Erc.Üniv.Fen Bil.Derg., 6,1-2 (1990), 928-935

E^n DE (k+1)- REGLE YÜZEYLERİN BLASCHKE İNVARYANTLARI ÜZERİNE

Sadık KELEŞ, Recep ASLANER
İnönü Üniversitesi MALATYA

ÖZET

Bu çalışmada n- boyutlu Öklid uzayı E^nde 2- regle yüzeyler için tanımlanan Blaschke invaryantı [3], asli ışın yüzeyleri için tanımladığımız, asli Blaschke İnvaryantları cinsinden (k+1)-regle yüzeylere genelleştirildi. Ayrıca $E_k(t)$ doğrultman uzayında alınan bir e(t) birim vektörünün oluşturduğu 2- regle yüzeyin Blaschke İnvaryantı için bir ifade elde edildi. Son olarak bütün bu halleri ihtiva eden bir de örnek verildi.

ON THE BLASCHKE INVARIANTS OF (k+1)-RULED SURFACES IN E^n

SUMMARY

In this work the blaschke invariant which is defined for 2-ruled surfaces in n-dimensional Euclidean space E^n is generalized to (k+1)-ruled surfaces in terms of the Pirincipal Blaschke Invariants, which are defined by use of the pirincipal line surfaces. In additon to this, we have obtained a statement for 2-ruled surfaces generated by an unit vector e(t) of the generator space $E_k(t)$. Finally an example including all the cases above is given.

1. GİRİŞ:

E^n , n-boyutlu Öklid uzayında diferensiyellenebilir bir,

$$\eta : I \longrightarrow E^n, \quad I \subset IR$$

eğrisi ve η eğrisinin her noktasında tanımlı olan k-boyutlu bir,

$$E_k(t)=Sp\{e_1(t), \dots ,e_k(t)\} \subset T_E n(\eta(t)), \qquad 1\leq n \leq n\text{-}2, \qquad (1.1)$$

altuzayı verilmiş olsun. $E_k(t)$ altuzayı η eğrisi boyunca hareket ederken E^n de (k+1)-boyutlu bir yüzey meydana gelir. Bu yüzeye **"(k+1)-regle yüzey"** adı verilir. Bir (k+1)-regle yüzey $G=IXR^k$ bölgesinden E^n ye

$$\varphi(t,x_1,\dots,x_k)=\eta(t)+\sum_{\upsilon=1}^{k} x_\upsilon e_\upsilon(t) \qquad (1.2)$$

dönüşümü ile tanımlanır. ve genellikle Φ ile gösterilir. Burada η eğrisine Φ'nin **"dayanak eğrisi"** $E_k(t)$ altuzayına da Φ'nin **"doğrultman uzayı"** veya kısaca **"doğuranı"** denir.

$$A(t)=Sp\{e_1(t), \dots ,e_k(t),\dot{e}_1(t), \dots ,\dot{e}_k(t)\} \tag{1.3}$$

uzayına Φ'nin $E_k(t)$ ye göre **"asimptotik demeti"** denir. $0\leq m\leq k$ olmak üzere boy$A(t)=k+m$ dir. O halde $A(t)$ için bir ortonormal baz bulunabilir. Doğrultman uzayının doğal taşıyıcı bazı adı verilen $\{e_1,\dots,e_k\}$ bazı verildiğinde $A(t)$ nin bazı tek türlü bellidir ve bu baz;

$$\{e_1, \dots ,e_k,a_{k+1}, \dots ,a_{k+m}\} \tag{1.4}$$

ile gösterilir.

$$T(t)=Sp\{e_1 ,\dots ,e_k,\dot{e}_1, \dots ,\dot{e}_k,\dot{\eta}\} \tag{1.5}$$

uzayına Φ'nin $E_k(t)$ ye göre **"teğetsel demeti"** denir. Φ'nin teğetsel demeti için, $k+m \leq$ boy$T(t) \leq k+m+1$, eşitsizliği geçerlidir. Eğer boy$T(t)=k+m$ ise, bu taktirde Φ (k+1)-regle yüzeyi,$K_{k-m}(t) \subset E_k(t)$ ile gösterilen ve Φ'nin **"kenar uzayı"** adı verilen bir (k-m) boyutlu altuzaya sahiptir [1].

Eğer boy$T(t)=k+m+1$ ise teğetsel demet için,

$$\{e_1, \dots ,e_k,a_{k+1}, \dots ,a_{k+m},a_{k+m+1}\} \tag{1.6}$$

şeklinde bir ortonormal baz vardır. Bu halde ise Φ, $Z_{k-m}(t) \subset E_k(t)$ ile gösterilen ve Φ'nin **"merkez uzayı"** adı verilen bir (k-m)-boyutlu altuzaya sahiptir [1].

$E_k(t)$ doğrultman uzayı η eğrisi boyunca Φ (k+1)-regle yüzeyini oluştururken $K_{k-m}(t)$ kenar uzayı da [veya $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı da] aynı eğri boyunca bir (k-m+1)-regle yüzey meydana getirir. Bu regle yüzeye Φ'nin "**kenar** (veya merkez) **regle yüzeyi**" denir ve Ω ile gösterilir [1].

E^n de Ω merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ olsun. I aralığı üzerinde m sayısının sabit olduğunu kabul edelim. Her $t\in I$ için asimptotik demetin (1.4) ortonormal bazını teğetsel demetin (1.6) ortonormal bazına bunu da E^n in;

$$\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \dots, a_n\} \qquad (1.7)$$

ortonormal bazına tamamlayalım. Bu baz vektörleri için aşağıdaki türev denklemleri geçerlidir.

$$\dot{e}_\sigma = \sum_{\upsilon=1}^{k} \alpha_{\sigma\upsilon} e_\upsilon + \kappa_\sigma a_{k+\sigma} \qquad , \kappa_\sigma > 0,\ 1 \le \sigma \le m,$$

$$\dot{e}_{m+\rho} = \sum_{\upsilon=1}^{k} \alpha_{(m+\rho)\upsilon} e_\upsilon \qquad 1 \le \rho \le k-m,$$

$$\dot{a}_{k+\sigma} = -\kappa_\sigma e_\sigma + \sum_{f=1}^{m} \tau_{\sigma f} a_{k+f} \omega_\sigma a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \upsilon_{\sigma\lambda} a_{k+m+\lambda}, \qquad (1.8)$$

$$\dot{a}_{k+m+1} = -\sum_{f=1}^{m} \omega_f a_{k+f} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda},$$

$$\dot{a}_{k+m+\zeta} = -\sum_{f=1}^{m} \omega_{\zeta f} a_{k+f} + \beta_\zeta a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{\zeta\lambda} a_{+m+m+\lambda},$$

$(\alpha_{\upsilon\mu}' = -\alpha_{\mu\upsilon}$, $\tau_{\sigma f} = -\tau_{f\sigma}$, $\beta_{\zeta\lambda} = -\beta_{\lambda\zeta}$, $\omega_{\zeta f} = -\upsilon_{\lambda\sigma}$, $1 \le \mu \le k$, $2 \le \zeta \le n-k-m)$
ve

$$\dot{\eta} = \sum_{\upsilon=1}^{k} \zeta_\upsilon e_\upsilon + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \quad , \quad \eta_{m+1}' \ne 0 \ . \qquad (1.9)$$

1.1 Tanım:
Ω merkez regle yüzeyli (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Φ'nin Ω merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi boyunca;

$$E_m(t) = Sp\{e_1(t), \dots, e_m(t)\}$$

altuzayının oluşturduğu (m+1)-regle yüzeye Φ'nin **"asli regle yüzeyi"** denir [2]. η eğrisi boyunca $E_1(t)=Sp\ \{e_i(t)\}$, $1\leq i \leq m$ ana doğrularının oluşturduğu m-tane 2-regle yüzeye Φ'nin **"asli ışın yüzeyleri"** denir,

$$\varphi(t,x)= \eta(t)+xe_i(t) , \qquad (t,x) \in IR^2 \qquad (1.10)$$

dönüşümü ile tanımlanır ve Φ_i , $1\leq i \leq m$, ile gösterilir [2].

Eğer Φ k+1)-regle yüzeyi silindirik (yani m=0) ise, bu taktirde Φ regle yüzeyinin asli ışın yüzeyi yoktur.

2. E^n DE (k+1)-REGLE YÜZEYLERİN BLASCHKE İNVARYANLARI

2.1 Tanım:

E^n de silindirik olmayan (m>0), dayanak eğrisi η(t) ve doğrultman uzayı E(t)=Sp {e(t)} olan 2-regle yüzey Φ için $b= \zeta/\kappa$ değerine Φ'nin **"Blaschke İnvaryantı"** denir [3].

Şimdi E^n deki (k+1)-regle yüzeyler için i-yinci Asli Blaschke İnvaryantının tanımını verelim.

2.2 Tanım:

$\Phi\subset E^n$ (k+1)-regle yüzeyi verilsin. Φ'nin asimptotik demetinin boyutu (k+m) olmak üzere; $b_i=\zeta_i/\kappa_i$ $1\leq i \leq m$, değerine Φ'nin **"i-yinci asli Blaschke İnvaryantı"** denir.

Asli Blaschke İnvaryantlarından yararlanarak Φ (k+1)-regle yüzeyinin Blaschke İnvaryantını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

2.3 Tanım:

$\Phi\subset E^n$ (k+ 1)-regle yüzeyinin asli Blaschke İnvaryantları b_i, $1\leq i \leq m$, ler olmak üzere ;

$$B=\sqrt[m]{|b_1 ... b_m|} \qquad (2.1)$$

değerine Φ'nin **"Blaschke İnvaryantı"** denir

Özel olarak k=1 alınırsa Tanım 2.1 elde edilir.
Böylece aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

2.4 Sonuç:

$\Phi\subset E^n$, Ω merkez regle yüzeyli(k+1)-regle yüzey olsun. Φ'nin asli dağılma parametreleri ile Blascheke İnvaryantı arasında

$$B=\frac{1}{\eta_{m+1}}\sqrt[m]{\left|\prod_{i=1}^{m}\varsigma_i\delta_i\right|} \tag{2.2}$$

eşitliği vardır.

İspat:

Φ'nin asli dağılma parametreleri [1] de $\delta_i=\frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i}$, $1\leq i\leq m$, olarak tanımlandığından

$$\kappa_i=\frac{\eta_{m+1}}{\delta_i} \qquad \Rightarrow \qquad b_i=\frac{1}{\eta_{m+1}}\zeta_i\delta_i$$

olur. Bu değer (2.1) de yerine yazılırsa (2.2) elde edilir.
m=k olması halinde, Φ'nin Ω merkez regle yüzeyi Φ'nin sitriksiyon çigisine bozulur. Bu durumda Φ'nin doğrultman uzayında bulunan 1-boyutlu bir E(t)=Sp {e(t)} altuzayının oluşturduğu 2-regle yüzeyi ψ ile gösterelim. Burada,

$$e(t)\varepsilon Sp\{e_1(t), \dots ,e_\kappa(t)\} \qquad \|e(t)\|=1$$

$$e(t)=\sum_{\upsilon=1}^{k}\cos\theta_\upsilon e_\upsilon(t),\ \sum_{\upsilon=1}^{k}(\cos\theta_\upsilon)^2=1,\quad \theta_\upsilon = \text{sabitdir.} \tag{2.3}$$

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.5 Teorem:

$\psi\subset\Phi$, 2-regle yüzeyinin Blschke İnvaryantı,

$$b=\frac{\sum_{\upsilon=1}^{k}\zeta_\upsilon\cos\theta_\upsilon}{\sqrt{\sum_{\upsilon=1}^{k}\left[\left(\sum_{\upsilon=1}^{k}\cos\theta_\upsilon\alpha_{\upsilon\mu}\right)^2+(\kappa_\mu\cos\theta_\mu)^2\right]}}, \tag{2.4}$$

dir.

İspat: (1.9) ve (2.3) den

$$\zeta = \langle \dot{\eta}, e \rangle$$

$$\zeta = \langle \sum_{\mu=1}^{k} \zeta_\mu e_\mu + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, \sum_{\upsilon=1}^{k} \cos\theta_\upsilon e_\upsilon \rangle$$

$$\zeta = \sum_{\mu=1}^{k} \zeta_\mu \sum_{\upsilon=1}^{k} \cos\theta_\upsilon \langle e_\mu, e_\upsilon \rangle, \qquad \langle e_\mu, e_\upsilon \rangle = \delta_{\mu\upsilon} \quad , \mu=\upsilon \text{ için}$$

$$\zeta = \sum_{\upsilon=1}^{k} \zeta_\upsilon \cos\theta_\upsilon \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.3) den t ye göre türev alınırsa;

$$\dot{e} = \sum_{\upsilon=1}^{k} \cos\theta_\upsilon \dot{e}_\upsilon$$

$$= \sum_{\upsilon=1}^{k} \cos\theta_\upsilon \left(\sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\upsilon\mu} e_\mu + \kappa_\upsilon a_{k+\upsilon} \right) = \sum_{\upsilon=1}^{k} \cos\theta_\upsilon \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\upsilon\mu} e_\mu + \sum_{\upsilon=1}^{k} \cos\theta_\upsilon \kappa_\upsilon a_{k+\upsilon}$$

bulunur. Buradan;

$$\| \dot{e} \| = \sqrt{ \sum_{\mu=1}^{k} \left[\left(\sum_{\mu=1}^{k} \cos\theta_\upsilon \alpha_{\upsilon\mu} \right)^2 + (\kappa_\mu \cos\theta_\mu)^2 \right] } \tag{2.6}$$

bulunur. (2.5) ve (2.6) dan (2.4) elde edilir.

2.6.Örnek:

5-boyutlu öklid uzayı E^5 de κ, u, $\varepsilon = \sqrt{\kappa^2 + u^2} \neq 0$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$\eta(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\kappa \sin\varepsilon t,\ \sin\varepsilon t,\ -\varepsilon\cos\varepsilon t,\ -\cos\varepsilon t - u\sin\varepsilon t)$$

ile tanımlanan $\eta : I \longrightarrow E^5$ ve η eğrisinin her noktasında tanımlı olan;

$$e_1(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\kappa^2\cos\varepsilon t + u^2\ ,\ 0\ ,\ \varepsilon\kappa\sin\varepsilon t,\ 0\ ,\ -\kappa u\cos\varepsilon t + \kappa u)$$

$$e_2(t) = (0\ ,\ \cos\varepsilon t,\ 0\ ,\ \sin\varepsilon t,\ 0\ )$$

olmak üzere $E_2(t)=Sp\{e_1(t), e_2(t)\}$ altuzayı verilmiş olsun. Bu taktirde

$$\varphi(t,x_1,x_2)=\eta(t)+\sum_{\upsilon=1}^{2} x_\upsilon e_\upsilon(t)$$

dönüşümü E^5 de bir Φ 3-regle yüzey tanımlar. Φ'nin $E_2(t)$ doğrultman uzayının $\{e_1,e_2\}$ ortonormal bazı E^5 'in $\{e_1,e_2,a_3,a_4,a_5\}$ ortonormal bazına aşağıdaki şekilde tamamlanabilir.

$$a_3=\frac{1}{\varepsilon}\,(-\kappa\sin\varepsilon t,\ 0\ ,\ \varepsilon\cos\varepsilon t,\ 0,\ u\sin\varepsilon t)$$

$$a_4=\ (\ 0\ ,\ -\sin\varepsilon t,\ 0\ ,\ \cos\varepsilon t,\ 0)$$

$$a_5=\frac{1}{\varepsilon^2}\ (\kappa u\cos\varepsilon t-\kappa u,\ 0\ ,\ \varepsilon u\sin\varepsilon t,\ 0\ ,\ -u^2\cos\varepsilon t-\kappa^2).$$

buradan türev denklemleri yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1&= \kappa a_3\\
\dot{e}_2&= \varepsilon a_4\\
\dot{a}_3&=-\kappa e_1 + \varepsilon u a_5\\
\dot{a}_4&= \varepsilon e_2\\
\dot{a}_5&= \varepsilon u a_3\\
\dot{\eta}&= \kappa e_1 + e_2 + \varepsilon u a_5
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre Φ 3-regle yüzeyi $p=2\pi/\varepsilon$, periyotlu basit kapalıdır. Φ'nin i-yinci asli Blaschke İnvaryantları;

$$b_1=1\ ,\ b_2=\frac{1}{\varepsilon}$$

ve Φ'nin i-yinci asli dağılma parametreleri ise;

$$\delta_1 = \varepsilon u/\kappa \ , \ \delta_2 = u$$

dur.O halde Φ'nin Blaschke İnvaryantı ve dağılma parametreleri sırasıyla,

$$B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{ve} \qquad \delta = u\sqrt{\varepsilon/\kappa}$$

olur. Ayrıca doğrultman uzayı

$$E(t) = Sp\{e(t)\} \qquad , \qquad e(t) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \ ,$$

olan $\psi \subset \Phi$ regle yüzeyin Blaschke İnvaryantı da

$$b = \frac{\kappa\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{\kappa^2 + u^2\sin^2\theta}}$$

dır.

KAYNAKLAR

[1] Frank, H. und Giering, O. "Verallgemeinerte Regelflachen" Math. Zeit. 150, 261-271, 1976.

[2] Frank, H. und Giering, O "Regelflachen mit Zentralrachen" Math. Österr. Akad. Wiss.Wien, Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II. 187, 139-163, 1978.

[3] Frank, H. und Giering, O. "Verallgemeinerte Regelflachen" im Grassen II. "Journal of Geometry Voll. 23. 1984.