Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 409-419, (1986)

N $(R, 1/f^{(k)})$ TERİMİNİN İKİ ÜST SINIRINA AİT AYRICALIKLI DEĞERLER VE ASİMTOTİKLİK TEOREMLERİ

Sezai UĞRAŞ

D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, DİYARBAKIR

ÖZET

N $(R, 1/f^{(k)})$ teriminin iki üst sınırına ait bazı teorem ve sonuçları ayrıcalıklı değerlere uygulayacağız. Ayrıca bu teorem ve sonuçlar yardımıyla N $(R, 1/f^{(k)})$, N $(R, 1/f)$ ve N $(R, 1/f-a)$ ifadelerinin T (R, f) karakteristik fonksiyonuna asimtotik olma koşullarını vereceğiz.

THE EXCEPTIONAL VALUES AND ASYMPTOTICAL THEOREMS WHICH BELONG TWO UPPER BOUNDS OF N $(R, 1/f^{(k)})$ TERM

SUMMARY

We will apply the exceptional values to two upper bounds of N $(R, 1/f^{(k)})$ term. Again we will give the conditions which occure asymtotic N $(R, 1/f^{(k)})$, N $(R, 1/f)$ and N $(R, 1/f-a)$ terms to T (R, f).

1. GİRİŞ

R. Nevanlinna tarafından tanımlanan

$$T(R,f) = m(R,f) + N(R,f)$$

veya

$$T(R,1/f) = m(R,1/f) + N/R,1/f)$$

şeklindeki karakteristik fonksiyonun uygulaması oldukça geniştir. Klasik olarak bilinen Picard (veya Borel) ayrıcalıklı değerleri örnek olarak sayılabilir. R. Nevanlinna özellikle meromorf, yani sonlu karmaşık düzlemde kutup noktalarından başka tekil noktaları olmayan fonksiyonların karakteristik özelikleriyle ilgilenmiştir.

2. TANIMLAR

2.1. TANIM

$f(z)$, $|z| < R$ bölgesinde meromorf bir fonksiyon olsun. $1 \leqslant i \leqslant M$ ve $1 \leqslant j \leqslant N$ olmak üzere a_i ve b_j sayıları sırasıyla $f(z)$ meromorf fonksiyonunun sıfır ve kutup yerleri olarak alınsın. Bu halde $m(R,f)$, $m(R,1/f)$ $N(R,f)$ ve $N(R,1/f)$ terimleri

$$m(R,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f| \, d\emptyset \quad , \quad m(R,1/f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |1/f| \, d\emptyset$$

$$N(R,f) = \sum_{j=1}^{N} \log \frac{R}{|b_j|} \quad \text{ve} \quad N(R,1/f) = \sum_{i=1}^{M} \log \frac{R}{|a_i|}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca a bir karmaşık sayı olmak üzere

$$m(R, \frac{1}{f-a}) = m(R,a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f-a|} \, d\emptyset$$

ve

$$N(R, \frac{1}{f-a}) = N(R,a) = \Sigma \log \frac{R}{|c_i|}$$

şeklindedir. Buradaki c_i katsayıları, $f - a = 0$ denkleminin köklerini göstermektedir. Böylece f-a fonksiyonunun karakteristiğini yukarıda yapılan tanımlar altında,

$$T(R,a) = m(R,a) + N(R,a) = m(R,\frac{1}{f-a}) + N(R,\frac{1}{f-a}) = T(R,\frac{1}{f-a})$$

biçiminde yazabiliriz ([3a] , S. 166).

2.2. TANIM

$m(R,f'/f)$ teriminin üst sınırını $S(R,f)$ işareti ile göstereceğiz ve işlemlerde önemli olmayan hata terimi olarak alacağız.

$\bar{N}(R,f)$ terimi mertebeleri ne olursa olsun, $f(z)$ meromorf fonksiyonunun yalnız bir defa sayılan kutuplarına ait toplamı göstermektedir.

2.3. TANIM

$f(z)$ meromorf fonksiyonunun ancak sonlu defa kabul ettiği ve en fazla iki tane olabilen değerlere "Picard ayrıcalıklı değerleri" denir.

$$p = \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{\log T(R,f)}{\log R}$$

ifadesine, $f(z)$ meromorf fonksiyonunun mertebesi denir.

$f(z)$ meromorf fonksiyonunun mertebesi p ve $f - a = 0$ denkleminin kökleri a_i olsun. $p > r$ değerleri için

$$\Sigma \frac{1}{|a_i|^r}$$

serisini yakınsak yapan ve en fazla iki tane olabilen a değerlerine "Borel Ayrıcalıklı Değerleri" denir.

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{N(R,a)}{T(R,f)} = 1 - \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{N\left(R, \frac{1}{f-a}\right)}{T(R,f)}$$

şeklinde tanımlanan $\delta(a)$'ya $f(z)$ meromorf fonksiyonu için a değerinin defosu denecektir. $\delta(a)$, $f(z) - a = 0$ denkleminin sıfırları yoğunluğunun azalmasını gösteren bir ölçü gibi olup, 0 ile 1 arasındadır. Defosu sıfırdan farklı olan değerlere "Nevanlinna Ayrıcalıklı Değerleri", defosu sıfır olan değerlere ise "adi değerler" denir. Ayrıca kullanacağımız diğer defolar,

$$\delta_i^{(k)}(a) = 1 - \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{N(R, \frac{1}{f^{(k)} - a})}{T(R,f)}$$

$$\bar{\delta}(\infty) = 1 - \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{\bar{N}(R,f)}{T(R,f)}$$

ve

$$\delta_i^{(k)}(0) = 1 - \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)}$$

olarak tanımlıdır.

Eğer $|z|$ sürekli bir eğri boyunca sonsuza giderken $f(z) \to a$ oluyorsa a, f(z) fonksiyonunun asimtotik değeridir denir. Bunu $f(z) \sim a$ simgesiyle göstereceğiz.

TEOREMLER

2.1. TEOREM

m (R, f'/f) teriminin üst sınırı olan S(R,f) hata terimi için,

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{S(R,f)}{T(R,f)} = 0 \qquad (2.1)$$

olur ([2b] , S. 41-42).

2.2. TEOREM

a, f(z) meromorf fonksiyonunun Picard (veya Borel) anlamında bir ayrıcalıklı değeri ise, $\delta(a) = 1$ olup

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{N(R,a)}{T(R,f)} = 0 \tag{2.2}$$

şeklindedir ([1a] , S. 76).

2.3. TEOREM

f(z) meromorf bir fonksiyon, a_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ sıfır ve sonsuz olmayan karmaşık sayılar olsun. Bu halde k ve q tamsayıları için,

$$N(R,1/f^{(k)}) \leqslant \sum_{i=1}^{q} N(R, \frac{1}{f - a_i}) + (k - q+1)\, T(R,f) + S(R,f) \tag{2.3}$$

bağıntısı vardır ([4] , S. 28).

2.4. TEOREM

f(z) sonlu karmaşık düzlemde meromorf bir fonksiyon ise, k pozitif tamsayısı için,

$$N(R,1/f^{(k)}) \leqslant N(R, \frac{1}{f - a}) + k\overline{N}\,(R,f) + S\,(R,f) \tag{2.4}$$

olur ([4] , S. 38).

2.5. TEOREM

Rasyonel olmayan f(z) meromorf fonksiyonu sonsuz ile a_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ farklı karmaşık sayılarını, $f^{(k)}(z)$ türev fonksiyonu da sıfırı Nevanlinna ayrıcalıklı değeri olarak kabul ediyorsa,

$$\sum_{i=1}^{q} \delta(a_i) \leqslant \delta_i^{(k)}(0) + k$$

eşitsizliği vardır.

İSPAT

2.3. Teoremden geçen

$$N(R,1/f^{(k)}) \leqslant \sum_{i=1}^{q} N(R, \frac{1}{f - a_i}) + (k - q+1)\ T(R,f) + S(R,f)$$

şeklindeki (2.3) eşitsizliğinde her iki taraf T(R,f) karakteristik fonksiyonuna bölünür ve yeteri kadar büyük R sayısı için üst limitlere geçilirse,

$$\sum_{i=1}^{q} [\ 1 - \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R, \frac{1}{f - a_i})}{T\ (R,\ f)}] \leqslant 1 - \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T\ (R,f)} + k$$

$$+ \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{S(R,f)}{T(R,f)}$$

elde edilir. (2.1) ifadesi ve defoların tanımı son eşitsizlikte kullanılırsa,

$$\sum_{i=1}^{q} \delta\ (a_i) \leqslant \delta_i^{(k)}(0) + k$$

sonucu bulunur.

2.6. TEOREM

Rasyonel olmayan f(z) meromorf fonksiyonu a karmaşık sayısını, $f^{(k)}(z)$ türev fonksiyonu da sıfırı Nevanlinna ayrıcalıklı değeri olarak kabul etsin. Eğer sonsuz f(z) fonksiyonunun Picard (veya Borel) ayrıcalıklı değeri ise,

$$\delta(a) \leq \delta_i^{(k)}(0)$$

olur.

İSPAT

2.4. Teoremden geçen

$$N(R, 1/f^{(k)}) \leq N\left(R, \frac{1}{f - a}\right) + k\bar{N}(R,f) + S(R,f)$$

şeklindeki (2.4) ifadesinin her iki tarafı T(R,f) karakteristik fonksiyonuna bölünür ve yeteri kadar büyük R sayısı için üst limitlere geçilirse,

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R, 1/f^{(k)})}{T(R,f)} \leq \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N\left(R, \frac{1}{f - a}\right)}{T(R,f)} + k \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\bar{N}(R,f)}{T(R,f)} + \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{S(R,f)}{T(R,f)} \quad (2.5)$$

ifadesi elde edilir. Sonsuz f(z) meromorf fonksiyonunun Picard (veya Borel) ayrıcalıklı değeri olduğundan,

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\bar{N}(R,f)}{T(R,f)} \quad \text{ve} \quad \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{S(R,f)}{T(R,f)}$$

terimleri sıfır olur. Bu halde (2.5) ifadesi,

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} \leqslant \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,\frac{1}{f-a})}{T(R,f)}$$

şeklini alır. Bu son eşitsizlikte

$$1 - \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,\frac{1}{f-a})}{T(R,f)} \leqslant 1 - \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} \qquad (2.6)$$

şeklinde yazılabileceğinden, (2.6) denkleminde,

$$\delta(a) \leqslant \delta_i^{(k)}(0)$$

bağıntısı kolayca elde edilir.

2.7. TEOREM

Rasyonel olmayan $f(z)$ meromorf için $\overline{\delta}_i^{(k)}(0) = 0$, $\delta(a) = 0$ ve $\delta(\infty) = 1$ ise $N(R,1/f^{(k)})$ fonksiyonu ile $T(R,f)$ karakteristik fonksiyonu asimtotiklik özeliği gösterirler. Yani,

$$N(R,1/f^{(k)}) \sim T(R,f)$$

şeklindedir.

İSPAT

2.6. Teoremin ispatında geçen

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} \leqslant \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,\frac{1}{f-a})}{T(R,f)} + k \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,f)}{T(R,f)}$$

$$+ \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{S(R,f)}{T(R,f)}$$

şeklindeki (2.5) ifadesinde $\overline{N}(R,1/f^{(k)}) \leqslant (N(R,1/f^{(k)})$ özeliği göz önüne alınırsa

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\overline{N}(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} \leqslant \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} \leqslant \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,\frac{1}{f-a})}{T(R,f)}$$

$$+ k \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,f)}{T(R,f)} + \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{S(R,f)}{T(R,f)} \tag{2.7}$$

bağıntısı çıkar. (2.7) ifadesi defo tanımlarına göre düzenlenirse,

$$(1 - \overline{\delta}_i^{(k)}(0) \leqslant \lim_{R\to\infty} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} \leqslant (1 - \delta(a)) + k(1 - \overline{\delta}(\infty))$$

elde edilir. Verilen hipotezler son eşitsizlikte kullanılırsa,

$$1 \leqslant \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} \leqslant 1$$

çıkar. Bu son ifade de

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{N(R,1/f^{(k)})}{T(R,f)} = 1$$

veya

$$N(R,1/f^{(k)}) \sim T(R,f)$$

demektir.

2.8. TEOREM

Sıfır ve a karmaşık sayısı $f(z)$ tam fonksiyonun birer adi değerleri ise

$$N(R,1/f^{(k)}) \sim T(R,f) \sim N(R, \frac{1}{f-a})$$

asimtotiklikleri sağlanır.

İSPAT

$f(z)$ tam fonksiyon olduğundan kutupları yoktur. Yani $\overline{N}(R,f) = 0$ olur. Bu halde (2.4) ifadesindeki eşitsizlik

$$N(R,1/f^{(k)}) \leqslant N(R, \frac{1}{f-a}) + S(R,f) \leqslant T(R,f) \tag{2.8}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca 2.7. teoremindeki $N(R,1/f^{(k)}) \sim T(R,f)$ asimtotikliği (2.8) eşitsizliklerinde kullanılırsa,

$$T(R,f) \sim N(R,1/f^{(k)}) \leqslant N(R, \frac{1}{f-a}) + S(R,f) \leqslant T(R,f)$$

bağıntısı bulunur. Buradan da

$$N(R,1/f^{(k)}) \sim T(R,f) \sim N(R, \frac{1}{f-a})$$

asimtotiklikleri çıkar.

KAYNAKLAR

1. Dönmez, A.

a) Meromorfik fonksiyonlar, Erzurum (1978)

b) Nevanlinna Teorisinde bazı genelleştirmeler ve defolara uygulamaları, TÜBİTAK, Proje No : TBAG - 297

2. Hayman, W.K.

a) Meromorphic Functions, Oxford University Press, (1968).

b) Picard values of meromorphic functions and derivatives, Ann. of Math. 70 (1959), 9-42.

3. Nevanlinna, R.

a) Le Théoreme de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions Meromorphes, 2nd ed., Chelsea Pub. Comp., New York (1974).

b) Analytic Functions, Springer-Verlag, Berlin (1970).

4. Uğraş, S. Nevanlinna kuramında genelleştirmeler, defo ve asimtotiklik problemleri (Doktora Tezi), Diyarbakır (1985).