Erc. Üny. Fen Bil. Derg., 8, 1, (1992), 1413-1424

# GRUP HALKASINDA SERBEST TÜREV

Arif DANE ve A.Ceylan ÇÖKEN
Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edb. Fakültesi Matematik Böl.-SİVAS

ÖZET

Bu çalışmada, grup halkasında Fox'un tanımladığı serbest türev kavramı ile ilgili bazı teknikler ve bazı özellikler sergilendi. Düğüm matrisleri ve polinomları bu teknikle hesaplandı.

# FREE DERİVATİON İN A GROUP RİNG

ABSTRACT

Some techniques and characteristics related to the free derivation concept defined by Fox in the group ring have been exhibited. Knot matrix and knot polynomials have been calculated with this fechniques.

## 1. GİRİŞ

1.1. Tanım (Grup Halkası): Her G çarpımsal grubuna iliştirilen ZG grup halkası, Z tamsayılar halkasına göre teşkil edilebilir. ZG halkasının bir elemanı,

$$\sum_{g\in G} a_g g$$

toplamı ile verilir. Burada $a_g$ tamsayısı, sonlu sayıda g hariç sıfıra eşittir. ZG içinde toplama ve çarpma sırasıyla şöyle tanımlanır.

$$\Sigma\, a_g\, g + \Sigma b_g\, g = \Sigma\,(a_g + b_g)\, g;$$

$$\Sigma\, a_g\, g = \Sigma(\Sigma_h\, a_{gh^{-1}}\, b_h)\, g$$

dır.

Z nın a elemanı ZG nın a.1 elemanı ile özdeşlenir ve G nın g elemanı ZG nın 1.g elemanı ile özdeşlenir. Böylece Z ve G, ZG nın alt kümeleri olarak göz önüne alınır. H grubu içine G grubunun bir $\psi$ homomorfizmi ZG nın ZH içine halka homomorfizmini oluşturur. Bu halka homomorfizmi grup homomorfizminin lineer genişlemesi olur ve $\psi$ ile gösterilir.

$\left(\Sigma a_g\, g\right)^{\psi} = \Sigma\,(a_g\, g)^{\psi}$, Z nin her bir elemanı $\psi$ altında sabit kalır.

**1.2. Tanım (Aşikârlayıcı Homomorfizm):** G herhangi bir grup ve $g\varepsilon$ G için $o(g)=1$ ile tanımlanan $o$: G $\rightarrow$ Z dönüşümünü göz önüne alalım. $o$: ZG $\rightarrow$ Z halka homomorfizmi olmak üzere o'nın tek genişlemesine aşikârlayıcı denir. Yani $o(\Sigma n_i\, g_i) = \Sigma n_i$ dır.

**1.3. Tanım (Serbet Türev):** Bir ZG grup halkasında türev, aşağıdaki koşulları sağlarsa d: ZG $\rightarrow$ ZG dönüşümü olarak adlandırılır.

(1.1) $d(\xi + \eta) = d(\xi) + d(\eta)$;

(1.2) $d(\xi\, \eta) = d(\xi)\, \eta^o + \xi d(\eta)$; $\xi$ ; $\eta \varepsilon ZG$

Buradaki o dönüşümü tanım (1.2) deki aşikârlayıcı homomorfizmdir. G nin elemanları için (1.2) daha basit şekle indirgenir.

g,h $\varepsilon$G için;

(1.3) $d\,(gh) = dg + gdh$

(1.1) ve (1.2) nin sonucu olarak aşağıdakiler yazılabilir.

(1.4) $dn = 0,\ n\varepsilon Z$

(1.5) $d(\Sigma a_g g) = \Sigma a_g dg$

(1.6) $d(\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{i-1}\, d\xi_i \xi_{i+1}^{o} \ldots \xi_i^{o}$

(1.7) $d(g^{-1}) = -g^{-1}\, dg,\ g\varepsilon G$

(1.8) $d(g^{n}) = (1 + g + g^{2} + \ldots + g^{n-1})\, dg$

(1.9) $d(g^{-n}) = -\,(g^{-1} + g^{-2} + \ldots + g^{-n})\, dg\ ,\ n \geq 1$

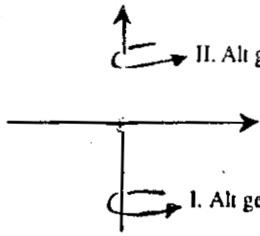
## 2. DÜĞÜM VE DÜĞÜM POLİNOMLARI

**2.1. Tanım (Düğüm):** $K \subset S^3$ bir $S^1$ küresi ile homeomorf ise K'ya $S^3$ içinde bir düğüm denir. Düğüm grubu

Düğüm grubu $\quad G = \pi_1(S^3 - K) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1, r_2, \ldots, r_n\}$

ise düğüm grubunun bağıntılarını veren yöntemlerden biri olan Writinger temsiline denk bir temsil verelim.

K uzayda düzgün pozisyonda bir düğüm ve a ε p(K) üzerinde bir çift nokta olsun. a'ya ait olan üst geçit noktasını taşıyan doğru parçasına a'ya ait üst geçit denir. Yine a'ya ait olan alt geçit noktasından $\lambda \varepsilon R^+$ uzaklığında bulunan iki doğru parçasına a'ya ait alt geçitler denir. O halde p(K) ya ait her çift nokta üzerinde K nın üç doğru parçasını üst ve alt geçitler olarak adlandıralım. Buradaki alt geçitleride düğümün yönü soldan sağa doğru iken üst geçitin üstündekine II.alt geçit altındakine I. alt geçit diyelim.




Şekil 2.1.

Şimdi, K düğümünün herhangi bir i. geçit noktasından düğüm grubunun bir bağıntısını şöyle yazabiliriz:

Sırasıyla üst geçit, I. alt geçit ve II. alt geçite takılan doğuraylar Şekil 2.1. de görüldüğü gibi $x_i$, $x_j$, $x_k$ ise, $r_i = x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1}$ dır. Bu bağıntının (1.2)'e göre serbest türevleri;

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 1 - x_i x_j x_i^{-1}, \quad \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = x_i, \quad \frac{\partial r_i}{\partial x_k} = -x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1} \tag{2.1}$$

olur.

Benzer şekilde $r_i^{-1}=x_k x_i x_j^{-1} x_i^{-1}$ olur. Yine değişkenlerine göre serbest türevleri

$$\frac{\partial r_i^{-1}}{\partial x_i} = -r_i^{-1}\,\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial r_i^{-1}}{\partial x_j} = -r_i^{-1}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial r_i^{-1}}{\partial x_k} = -r_i^{-1}\,\frac{\partial r_i}{\partial x_k}$$

olur.

**2.2 Tanım (Alexander Matrisi):**

$$(a_{ij}) = \frac{\partial(r_1,r_2,\ldots,r_n)^{\psi\Phi}}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial r_n}{\partial x_1} & \frac{\partial r_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial r_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{\psi\Phi}$$

matrisine Alexander matrisi denir. Burada, $\frac{\partial(r_1,r_2,\ldots,r_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ Jakobiendir. Aynı zamanda

$\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\Phi$, $\psi$ sıra ile. $ZG \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} ZG \xrightarrow{\Phi} Z|x:r| \xrightarrow{\psi} ZH$

serbest türev doğal ve abelleştirici homomorfizmlerin grup halkasına genişlemeleridir. H=G/G' komutatör bölüm grubudur ki abeleştiricidir.

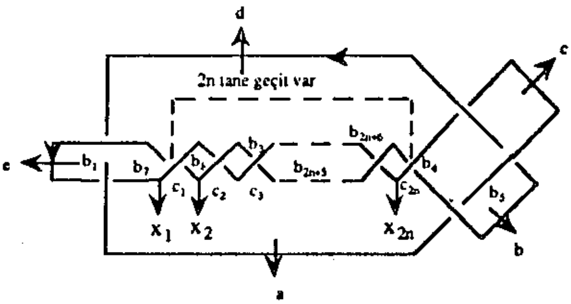
$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i}\right)^{\psi\Phi} = 1-t,\ \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\psi\Phi} = t,\ \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_k}\right)^{\psi\Phi} = -1 \text{ olur.}$$

(2.1) formüllerine göre şöyle özetleyebiliriz.

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_k}\right)^{\psi\Phi} = \begin{cases} 1 - t & k \text{ indisli doğuray üst geçit ise} \\ t & k \text{ indisli doğuray I. alt geçit ise} \\ -1 & k \text{ indisli doğuray II. alt geçit ise} \end{cases}$$

**2.3. Örnek: ( $K_n$ Kelebek düğümlerinin Alexander matrisi ve polinomu):**

Aşağıda diyagramı verilen çift indisli $K_n$ - Kelebek düğümünün düğüm grubu;




Şekil 2.2.

$G = \Pi_1 (S^3 - K_{2n}, p_0) = \{a, b, c, x_1, x_2, ..., x_{2n}, d, e; ac\bar{a}\bar{b},\ ba\bar{b}\bar{x}_1,\ x_1x_2\bar{x}_1\bar{a},$
$x_2x_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ x_3x_4\bar{x}_3\bar{x}_2,\ x_4x_3\bar{x}_4\bar{x}_5,\ ...,\ x_{2n-2}x_{2n-3}\bar{x}_{2n-2}\bar{x}_{2n-1},\ x_{2n-1}x_{2n}\bar{x}_{2n-1}\bar{x}_{2n-2},$
$x_{2n}x_{2n-1}\bar{x}_{2n}\bar{e},\ cd\bar{c}\bar{x}_{2n},\ de\bar{d}\bar{c},\ eb\bar{e}\bar{d}\}$ dır. $x^{-1}$ elemanını $\bar{x}$ ile göstereceğiz.

Şimdi, $K_{2n}$, Alexander matrisi;

$$(a_{ij}) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\psi\phi} = \begin{array}{c}
\begin{matrix} \quad a & \quad b & \quad c & \quad x_1 & \quad x_2 & \quad x_3 & \cdots & x_{2n-1} & x_{2n} & d & e \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
1-ac\bar{a} & -ac\bar{a}\bar{b} & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & 1-ba\bar{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-x_1x_2\bar{x}_1\bar{a} & 0 & 0 & 1-x_1x_2\bar{x}_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_2 & 1-x_2x_1\bar{x}_2 & -x_2x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1-cd\bar{c} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -cd\bar{c}\bar{x}_{2n} & c & 0 \\
0 & 0 & -dc\bar{d}\bar{c} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-dc\bar{d} & d \\
0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -eb\bar{e}\bar{d} & 1-eb\bar{e}
\end{bmatrix}_{(2n+5)\times(2n+5)}
\end{array}$$

$$A(t) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} a & b & c & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{2n-1} & x_{2n} & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-t & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & 1-t & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-t & t \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1-t \end{array}\right]_{(2n+5)\times(2n+5)} \end{array}$$

Alexander matrisinin herhangi bir satır ve sütununun çıkarılmasıyla düğümün Alexander polinomu bulunur. 2n + 5 inci satır ve 2n + 5 inci sütununu çıkaralım.

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix}_{(2n+4)\times(2n+4)}$$

elde edilir.

2n+3. satır ve 2n+3. sütuna göre açalım. Burada (2n+3)x(2n+3) eleman olan t ye göre açılımı $M_1$ ve (2n+3)x(2n+3) eleman olan (1-t) ye göre açılımı $M_2$ ile gösterelim.

$$M_1 = (-1)t \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-t & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & 1-t \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2n+3)\times(2n+3)}$$

$$M_2 = (1-t) \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-t & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(2n+3)\times(2n+3)}$$

Bu işlemlere benzer şekilde devam edilirse

$\Delta(t) = M_1 + M_2$ olur.

$$\Delta_{2n}(t) = (1-t)\,t^{n-1}\begin{bmatrix} t^2-t+1 & t(1-t) & nt-n \\ -1 & 0 & n-(n+1)t \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} + t^n \begin{bmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ t & 1-t & nt-n \\ -1 & 0 & n-(n+1)t \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{2n}(t) = t^n\{(n+1)t^4 - (3n+1)t^3 + (4n+1)t^2 - (3n+1)t + (n+1)\}$$

elde edilir.

Benzer şekilde tek indisli $K_{2n+1}$ Kelebek düğümü için Alexander polinomu aşağıdaki gibi

$$\Delta_{2n+1}(t) = t^n\{(n+1)t^4 - (3n+3)t^3 + (4n+3)t^2 - (3n+3)t + (n+1)\}$$

elde edilir.

## KAYNAKLAR


1. Bozhüyük,M.E.,1975, Basit Kapalı Uzay Eğrileri, TÜBİTAK, Temel Bilimler Araştırma Grubu, TBAG 155 nolu araştırma projesi. Ankara.

2. Burde, Gerhard ve Heiner, Zieschang Knots, 1985, Walterde Gruyter Berlin, Newyork.

3. Chen,K.T., Fox, R.H. ve Lyndon, R.C., F.D.C. IV, 1958 Annals of Mathematics cilt: 68. No. 1, S.81-95.

4. Fox,R.H.,1963. Introduction to Knot Theory. Blaisdell Ginn, Newyork, s.94-123.

5. Fox,R.H.,1952, F.D.C.I. Analys of Mathematic cilt.57 No 3, s.547-560.

6. Rolfsen,D.,1983, Knot Theory ond Monifolds, proceedugs of a conference heldn Vancuover, Canada.