Erc.Üniv.Fen Bil.Derg., 6.1-2 (1990), 1008-1015

KOMPLEKS ANALİTİK MANİFOLDLARIN HOMOLOJİ GRUBU ÜZERİNE

Cemil YILDIZ
İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, MALATYA

Keywords : Complex Manifold, Homotopy, Homology Group, Sheaf, Section.

ÖZET

X n-boyutlu komplex analitik manifold, $x \varepsilon X$ taban noktasına göre esas grubu $F_x \neq \{1\}$ ve herbir $x \varepsilon X$ için (X,x) noktalı n-boyutlu kompleks analitik manifoldlar aynı homotopi tipinde olsunlar. (P,P_0) taban noktası birim eleman olan herhangi bir topolojik grup ise, P topolojik grubun oluşturduğu gruplar X üzerinde A demetini meydana getirir[2]. Bu çalışmada A demeti kullanarak X kompleks manifoldunun homoloji grubu teşkil edilmiştir.

ON THE HOMOLOGY GROUP OF THE COMPLEX ANALYTIC MANIFOLDS

SUMMARY

Let X be complex analytic n dimensional manifold and $F_x \neq \{1\}$ be the fundamental group of X with respect to the base point x, for any $x \varepsilon X$. For every $x \varepsilon X$, (X,x) pointed n-dimensional complex analytic manifold which has same homotopy type. If topological group $(P,P_0)$with identity element as base point, than the groups formed by topological group over X gives sheaf A[2]. In this study, the homology group of complex manifold X is constructed by useing sheaf A.

I. GİRİŞ

X n-boyutlu kompleks analitik manifold, $x\varepsilon X$ taban noktasına göre esas grubu $F_x \neq \{1\}$ olsun. Ayrıca herbir $x\varepsilon X$ için (x,X) noktalı n-boyutlu kompleks analitik manifoldlar aynı homotopi tipinde olsunlar. (P,P_0) taban noktası birim eleman olan herhangi bir topolojik grup ise, (X,x) den (P,P_0)'a taban noktalarını koruyan sürekli tasvirlerin tamamını A(X) ile gösterelim. A(X)'in bir grup olduğu açıktır.

$f\varepsilon A(X)$, (X,x), $x\varepsilon X$ ve (P,P_0) taban noktası birim eleman olan bir topolojik grup olsun. $x_0 \varepsilon X$ keyfi sabit bir nokta olmak üzere (X,x_0) dan (P,P_0)'a taban noktalarını koruyan, taban noktalarına göre homotop olan sürekli tasvirlerin tüm homotopi sınıflarını $[(X,x_0);(P,P_0)]=A_{x_0}$ ile gösterelim. (P,P_0) topolojik grubun işleminden faydalanarak A_{x_0} üzerine bir işlem konulabilir, öyle ki A_{x_0} bu işlemle birlikte bir abel grubudur. $x\varepsilon X$ keyfi alındığında da A_x'ler abel grubudur[1].

Herbir $x\varepsilon X$, (X,x) noktalı topolojik uzaylar için oluşturulan

$$A=\bigvee_{x\varepsilon X}[(X,x);(P,P_0)]$$

ayrık birleşimi X üzerinde bir cümle olup, $\Pi:A \rightarrow X$ tabii projeksiyonu, herbir $\sigma_x=[f]_x \varepsilon A_x=[(X,x);(P,P_0)]\subset A$ için $\Pi(\sigma_x)=\Pi([f]_x)=x\varepsilon X$ şeklinde tanımlanmıştır.

A üzerindeki topolojiyi aşağıdaki gibi oluşturabiliriz:

$x_0\varepsilon X$ keyfi sabit bir nokta ve $V=V(x_0)$, x_0'ın X de bir açık komşuluğu olsun. $s:V \rightarrow A$ tasvirini şöyle tanımlayabiliriz: $x_0\varepsilon X$ için A da A_{x_0} alt cümlesi var öyleki $[g]_{x_0}\varepsilon A_{x_0}$. Eğer y, V de herhangi bir nokta ise, (X,x_0) ve (X,y) aynı homotopi tipinden olduklarından (X,y) den (X,x_0)'a bir ϕ homotopi eşdeğerlilik tasviri vardır. Böylece

$$\begin{array}{ccc} (X,x_0) & \xrightarrow{g} & (P,P_0) \\ \uparrow{\scriptstyle\phi} & \nearrow{\scriptstyle go\phi} & \\ (X,y) & & \end{array}$$

diagramında görülen $go\phi:(X,y) \rightarrow (P,P_0)$ tasviri sürekli ve taban noktalarını korur. $go\phi=h$ tasvirinin homotopi sınıfı $[h]_y\varepsilon A_y$ dir. O halde $s(y)=[h]_y$ olarak alabiliriz. Bu şekilde tanımlanan s tasviri iyi tanımlı olup, her $y\varepsilon X$ için $(\phi os)(y)=\phi([h]_y)=y$ öyleki $\phi os=1_V$ ve $s(x_0)=[g]_{x_0}$. Yukarıdaki gibi V açık cümlesi üzerinde tanımlanan s tasvirlerinin tamamının $\Upsilon(V,A)$ ile gösterelim. Keyfi $[g]_{x_0}\varepsilon A_{x_0}$ elemanı verildiğinde s tasviri ile elde edilen $[go\phi]_y=[h]_y$ homotopi sınıfı A_{x_0} ile A_y grupları arasında bir izomorfizm tanımlar. $s(V)=\bigsqcup_{y\varepsilon V}[h]_y$ olarak alır ve A da açık alt cümle olarak tanımlarsak, T, $x\varepsilon X$'in bir açık komşuluklar tabanı ise, bu durumda

$$T^* = \{\ s(V)\ :\ V \varepsilon T\ ,\ s \varepsilon \Upsilon(V,A)\ \}$$

ailesi A'da bir topoloji tabanıdır. O halde A bir topolojik uzaydır. Bu topolojide s ve Π tasvirleri sürekli, hata Π lokal topolojik tasvirdir [2]. Sonuç olarak (A, Π) çiftine veya kısaca A'ya (P,P_0) topolojik grubun X üzerinde oluşturduğu abel grupların demeti denir[2]. $x \varepsilon X$ keyfi sabit bir nokta ve $V=V(x) \subset X$ de açık bir komşuluk ise, yukarıda tanımlanan özellikleri sağlayan $s:V \rightarrow A$ tasvirine A'nın V üzerindeki kesiti denir. A'nın V üzerindeki kesitlerin tamamını $\Upsilon(V,A)$ ile gösterelim. $\Upsilon(V,A)$ cümlesi tasvirlerin noktasal çarpım işlemine göre bir abel grubudur[2]. Böylece A,X üzerinde abel grupların demetidir[3]. Her bir $x \varepsilon X$ için $A_x = [\ (X,x);(P,P_0)] = \Pi^{-1}(x)$ grubuna A'nın x üzerindeki sapı denir. $\Pi^{-1}(x) = A_x$ sapı diskret topolojiye sahiptir[4].

<u>Teorem:1.1.</u> (A,Π), X üzerinde demet, $V \subset X$ açık ve $s \varepsilon \Upsilon(V,A)$ olsun. Bu durumda $\Pi : s(V) \rightarrow V$ topholojik ve $s = (\Pi \mid s(V))^{-1}$ dir.

<u>İspat:</u> $\Pi o s = 1_V$ tanımından $x \varepsilon V$ için $so(\Pi \mid s(V))\ (s(x)) = so \Pi o s\ (x) = s(x)$. O halde $so(\Pi \mid s(V)) = 1_{s(V)} \Rightarrow s = (\Pi \mid s(V))^{-1}$. Genellikle X üzerindeki global kesitlerle ilgileneceğiz.

II. A DEMETİNİN SAĞLAMIŞ OLDUĞU ÖZELLİKLER:

1. $V \subset X$ açık cümlesi üzerindeki her bir kesit X'e global olarak genişletilebilir, öyleki $\Upsilon(V,A) = \Upsilon(s \mid V,A)$, $s \varepsilon \Upsilon(X,A)$.

2. A'nın herhangi iki sapı izomorfiktir.

3. $V_1, V_2 \subset X$ herhangi iki açık cümle, $s_1 \varepsilon \Upsilon(V_1,A)$ ve $s_2 \varepsilon \Upsilon(V_2,A)$ olsun. Eğer herhangi $x_0 \varepsilon V_1 \cap V_2$ noktası için $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ ise $V_1 \cap V_2$nin tamamında $s_1 = s_2$.

4. $V \subset X$ açık, $s_1, s_2 \varepsilon \Upsilon(V,A)$ olsun. Eğer herhangi $x_0 \varepsilon V$ için $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ ise, bu durumda bütün V de $s_1 = s_2$.

5. $x \varepsilon X$ herhangi bir nokta ve $V=V(x) \subset X$ açık bir cümle olsun. Bu du-

rumda $s_i \varepsilon\ \Upsilon(V,A)$ ve $\Pi \mid s_i(V):s_i(V) \rightarrow V, i\varepsilon I$ için topolojik tasvir olduğundan $\Pi^{-1}(V)=\bigvee_{i\varepsilon I} s_i(V)$. Böylece A,X' ın bir örtü uzayıdır [5,6,7].

6. (A) demetinden, kendisi üzerine sapları koruyan topolojik tasvir bir demet izomorfizmidir. Bu demet izomorfizmi A'nın örtü dönüşümü olarak adlandırılır ve A'nın bütün örtü dönüşümlerinin cümlesini T ile gösterirsek, açıkça T bir gruptur[7,8].

Örtü dönüşümleri demet izomorfizmi olan X'in A örtü uzayı aşağıdaki özellikleri sağlar:

7. A_X A'nın bir sapı ve $\sigma\varepsilon A_X$ olsun. Bu durumda A_X'in her bir σ_X noktasına karşılık bir tek $s\varepsilon\Upsilon(X,A)$ kesiti var öyleki $s(x)=\sigma_X$. Böylece A_X 'ın noktaları ile $\Upsilon(X,A)$ nın noktaları arasında bire-bir eşleme vardır.

8. Gösterilebilirki, A'nın örtü dönüşümlerinin T grubu, elemanları A_X'ın noktaları ile bir tek şekilde belirlenen, $\Upsilon(X,A)$ abel grubuna izomorfiktir. O halde $A_X \equiv \Upsilon(X,A) \equiv T$. Böylece T bir geçmişe (transitive)dir. Yani, $\overset{1}{\sigma}_X, \overset{2}{\sigma}_X \varepsilon A_X$ elemanlarına karşılık bir tek $t\varepsilon$ T var öyleki $t(\overset{1}{\sigma}_X) = \overset{2}{\sigma}_X$ O halde A, X'ın bir regüler örtü uzayıdır[1]. Ayrıca, X'ın kompleks manifold olması ve ψ_i, $i\varepsilon I$ lokal değişkeninin tanım bölgesi içinde olan her V açık cümlesi A ile tamamen örtülür. (Teorem.1.1). Yani $\Pi^{-1}(V)$ ters görüntüsünün her bileşeni V ye homeomorftur. X'ın her bir noktası tamamen örtülen bir komşuluğa sahip olduğundan A tamdır. Böylece A,X 'ın tam regüler örtü uzayıdır[8].

$U\subset X$ açık bir cümle öyleki herbir $(X,x), x\varepsilon X$ noktalı n-boyutlu kompleks manifold da taban noktayı kapsasın. Bu durumda (X,x) dan (P,P_O)'a taban noktalarını koruyan sürekli tasvirlerin U'ya kısıtlanmış olanların cümlesini A(U) ile gösterelim. A(U), A(X)'ın bir alt grubu olduğu açıktır. $f\varepsilon$ A(U) olmak üzere taban noktasına göre homotop tasvirlerin cümlesi A'_X, A_X ın alt grubunu oluşturur. O halde $A'=\bigvee_{x\varepsilon X} A'_X$, X üzerinde $\Pi'= \Pi \mid A'$ tabii projeksiyonlu bir cümledir.Girişteki anlamda gösterilebilirki $A'=(A', \Pi')$ bir demettir.

ve A nın bir alt demetidir.

A nın bir alt demetini şu şekilde de tanımlayabiliriz[3]:

<u>Tanım:2.1.</u> A,X üzerinde (P,P_0) topolojik grubun oluşturduğu abel grupların bir demeti ve $A' \subset A$ açık bir cümle olsun. A' ne alt grupların bir demeti denir, eğer

i) $\Pi(A')=X$

ii) Her bir $x \in X$ noktası için A'_x sapı, A_x ın bir alt grubu ise.

III. ESAS GRUP VE NORMAL ALTGRUPLARI:

X de bir eğri $\alpha(t)$: $I \rightarrow X$ sürekli tasvirdir. Burada $I=[0,1]$ kapalı aralığıdır. $\alpha_1, \alpha_2 \subset X$ eğrilerinin başlangıç ve bitim noktaları ortak olsun. Yani

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0), \alpha_1(1) = \alpha_2(1).$$

$\alpha(t,u)$: $I \times I \; I \rightarrow X$ sürekli tasvirine α_1 in α_2 ye deformasyonu denir, eğer $\alpha(t,0)=\alpha_1$, $\alpha(t,1)=\alpha_2$ ise. Böyle bir deformasyon var ise, α_1, α_2 ye homotoptur denir ve $\alpha_1 \sim \alpha_2$ yazılır. Bu şekilde tanımlanan homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır[1].

$x_0 \varepsilon X$ keyfi sabit bir nokta olsun. Eğer $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0$ ise, $\alpha(t)$ X de başlangıç ve bitim noktası x_0 da olan kapalı bir eğridir. Bu şekildeki eğriler arasında tanımlanan "$\sim$" homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısı olup, eşdeğerlik sınıfları homotopi sınıfları olarak adlandırılır. α nın homotopi sınıfını $[\alpha]$ ile gösterirsek, bütün homotopi sınıfların cümlesi çarpım işlemi ile birlikte bir gruptur. Bu gruba X ın x_0 'a göre esas grubu denir. Ayrıca, X irtibatlı olduğundan bu grup x_0 ın seçilişinden bağımsızdır. Eğer $x_1 \varepsilon X$ bir başka nokta ise, x_1 e göre elde edilen esas grup, x_0 daki esas gruba izomorfiktir[1]. X ın esas grubunu F ile gösterelim.

α, X üzerinde başlangıç noktası keyfi sabit $\alpha(0)=x_0$ olan bir eğri olsun. $\alpha^* : I \rightarrow A$ eğrisi α yı örter, veya α, α^* a kaldırılmış, veya

α^*, α nın bir kaldırması, veya α^*, α nın sürekli devamıdır denir, eğer

$\forall t \varepsilon I$ için $\Pi(\alpha^*) = \alpha$ ise[6].

Teorem:3.1. Başlangıç noktası x_0 da olan her α eğrisinin, başlangıç noktası $\sigma \varepsilon A_{x0}$ da olan α^* kaldırması varsa birtektir.

İspat: $\tau \varepsilon [0,1]$ olmak üzere $\alpha([0,\tau])$ eğrisi, $\sigma \varepsilon A_{x0}$ başlangıçlı $\alpha^*([0,\tau])$ eğrisine bir tek kaldırılabilen bütün τ'ların cümlesi E olsun. $0 \varepsilon E$ olduğundan $E \neq \emptyset$ dur. $\tau \varepsilon E$ alalım. A tam olduğundan $\alpha(\tau)$' nun tamamen örtülen $V \subset X$ komşuluğu belirlenebilir. $\varepsilon > 0$ çok küçük bir sayı olmak üzere $\alpha([\tau, \tau+\varepsilon]) \subset V$ dir. $\alpha^*(\tau)$, $\Pi^{-1}(V)$ nın bir V^* bileşenine aittir. $\Pi: V^* \rightarrow V$ topolojik tasvir olduğundan $\alpha^*([0,\tau])$'in $\alpha^*([\tau,\tau+\varepsilon])$' a genişletmenin bir tek yolu vardır. Böylece E rölatif (I ya göre) açıktır. Benzer şekilde gösterilebilirki E nin tümleyeni de açıktır. O halde $E=[0,1]$ dir.

Böylece A, X ın tam regüler örtü uzayıdır, öyleki eğer α başlangıç noktası $x_0 \varepsilon X$ olan X de herhangi bir eğri ve σ, Ax_0 ın herhangi bir noktası ise, α, x_0 üzerindeki σ başlangıç noktalı A da α^* a bir tek olarak kaldırılabilir.

Ayrıca $\sigma = s(x)$ den geçen α^*, $s(X)$ de bulunur ve $s(X)$ ile bir tek olarak belirlenir. $\sigma = s(x_0)$ da $\alpha^* = s(\alpha)$ yazarız öyleki $\Pi(\alpha^*) = \alpha$.

$\alpha \subset X, x_0$ noktasında kapalı bir eğri olsun. Eğer α boyunca sürekli devamı $\sigma \varepsilon A_{x0}$ noktasında kapalı bir eğri ise, bu durumda α ya homotop herhangi bir kapalı eğri içinde Monodromi Teoremi'nden dolayı $\sigma \varepsilon A_{x0}$ da kapalı bir eğri vardır. Bu yapılanlar α^{-1} için, α_1, α_2 için elde edilmiş ise, $\alpha_1\alpha_2$ içinde elde edilir. O halde σ da sürekli devamı kapalı α^* eğrisi olan $[\alpha]$ homotopi sınıfları $D \subset F$ alt grubunu oluşturur. $\sigma = s(x_0)$ da $s(D) = D^*$ bir tek şekilde yazılır. D^*, D ye izomorfik olup, $\Pi(D^*) = D$ dir.

Şimdi kabul edelimki D, D_1 alt grupları sırasıyla (A, σ) ve (A, σ_1), σ, $\sigma_1 \varepsilon A_{x0}$ ile belirlenmiş olsun. σ yı σ_1 e A da a* ile birleştirelim. $\Pi(a^*)=a$ $\alpha X, x_0$ da kapalı bir eğridir. X de x_0 dan geçen kapalı bir α_1 eğrisi verildiği taktirde α_1, σ_1 den geçen kapalı bir eğri belirtir, ancak ve ancak a $\alpha_1 a^{-1}$, σ dan geçen bir kapalı eğri belirtiyorsa. Böylece D_1, a $\alpha_1 a^{-1}$, $\alpha_1 \varepsilon D$ eğrilerin bütün homotopi sınıflarından oluşmuş olup, D nin F de bir konjuge alt grubudur.

Karşıt olarak, eğer $D_1=a^{-1}Da$ ise, bu durumda D_1, $(A, \sigma_1)'$ e karşı gelir. Burada σ_1, x_0 dan geçen a boyunca sürekli devamı olan a* ın A_{xo} üzerindeki başlangıç noktasıdır. D_1 ise, σ_1 deki $s_1(D_1)=D_1^*$' a bir tek olarak kaldırılmıştır. O halde D,F nin bir normal alt grubu ise, bu durumda $D_1=D=a^{-1}Da$ öyleki $D_1^* \equiv D$ ve D nin konjuge alt grupları ile X üzerindeki kesitler arasında bire-bir karşı gelme vardır öyleki bu karşı gelme $\Upsilon(X,A)$ nın bir $\Upsilon(X,A')$ alt grubunu teşkil eder. O halde, eğer D,F nın normal alt grubu ise, bu durumda örtü dönüşümlerinin T' alt grubu altında değişmeyen $D=a^{-1}Da$, x_0 da $a \notin D$ kapalı eğrilerin tanımladığı kesitlerin belirlediği $\Upsilon(X,A')$ ne izomorfiktir.

Şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem:3.2. A' alt demetinin esas grubu, F nın normal D alt grubuna veya F de $a^{-1}Da$ konjuge alt grubuna izomorfiktir.

Teorem:3.3. $\Upsilon(X,A') \cong F/D$

İspat: F/D nın her bir Da=aD yan cümlesi σ_1 den gçen kesit ile $\sigma_1 \varepsilon A'_x \subset A_x'$ i bir tek şekilde belirler.

Böylece F nın normal alt grupları vasıtasıyla belirlenen A' regüler alt örtü uzayları X ın normal örtü uzayı olarak adlandırılır.

Şimdi, eğer D_1, $D_2 \subseteq$ F iki normal alt grup ve A'_1 , A'_2 bunlara sırasıyla karşı gelen alt demetler ise, bu durumda açıkça $A'_1 \subset A'_2$ ancak ve ancak $D_1 \subseteq D_2$.

O halde F nın normal alt grupları ile belirlenen A nın alt demetleri nin ailesi, kısmı sırılıdır ve her zincir ailede bir üst sınıra sahiptir. Böylece Zorn Lemma'sından bir maksimal alt demet vardır öyleki bu demet A demetidir. A demeti şüphesiz en küçük D normal alt gruba karşı gelir. Böylece D=[F,F] ,F nın komutatör alt grubudur. O halde şu teoremi verebiliriz:

<u>Teorem:3.4.</u> $\Upsilon(X,A) \cong F/[F,F]$.

Tanım:3.1. A,[F,F] ile belirlenen normal örtü uzayı ise, F/[F,F] ye X ın Homoloji grubu, A ya da Homoloji örtü uzayı denir.

KAYNAKLAR

[1] Spainer,E.H, Algebraic Topology, Mc.Graw-Hill publishing Company Ltd.New Delhi 1976.

[2] Yıldız,C. Topolojik Uzaylar Üzerinde Topolojik Grubun Oluşturduğu Grupların Demeti, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 1990.

[3] Gunning,R.C.-Rossi,H., Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall,İnc.Englewood Cliffs.NT 1965.

[4] Tennison, B.R., Sheaf Theory,Cambridge Uni.Prees 1975.

[5] Munkres, J.R.,Topology,Prentice -Hall İnc.Englewood Cliffs. New Jersey 1975.

[6] Uluçay.C. On Homology Covering Spaces and Sheaf Associated to the Homology Group. Fac. Sci. Üniv. Ankara Sêr A_1: Mathematiques 1984.

[7] Balcı, S., On the Restrictid Sheaf, Comm. Fac. Sci. Üniv. Ankara Sêr A_1: Mathematiques. 1989.

[8] On the Homology Group of the Complex Analytic Manifolds. Comm. Fac. Sci. Üniv. Ankara Sêr A_1: Mat. 1989.