir .

Buradan $M_i = i_1^{-1}(\, A_p^{-1}(\, N_i \times M_i\,)\,)$ sağlanır .

Eğer $p \notin M_i$ veya $p \notin N_i$ ise bu takdirde açık olarak

$i_k^{-1}(\, A_p^{-1}(\, N_i \times M_i\,)\,) = \Phi$ dir .

Buna göre

$i_1^{-1}(U) = i_1^{-1}(\, A_p^{-1}(\, W\,)\,) = \bigcup_{i \in I} N_i$ veya Φ

$i_2^{-1}(U) = i_1^{-1}(\, A_p^{-1}(\, W\,)\,) = \bigcup_{i \in I} M_i$ veya Φ

olarak yazarız . Yani $i_1^{-1}(U)$, X de açıktır . Böylece

$U \in \tau'$ dir . Bu ise $A_p^{-1}(\tau) \subset \tau'$ olmasıdır . Şu halde $\tau' = A_p^{-1}(\tau)$ dir .

UYARI 2.5. Lemma 2.4 den ;

(1) - τ', $X \vee_p X$ üzerindeki i_1 ve i_2 tarafından doğurulmuş coinduced topoloji olmak üzere X p de T_0 olmasını şöylede karakterize edebiliriz ;

X p de T_0 dir $\Leftrightarrow$ $X \vee_p X$ üzerinde I (birim dönüşüm) ve ∇_p tarafından doğrulan (induced) topolojinin diskre olmasıdır .

(3) - X^2 üzerinde tanımlanan çarpım topolojisi τ olmak üzere X in p de $PreT_2$ olmasını şöylede karakterize edebiliriz .

X p de $PreT_2$ dir $\Leftrightarrow$ i_1 ve i_2 nin doğurduğu coinduced topoloji τ' ile $S_p^{-1}(\tau)$ topolojisinin aynı olmasıdır .

KAYNAKLAR

[1] - M.BARAN,Seperation Properties.Indian J.Pure and Appl. Math.23(5) 1992,333-342.

[2] - J.R.MUNKERS,Topology : A First Course,Prentice Hall Inc.,New Jersey, 1975.