Erc.Üni.Fen.Bil.Derg., 5, 1-2 (1989), 894-898

BİR KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI TEMSİL FORMÜLLERİ

Mehmet ÇAĞLIYAN
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Görükle-BURSA

ÖZET

Bu çalışmada 2n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem sınıfının çözümleri için bazı temsil formülleri elde edilmiştir.

SOME REPRESENTATION FORMULAS FOR SOLUTIONS OF A CLASS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

In this paper, some representation formulas for solutions of a class of partial differential equations are obtained.

1. GİRİŞ

Bu notta, 2n. mertebeden

$$L^n(u) = 0 \tag{1}$$

şeklindeki bir denklem sınıfı için bazı temsil formülleri verilecektir. Burada

$$L = \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sigma\,\sigma' \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_1 \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)' \frac{\partial}{\partial y} + k(y)$$

olup σ x in ve τ_1, τ_2, k da y nin, aşağıda gerektiği kadar türetilebilir fonksiyonlarıdırlar.

(1) denklemi, Laplace, Helmholtz ve Genelleştirilmiş eksenel simetrik potansiyel denklemleri ve bunların itereytlerini özel hal olarak ihtiva eder. Keza, k=0, n=1 için (1) denkleminin L. Bers ve A. Gelbart [1] tarafından ele alınan Σ-monojen fonksiyonlar ve k=0, n=2 için de bölgesel -monojen fonksiyonlarla ilişkisi iyi bilinmektedir [3].

2. TEMSİL FORMÜLLERİ

Lemma 1 : Eğer D_1, $D_1\Phi = \sigma(\partial\Phi/\partial x)$ şeklinde tanımlanan bir operatör ve f C^{2n+1} sınıfından bir fonksiyon ise

$$L^n(D_1 f) = D_1 L^n(f) \tag{2}$$

dir. Daha genel olarak, m,n> 0 tam sayılar ve f C^{2n+m} sınıfından herhangi bir fonksiyon ise

$$L^n(D^m f) = D^m L^n(f) \tag{3}$$

dir.

Ispat : Tüme varım yöntemiyle yapılır.

Lemma 2 : Eğer n> 1 bir tamsayı ve f C^{2n} sınıfından bir fonksiyon ise,

$$L^n \{(\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx) f(x,y)\} = (\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx) L^n(f) + 2nD_1 L^{n-1}(f) \tag{4}$$

dir.

Ispat : Tüme varım yöntemiyle yapılır. n = 1 için

$$L \{(\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx) f(x,y)\} = (\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx) L(f) + 2 D_1 f \tag{5}$$

olduğu doğrudan doğruya elde edilir. Şimdi (4) ün n-1 için doğru olduğunu kabul edelim. Bu taktirde L nin lineerliği ve (5) kullanılarak,

$$L^n \{(\int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)f(x,y)\} = L\ \{(\int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)L^{n-1}(f) + 2(n-1)D_1L^{n-2}(f)\}$$

$$= (\int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)L\ \{L^{n-1}(f)\} + 2\ D_1L^{n-1}(f) + 2(n-1)D_1L(L^{n-2}f)$$

$$= \int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)L^n(f) + 2nD_1L^{n-1}(f)$$

elde edilir.

Teorem : Eğer n, m >1 tamsayılar ve f C^{2n} sınıfından bir fonksiyon ise,

$$Ln\ \{(\int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)^m\ f(x,y)\ \} = \ell_{n,1}\ \ell_{n-1,1}\cdots\ n-m+1,1\ L^{n-m}(f) \qquad (6)$$

dir. Burada

$$\ell_{n,1} = \int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)L + 2n\ D_1$$

dir.

Ispat : m üzerinde tüme varım yöntemiyle yapılır. m = 1 için eşitliğin doğru olduğu Lemma 2 den açıktır. Şimdi

$$L^n\ \{(\int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)^{m-1}\ f(x,y)\ \} = \ell_{n,1},\ \ldots\ell_{n-m+2,1}\ L^{n-m+1}(f) \qquad (7)$$

olduğunu kabul edelim. (7) de f(x,y) yerine $(\int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)f(x,y)$ konur ve sonra (4) kullanılırsa (6) elde edilir.

Bu teoremden (1) denkleminin çözümleri için bir temsil derhal elde edilebilir. Gerçekten (6) da, n >2 olmak üzere m=n-1 alınırsa

$$L^n\ \{(\int_x^x \frac{1}{\sigma}dx)^{n-1}f(x,y)\} = \ell_{n,1}\ \ell_{n-1,1}\cdots\ell_{2,1}\ L(f) \qquad (8)$$

bulunur. Bu eşitlik, eğer t $0 < t < n-1$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve f $L(u) = 0$ denklemini sağlayan bir fonksiyon ise,

$$L^n \{ (\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx)^t f(x,y) \} = 0$$

olduğunu gösterir. Böylece $f_{1,i}$ fonksiyonları $L(u) = 0$ denkleminin keyfi çözümleri olmak üzere

$$L^n \{ (f_{1,0} + \int_x^x \frac{1}{\sigma} dx) f_{1,i} + \ldots + (\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx)^{n-1} f_{1,n-1} \} = 0$$

elde edilir. Yani

$$u = f_{1,0} + \int_x^x \frac{1}{\sigma} dx) f_{1,1} + \ldots + (\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx)^{n-1} f_{1,n-1} = 0 \quad (9)$$

fonksiyonu $L^n(u) = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

(9) da verilen çözüm, gerçekte $L^n(u)=0$ denkleminin genel çözümüdür.

Laplace ve Genelleştirilmiş eksenel simetrik potansiyel denklemlerin itereytleri için benzer temsiller Burns [2] tarafından verilmiştir. (Keza [3],[4]'e bakınız.)

(1) denkleminin çözümleri için ikinci bir temsil, Lemma 1 ve (9) formülünden elde edilir. Gerçekten, eğer f fonksiyonu $L^n(u)=0$ denklemini sağlıyorsa D^m f fonksiyonu da aynı denklemi sağlar. Bu sonucu (9) ile birleştirirsek, herhangi $m_i > 0$ tamsayıları ve $L(u)= 0$ denkleminin keyfi $f_{1,i}$ çözümleri için

$$L^n \{ (\sum_{i=0}^{n-1} (\int_x^x \frac{1}{\sigma} dx)^i D^{m_i} f_{1,i} \} = 0$$

olduğu görülür.

KAYNAKLAR

[1] L. Bers and A. Gelbart, On a class of functions defined by a partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 56(1944), 67-93.

[2] J.C.Burns,The iterated equation of generalized exially symmetric potential theory I, J. Austr. Math. Soc. 7(1967), 263-276.

[3] M. Çağlıyan, Bölgesel -monojen fonksiyonlar. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, 1978.

[4] L. E.Payne, Representation formulas for solutations of a class of partial differential equations, J. Math. Phys. 38(1959), 145-149.