Erc.Üniv.Fen Bil.Derg., 6,1-2 (1990), 965-975

HOLOMORFİK FONKSİYON HALKASININ SPEKTRUMLARI ÜZERİNE

Nurhayat İSPİR, İ.Kaya ÖZKIN
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ANKARA

ÖZET

R ve S açık Riemann yüzeyleri, X, Y sırası ile R, S nin boş olmayan alt cümleleri olsun. H(X) ve H(Y) sırası ile X ve Y üzerindeki tüm holomorfik fonksiyonların halkalarını göstersin. Sabitleri sabitlere dönüştüren H(Y) den H(X) e bir Φ izomorfizmini c- izomorfizmi olarak isimlendirelim. Φ, H(Y) den H(X) e bir c- izomorfizmi ise, ϕ nin X ten Y ye bir bire-bir analitik dönüşüm olduğu bilinmektedir [5], [3], [6]. Buna göre H(X) in bir R* alt-halkasının c-homomorfizmi altında bir H(Y) halkasının homomorf görüntüsü olması için gerek ve yeter koşul,

$$R^* = R_\phi = \{g \circ \phi \mid \phi : X \to Y \text{ analitik}, \ g \in H(Y)\}$$

olmasıdır. Açık olarak, R_ϕ, C ile gösterilen tüm sabit fonksiyonlar cümlesini kapsar.

Φ, ϕ ve R_ϕ arasındaki bağıntılar Teorem A-G de verilmiştir. Holomorfik fonksiyonlar halkasının spektrumu ile ilgili sonuçlar Teorem 1-4 de ifade edilmiş olup, burada nokta-değerlendirme dönüşümleri olan R_ϕ nin spektrumundaki homomorfizmlerin $\phi(X) \subseteq Y$ nin noktaları ile bire-bir eşlemede olduğu, nokta-değerlendirme dönüşümü olmayanların da Y- ϕ(X) in noktaları ile bire-bir eşlemede olduğu gösterilmiştir.

ON THE SPECTRUM OF RINGS OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

SUMMARY

In this paper R and S will donete open Riemann sufaces, and X and Y will be non-empty subsets of R and S, respectively. The ring of all holomorphic functions on X and Y will be denoted by H(X) and H(Y), respectively. Let Φ be a c-isomorphism of H(Y) onto H(X) which maps constant functions onto themselves. If Φ is a c-isomorphism, it is well known that there is a one-to one analytic mapping ϕ of X onto Y [5], [3], [6]

This paper is concorned with proper subrings R* of H(X) which are c-isomorphic images of H(Y). The ring R* has the form

$$\{g \circ \phi \mid \phi : X \to Y \text{ analytic map}, \ g \in H(Y)\}$$

and will be denoted by R_ϕ.

Relations between ϕ, R_ϕ and the spectrum of R_ϕ are given in the following set of theorems.

I. Φ, ϕ ve R_ϕ Arasındaki Bağıntılar

Teorem A. , ϕ, X ten Y ye bir analitik dönüşüm olsun. Eğer $\Phi(g) = go\phi$ olarak tanımlanan $\Phi: H(Y) \rightarrow H(X)$ dönüşümü için $\Phi(H(Y)) = R_\phi$ ise, bu durumda aşağıdaki üç koşul eşdeğerdedir.

(i) R_ϕ, sabit fonksiyonların C cümlesini öz olarak kapsar

(ii) ϕ, sabit fonksiyon değildir.

(iii) H(Y), R_ϕ ye izomorftur.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): $C \not\subsetneq R_\phi$ ve ϕ sabit olsun. Bu durumda $\phi(X) = \{c\}$ ise, $g \in H(Y)$ için $\Phi(g) = g(c)$ dir ve böylece $R_\phi = \Phi(H(Y)) = C$ bulunur. Bu ise kabulümüze aykırıdır. O halde ϕ sabit olamaz.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): ϕ sabit olmasın. Bu durumda $\phi(X)$ ve Y yi kapsayacak şekilde S de bir U açık cümlesi alabiliriz. U da holomorfik F ve G fonksiyonlarını seçersek $f = F|\phi(X)$, $g = G|\phi(X)$ fonksiyonları $\phi(X)$ de holomorfik H(Y) ye ait iki fonksiyondur. $\Phi(f)-\Phi(g)=\Phi(f-g)=(f-g)o\phi$ olduğundan f-g, $\phi(X)$ de holomorfiktir. Eğer $\Phi(f) = \Phi(g)$ varsayarsak $f = g$ dir ve Φ bir bire-bir homomorfizmdir. Ayrıca $\Phi(H(Y)) = R_\phi$ olduğundan R_ϕ, H(Y) ye izomorftur.

(iii) $\Rightarrow$ (i): R_ϕ, H(Y) ye izomorf olsun. Bu durumda H(Y) sabit olmayan bir g fonksiyonu içerdiğinden [2] $R_\phi \neq C$ dir. Çünkü bir c sabit fonksiyonu için $\Phi(g) = c$ olsaydı, $\Phi^{-1}(c) = \{c, g\}$ olurdu. Bu ise Φ nin bire-bir olmasına aykırıdır.

Sonuç olarak H(X) in herhangibir R^* althalkasının H(Y) ye c- izomorf olması için gerek ve yeter koşul $R^* = \{go\phi: g \in H(Y), \phi$, X ten Y içine analitik$\}$ olması R^* ın X üzerindeki sabit fonksiyonların C cümlesini öz olarak kapsamasıdır.

Teorem B. ϕ, X ten Y içine bire-bir analitik bir dönüşüm, λ, X ten Y içine sabit bire-bir olmayan bir analitik dönüşüm, $g \in H(Y)$ için $\Phi(g)$

$= gof$, $\Lambda(g) = go\lambda$ ve $\Phi(H(Y)) = R_\phi$, $\Lambda(H(Y)) = R_\lambda$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R_ϕ ve R_λ izomorfturlar. Fakat $R_\phi \neq R_\lambda$ dır.

<u>İspat:</u> Λ ve Φ, H(Y) den R_ϕ ve R_λ ya izomorfizmler olduğundan $\Lambda o \Phi^{-1}$, R_ϕ den R_λ ya bir izomorfizmdir. O halde $R_\phi \neq R_\lambda$ olduğunu gösterelim. Aksine $R_\phi = R_\lambda$ olsun Bu durumda $g \in H(Y)$ ve $z \in X$ için $(go\phi)(z) = c$ olacak biçimde bir $h \in H(Y)$ vardır. ϕ bire-bir ve H(Y), Y nin noktalarını ayırdığından [1] $z_1 \neq z_2$, z_1, $z_2 \in X$ ve bir $g \in H(Y)$ için $(go\phi)(z_1) \neq (go\phi)(z_2)$ dir. Fakat λ bire-bir olmadığından $(go\phi)(z_1) = (ho\lambda)(z_1) = (ho\lambda)(z_2) = (go\phi)(z_2)$ bulunur. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Bir X cümlesi üzerindeki bir A fonksiyon cebirinin sahip olduğu (α), (β), (γ) özellikleri [4] Royden tarafından verilmiştir. Buna göre, Y nin S açık Riemann yüzeyinin boş olmayan bir altcümlesi olması durumunda H(Y) holomorfik fonksiyonlar cebiri aşağıdaki üç özelliği sağlar.

(α^*) $f \in H(Y)$ ve her $z \in Y$ için $f(z) \neq 0$ ise $1/f \in H(Y)$ dir.

(β^*) H(Y) nin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ elemanlarının ortak sıfırı yoksa, bu durumda $f_1e_1 + \ldots + f_ne_n = 1$ olacak biçimde H(Y) de $e_1, \ldots, e_n$ fonksiyonları vardır.

(γ^*) Eğer $f \in H(Y)$ ve $f \not\equiv 0$ ise, bu durumda H(Y) de öyle bir $\{f_1, \ldots, f_n\}$ fonksiyon dizisi vardır ki, $x \neq y$ ve $f(x) = f(y) = 0$ için $f_i(x) \neq f_i(y)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dir. Yani $i = 1, \ldots, n$ için f_i ler f nin sıfırlarını ayırır.

R_ϕ nin (α^*), (β^*), (γ^*) özelliklerini hangi koşullar altında sağlayacağını inceleyelim.

<u>Teorem C.</u> Eğer ϕ, X ten Y üzerine bir analitik dönüşüm ise, bu durumda R_ϕ, (β^*) özelliğini sağlar.

<u>İspat.</u> $f_1, \ldots, f_n \in R_\phi$ olsun ve $i = 1, \ldots, n$ için f_i lerin hiçbir ortak sıfırı

bulunmasın. Burada $i = 1,\ldots,n$ için $f_i = \Phi(h_i), h_i \in H(Y)$ dir. $a \in Y$ için $h_i(a) = 0$, $i = 1,\ldots,n$ olduğunu varsayalım. ϕ, X'i Y üzerine dönüştürdüğünden $\phi(z) = a$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda $i = 1,\ldots,n$ için $0 = h_i(a) = h_i(\phi(z)) = \Phi(h_i(z)) = f_i(z)$ olur. Bu çelişkiden $i = 1,\ldots,n$ için h_i lerin hiç bir ortak sıfırı yoktur. H(Y), (β^*) 1 sağladığından $h_1 e_1 + \ldots + h_n e_n = 1$ olacak biçimde H(Y) de $e_1,\ldots,e_n$ fonksiyonları vardır.

$1 = \Phi(f_1 e_1 + \ldots + h_n e_n) = f_1 \Phi(e_1) + \ldots + f_n \Phi(e_n)$ den R_ϕ de $f_1 \Phi(e_1) + \ldots + f_n \Phi(e_n) = 1$ olacak biçimde $\Phi(\bar{e}_i)$, $i = 1,\ldots,n$ fonksiyonları bulunmuş olur.

Teorem D. Eğer R_ϕ (α^*) özelliğini sağlıyor ve sabit fonksiyonların cümlesini öz olarak kapsıyorsa, bu durumda ϕ, X ten Y üzerinedir.

İspat. $a \in Y$ olsun. H(S), S üzerindeki tüm holomorfik forksiyonların cebiri olduğundan, $W \neq a$ için $G(a) = 0$ ve $G(W) \neq 0$ olacak biçimde bir $G \in H(S)$ fonksiyonu vardır [2].

$G|Y = g$ diyelim. Bu durumda $g(a)=0$ ve $a \neq W$ için $g(W) \neq 0$ dır. $\Phi(g) \in R_\phi$ olup bir $z \in X$ için $\Phi(g)(z) = g(\phi(z)) \neq 0$ dır. R_ϕ (a^*), sağladığından $\Phi(g).h = 1$, $h \in R_\phi$ dir. $k \in H(Y)$ için $h = \Phi(k)$ olduğundan $\Phi(g.k) = 1$ ve Φ bir izomorfizm olduğundan $g.k = 1$ dir. Buradan açık olarak $g(a).k(a) = 1$ dir. Bu ise $g(a) = o\ 0$ olması ile çelişkilidir. O halde her $z \in X$ için $g(\phi(z)) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\phi(z) = a$ dır ve ϕ, X ten Y üzerine bir analitik dönüşümdür.

Teorem E. Eğer ϕ, X ten Y içine bir bire-bir dönüşüm ise, bu durumda R_ϕ, (γ^*) özelliğini sağlar.

İspat. $f \in R_\phi$ ve $f \neq 0$ olsun. Bir $h \in H(Y)$ için $f = \Phi(h)$ dir ve h ın sıfır sabit fonksiyonu olmadığı açıktır. H(Y), (γ^*) özelliğine sahip olduğundan h ın sıfırlarını ayıracak şekilde H(Y) de $h_1,\ldots,h_n$ fonsiyonları vardır. $x \neq y$ ve $f(x) = f(y) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $h(\phi(x)) = h(\phi(y)) = 0$ ve ϕ bire-bir olduğundan $\phi(x) \neq \phi(y)$ dir. O halde $H(Y)$ de öyle h_i, $i = 1,\ldots,n$ fonksiyonları vardır ki, $h_i(\phi(x)) \neq h_i(\phi(y))$ veya $\Phi(h_i)(x) \neq \Phi(h_i)(y)$ dir. Açık olarak $\{\Phi(h_i): i = 1,\ldots,n\} \subset R_\phi$ dır.

Teorem F. R_ϕ nın X in noktalarını ayırması için gerek ve yeter koşul ϕ nin bire-bir olmasıdır.

İspat. R_ϕ nın X in noktalarını ayırdığını kabul edelim. Bu durumda x, $y \in X$ ve $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ olacak biçimde bir $f \in R_\phi$ vardır.

$f = \Phi(g) = go\phi$ olması $g(\phi(x)) \neq g(\phi(y))$ olmasını gerektirir. Eğer $\phi(x) = \phi(y)$ ise, her $g \in H(Y)$ için $g(\phi(x)) = g(\phi(y))$ olur. Bu çelişki ispatı tamamlar.

Karşıt olarak ϕ, X ten y içine bire-bir olsun. x, $y \in X$, $x \neq y$ için $\phi(x)$, $\phi(y) \in Y$ ve $\phi(x) \neq \phi(y)$ dir. $H(Y)$, Y nin noktaları ayırdığından bir $g \in H(Y)$ için $g(\phi(x)) \neq g(\phi(y))$ ve dolayısıyla $\Phi(g(x)) \neq \Phi(g(y))$ dir. $\Phi(g) \in R_\phi$ dir. o halde R_ϕ X in noktalarını ayırır.

Teorem G. (γ*) özelliğine sahip R_ϕ, C yi öz olarak kapsıyorsa, ϕ, X ten Y içine bir bire-bir dönüşümdür.

İspat. Teorem F den dolayı (γ*) özelliğine sahip $C \neq R_\phi$ nin X in noktalarını ayırdığını göstermemiz ispat için yeterlidir. $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. (γ*) özelliğinden, $f(x) = f(y) = 0$ olacak biçimde bir $0 \neq f \in R_\phi$ nin bulunması durumunda R_ϕ de öyle bir $\{f_1,\ldots,f_n\}$ cümlesi vardır ki, $i = 1,\ldots,n$ için bir f_i, $f_i(x) \neq f_i(y)$ özelliğini sağlar. $R_\phi \neq C$ olduğundan, R_ϕ de sabit olmayan bir g fonksiyonu vardır. Eğer $g(x) \neq g(y)$ ise, g, X in noktalarını ayırır.

$g(x) = g(y) = c$ olduğunu varsayalım. $c(x) = c$, R_ϕ ye ait olduğundan, $g-c$ de R_ϕ dedir ve $(g-c)(x) = (g-c)(y) = 0$ dır. Fakat g sabit olmadığından $g \neq c$ dir. O halde R_ϕ, (γ*) özelliğine sahip ise, $x \neq y$ için $h(x) \neq h(y)$ olacak biçimde bir $h \in R_\phi$ vardır. R_ϕ nın X in noktalarını ayırması ϕ nin bire-bir olmasını gerektirir.

II. ΣR_ϕ ve Y Arasındaki Bağıntı

Burada R ve S açık Rimann yüzeyleri ve X, Y sırası ile R, S nin boş olmayan alt cümleleridir. Şimdi bazı temel tanımları verelim. F herhengi bir cümle ve A, F üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların bir cebiri olsun. A dan kompleks sayıların ¢ cismi üzerine sıfırdan farklı, π, ¢-homomorfizmlerinin cümlesine <u>A nın spektrumu</u> denir ve <u>ΣA ile</u> gösterilir. Bir $x \in F$ noktası için A dan ¢ içine $\pi_x(f) = f(x)$ olarak tanımlanan π_x dönüşümüne <u>nokta değerlendirme</u> dönüşümü adı verilir. Açık olarak π_x bir ¢-homomorfizmidir. Yani π_x $(c) \in$ ¢ sabiti için $\pi_x(c) = c$ eşitliğini sağlayan bir homomorfizmdir.

ΣA nın $\{\pi_x : x \in F\}$ cümlesini kapsadığı açık olup, aynı zamanda $\Sigma H(X)$ tüm π_x nokta-değerlendirme dönüşümlerini içerir.

<u>**Teorem 1.**</u> ϕ, X ten Y içine bir analitik dönüşüm ve $R_\phi = \Phi(H(Y))$ olsun. Burada Φ, H(Y) den H(X) içine $g \in H(X)$ için $\Phi(g) = g \circ \phi$ ile tanımlı bir ¢-izomorfizmidir. Ayrıca M, $\Sigma H(X)$ ten ΣR_ϕ içine $M(\pi_x) = \pi_x | R_\phi$ olarak tanimlanan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(i) M nin bire-bir olması için gerek ve yeter koşul ϕ nin bire-bir olmasıdır.

(ii) M nin üzerine olması için gerek ve yeter koşul ϕ nin üzerine olmasıdır.

<u>**İspat.**</u> (i) Eğer ϕ bire-bir ise bu durumda R_ϕ, X in noktalarını ayırır. Teorem F. $\pi_x \neq \pi_y$ olsun. π_x ve π_y nin tanımından $x \neq y$ dir. Ayrıca R_ϕ, X in noktalarını ayırdığından $g(x) \neq g(y)$ olacak biçimde bir $g \in R_\phi$ vardır. O halde $\pi_x(g) \neq \pi_y(g)$ dir. Bu nedenle $g \in R_\phi$ için $\pi_x \neq \pi_y$ olduğundan $M(\pi_x) \neq M(\pi_y)$ dir ve dolayısıyla M bire-birdir.

Karşıt olarak M bire-bir olsun ϕ nin bire-bir olduğunu gösterelim. x, $y \in X$ ve $x \neq y$ olduğunu varsayalım. H(X), X in noktalarını ayırdığından $g(x) \neq g(y)$ olacak biçimde bir $g \in H(X)$ vardır. Böylece $\pi_x(g) \neq \pi_y(g)$

ve M bire-bir olduğundan $\pi_x = \pi_y$ dir. O halde $\pi_x|R_\phi = \pi_y|R_\phi$ olup R_ϕ X in noktalarını ayırır. Böylece ϕ bire-birdir. Teorem F.

Şimdi (ii) nin ispatını yapalım. Eğer $\pi \in \Sigma R_\phi$ ise, bu durumda π, R_ϕ den $\mathbb{C}$ ye bir c-homomorfizmi ve Φ, H(Y) den H(X) içine bir c-izomorfizmi olduğundan $\pi o \Phi \in \Sigma H(Y)$ dir. Dolayısıyla $\pi o \Phi = \psi_y$ olacak biçimde bir $y \in Y$ vardır ve $g \in H(Y)$ için $\psi_y(g) = g(y)$ dir. Burada $y \in \phi(X)$ ve $y \notin \phi(X)$ olmak üzere başlıca iki durum sözkonusudur.

Eğer $y \in \phi(X)$ ise, bu durumda bir $x \in X$ için $y = \phi(x)$ olup, her $g \in H(Y)$ için $\pi(\Phi(g)) = \psi_y(g) = g(y) = g(\phi(x)) = \Phi(g)(x)$ dir. O halde her $f = \Phi(g) \in R_\phi$ için $\pi(f) = f(x) = \pi_x(f)$ dir. Bu ise $M(\pi_x) = \pi$ demektir.

Eğer $y \notin \phi(X)$ ise, bu durumda bir $x \in X$ için $y \neq \phi(x)$ dir. $\phi(x) \in Y$, $y \in Y$ ve $y \neq \phi(x)$ olup, H(Y), Y nin noktalarını ayırdığından, $g(y) \neq g(\phi(x))$ olacakbiçimde bir $g \in H(Y)$ vardır. Böylece $\pi(\Phi(g)) \neq \Phi(g)(x)$ ve $\Phi(g) \in R_\phi$ bulunur. Bu nedenle $\pi \neq M(\pi_x) = \pi_x|R_\phi$dir.

Sonuç olarak, eğer $\pi \in \Sigma R_\phi$ ise, $\pi o \Phi = \psi_y \in \Sigma H(Y)$ dır. $\pi \in M(\Sigma H(X))$ olması için gerek ve yeter koşul $y \in \phi(X)$ olmasıdır. Eğer ϕ üzerine bir dönüşüm ise, bu durumda her $y \in Y$ için $y \in \phi(X)$, $y = \phi(x)$ dir. Böylece $\pi o \Phi = \psi_y$ olmak üzere $\pi = M(\pi_x)$ dir. Eğer ϕ üzerine bir dönüşüm değilse, bu durum da öyle bir $y \in Y - \phi(X)$ ve $\pi \in \Sigma R_\phi$ vardır ki, $x \in X$ için $\pi o \Phi = \psi_y$ ve $\pi \neq M(\pi_x)$ dir.

<u>**Teorem 2.**</u> R^*, H(X) in herhangibir alt halkası ve M, $M(\pi_x) = \pi_x|R^*$ olacak biçimde $\Sigma H(X)$ ten ΣR^* içine bir dönüşüm olsun. M nin bire-bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul R^* nin X in noktalarını ayırmasıdır.

<u>**İspat.**</u> M nin bire-bir olduğunu varsayalım. Eğer $\pi_x \neq \pi_y$ ise, $\pi_x|R^* \neq \pi_y|R^*$ olduğu açıktır. $x \neq y$ olduğunu kabul edelim. $x \to \pi_x$ dönüşümlü bire-bir $\pi_x|R^* \neq \pi_y|R^*$ olduğundan $\pi_x \neq \pi_y$ dir. O halde $\pi_x(f) \neq \pi_y(f)$ veya $f(x) \neq f(y)$ olacak biçimde bir $f \in R^*$ vardır. O halde R^*, X in noktalarını ayırır.

Karşıt olarak, R^*nin X in noktalarını ayırdığını ve $\pi_x \neq \pi_y$ olduğunu varsayalım. $x \to \pi_x$ dönüşümü bire-bir olduğundan $x \neq y$ dir. R^*, X in noktalarını ayırdığından bir $f \in R^*$ için $f(x) \neq f(y)$ dir. Böylece $\pi_y|R^* \neq \pi_y|R^*$ ve dolayısıyla M bire-birdir.

Burada amaç $\Sigma H(X)$, ΣR_ϕ, $\Sigma H(Y)$ üzerindeki topolojileri inşa ederek, ΣR_ϕ nin topolojisi ile birlikte S açık Riemann yüzeyinin Y altcümlesi arasındaki bağıntıyı kurmaktır.

Burada yerine göre H(X),A,ve H(Y) üzerine kompakt açıktopoloji veya altüniform yakınsaklık topolojisi kullanılacaktır. $\Sigma H(X)$,ΣA, $\Sigma H(Y)$ üzerinde ise, aşağıdaki biçimde inşa edeceğimiz Gelfand topolojisi ve $\Sigma H(X)$, $\Sigma H(Y)$ üzerinde de izdüşüm topolojisi kullanılacaktır.

Önce gerekli tanımları verelim: F herhangibir cümle ve A, F üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların bir cebiri olsun.

$\hat{A}$, $\pi \in \Sigma A$ ve $f \in A$ için $\hat{f}(\pi) = \pi(f)$ ile tanımlı kompleks değerli $\hat{f}$ fonksiyonlarının cümlesini göstersin. Açık olarak, $\hat{A}$ bir cebirdir. ve A ya izomorftur.

A bir F cümlesi üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların bir cebiri olmak üzere ΣA için bir topoloji $\hat{A}$ nın tüm elemanlarını sürekli bırakan topoloji olarak tanımlanır ve Gelfand topolojisi adını alır.

Burada Gelfand topolojisine göre açık komşulukları dolayısıyla taban elemanlarını tanımlayalım.

$\pi_0 \in \Sigma A, \hat{f} \in \hat{A}$ olsun ve $S_\varepsilon(\hat{f}(\pi_0))$, $\hat{f}(\pi_0)$ merkezli ve $\varepsilon > 0$ yarıçaplı bir daireyi göstersin. Bu durumda,

$f\text{-}1(S_\varepsilon(\hat{f}(\pi_0))) = \{\pi \in \Sigma A : |\hat{f}(\pi) - \hat{f}(\pi_0)| < \varepsilon\} = \{\pi \in \Sigma A : |\pi(f) - \pi_0(f)| < \varepsilon\}$ dır.

Bu şekildeki cümlelerin sonlu bir kesişimi $\{\pi \in \Sigma A : |\pi(f_i) - \pi_0(f_i)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq \pi\}$ olup, bu tip cümleler Gelfand topolojisinin bir tabanını oluştururlar. Böylece K, A nın sonlu bir alt cümlesi ve $\varepsilon > 0$ verilmek üzere

$$U_{\pi 0,\varepsilon,K} = \{\pi \in \Sigma A : |\, \pi(f) - \pi_0(f)\, | < \varepsilon, f \in K\}$$

çümlesine $\pi_0 \in \Sigma A$ nın <u>açık komşuluğu</u> denir.

Gelfand topolojisinin Hausdorff olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\Sigma H(X)$ üzerinde izdüşüm topolojisinin tanımını verelim. $p \in X$ olmak üzere $p \to \pi_p$ dönüşümünün sürekli ve açık olduğu topoloji $\Sigma H(X)$ için bir topoloji belirtir ve izdüşüm topolojisi adını alır. Bu dönüşüm altında X in açık cümleleri $\Sigma H(X)$ in açık cümleleri üzerine izdüşürülmüştür. N_p, $p \in X$ in bir açık komşuluğu ve $\pi_p \in \Sigma H(X)$ olsun. İzdüşüm topolojisinde π_p nin bir açık komşuluğu, $\{\pi_q \in \Sigma H(X) : q \in N_p\}$ şeklinde bir cümledir.

Dikkat edersek, $\Sigma H(X)$ üzerindeki Gelfand topolojisi $\Sigma H(X)$ üzerindeki izdüşüm topolojisi tarafından kapsanır.

Bu hazırlıkların ışığı altında ΣR_ϕ ve Y arasında bir bire-bir eşlemenin varlığını aşağıdaki teoremlerle gösterelim.

<u>Teorem 3.</u> Φ, H(Y) den H(X) içine bir ¢-izomorfizmi ve $R_\phi = \Phi(H(Y))$ olsun. Bu durumda ΣR_ϕ ve $\Sigma H(Y)$ üzerindeki Gelfand topolojisinde $L(\pi) = \pi o \Phi$ olarak tanımlanan L fonksiyonu ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ üzerine bir homeomorfizmdir.

<u>İspat.</u> $\pi \in R_\phi$ olsun. Açık olarak, $\pi o \Phi$ dönüşümünün H(Y) den ¢ içine bir ¢-izomorfizmi olması $\pi o \Phi \in \Sigma H(Y)$ olmasını gerektirir. O halde L, ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ ye bir dönüşümdür. Şimdi $\psi \in \Sigma H(Y)$ olsun. Bu durumda Φ bire-bir dönüşüm ve $L(\psi_0\, \Phi{-}1) = \psi$ olduğunda $\psi_0\, \Phi^{-1} \in \Sigma R_0$ dir ve böylece L, ΣR_ϕ den $\Sigma H(Y)$ üzerine bir dönüşümdür. L nin bire-bir dönüşüm olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

L nin sürekliliğini göstermek için, $\hat{\pi} \in \Sigma R_\phi$, H, H(Y) nin sonlu bir altcümlesi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $L(\pi)$ nin herhangi bir açık komşuluğu,

$U_{\hat{\pi}\, o\Phi,\, \varepsilon, H} = \{\pi o\Phi \in \Sigma H(Y) : |(\pi o\Phi)(g) - (\hat{\pi}\, o\Phi)(g)| < \varepsilon, g \in H\}$ dır.

L, $U_{\hat{\pi}, \varepsilon, \Phi(H)} = \{\pi \in \Sigma R_\phi : |\pi(\Phi(g)) - \hat{\pi}(\Phi(g))| < \varepsilon, g \in H\}$ komşuluğunu $U_{\hat{\pi}\, o\Phi,\, \varepsilon, H}$ içine dönüştürür. O halde L süreklidir. Benzer biçimde L^{-1} in sürekliliğide gösterilir.

Teorem 4. P, $P(x) = \pi_x$ ile tanımlı bir dönüşüm olsun. Bu durumda P, Y den $\Sigma H(Y)$ üzerine bire-bir ve sürekli bir dönüşümdür. Burada $\Sigma H(Y)$ üzerindeki topoloji Gelfand topolojisidir.

İspat. $x, y \in Y$ ve $x \neq y$ olsun. H(Y), Y nin noktalarını ayırdığından bir $g \in H(Y)$ için, $g(x) \neq g(y)$ dir. Dolayısıyla $\pi_x(g) \neq \pi_y(g)$ olup, $\pi_x \neq \pi_y$ veya $x \neq y$, $x, y \in Y$ için $P(x) \neq P(y)$ dir. Böylece P bire-birdir.

$\Sigma H(Y)$, yalnız nokta değerlendirme dönüşümlerinden oluştuğundan ve $x \to \pi_x$ dönüşümü bire-bir olduğundan P, üzerine bir dönüşümdür.

P süreklidir. Gerçekten, K, H(Y) nin sonlu bir alt cümlesi ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$U_{\pi_x, \varepsilon, K} = \{\pi_y \in \Sigma H(X) : |\pi_y(f) - \pi_x(f)| < \varepsilon, f \in K\}$$

π_x in bir açık komşuluğudur. $f \in H(Y)$ sürekli ve K sonlu bir cümle olduğundan $N = \bigcap_{f \in K} \{y \in Y : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$ bir açık cümledir ve X i kapsar. Eğer $y \in N$ ise bu durumda her $f \in H$ için $|\pi_y(f) - \pi_x(f)| < \varepsilon$ olup, $\pi_y \in U\pi_x, \varepsilon, K$ dır.

Böylece teorem 3 ve teorem 4 den dolayı ΣR_ϕ ile Y arasında bir bire-bir eşlemenin varlığı gösterilmiş oluyor. O halde 2 kısımda verilen teorem 1 ve bu özellik birlikte dönüşüldüğünde, $Y - \phi(X)$ in noktaları ile, R_ϕ üzerinde nokta değerlendirme dönüşümü olmayan ΣR_ϕ nin elemanları arasında bire-bir bir eşlemenin varlığı elde edilmiş olur.

KAYNAKLAR

[1] BEHNKE, H., SCHEJA, G., "Über Abstrakte Und Konkrete Riemannflachen" Studies in Mathmetical Analysis and Related Topics, Stanford University Press, 1962 (16-24)

[2] BEHNKE, H., ve SOMMER, F., "Theorie der Analytischen Funktionen Einer Komplexen Varanderlichen" Springer Verlag, Berlin,1962.

[3] MINDA, C. D., " Analytic Functions on Nonopen Sets" Mathematics Magazine, 46. 1973, (223-224)

[4] ROYDEN, H., "Function Algebras" Bull.Amer. Math. Soc., Vol. 69. 1963. (281-298)

[5] SU, L. P., "Rings of Analytic Functions on Any Subset of the Complex Plane" Pacific J. Math. 43, 1972 (535-538)

[6] ŞERBETCİ, A., ÖZKIN, İ.K., " On the Rings of Analytic Functions on any Subset of an open Riemann Surface", Jour. Inst. Math. and Comp. Sci., (Math.Ser.) Vol. 3, No. 1, 1990, (15-20)