Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 379-385, (1986)

LİP(α ,P) SINIFINA AİT PERİYODİK FONKSİYONLARIN (N,p_n) ORTALAMASI YARDIMI İLE YAKLAŞIM DERECESİ

Hüseyin ALTINDİŞ
E.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET

f fonksiyonu 2π periyotlu periyodik ve Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Lip (α, P), $(0 < \alpha \leq 1)$ sınıfına ait periyodik f fonksiyonunun (N,p_n) ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi

$$E_n(f) = \min_{T_n} \| f - T_n \|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}}\right)$$ ile verilir.

ON THE DEGREE OF APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS BELONGING TO THE CLASS LIP (α, P) BY MEANS OF (N,p_n).

SUMMARY

Let f be a periodic function with period 2π and integrable in the sense of Lebesgue. The degree of approximation of a periodic function f belonging to the class Lip (α, P), $(0 < \alpha \leq 1)$ by means of (N,p_n) is given by

$$E_n(f) = \min_{T_n} \| f - T_n \|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}}\right).$$

1- GİRİŞ

Periyodik fonksiyonların yaklaşım dereceleri üzerinde 1960 yılından beri çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan Alexist [1] , Sahney ve Goel [2] , Sahney ve Rao[3], Chandra [4] , Quereshi [5] çeşitli ortalamalar yardımı ile periyodik fonksiyonların yaklaşım derecelerini incelemişlerdir. Bu çalışmada [3] de incelenen Lip (α ,P) sınıfına ait Lebesque anlamında integrallenebilen 2π periyotlu periyodik f fonksiyonunun fourier serisi teşkil edilmiş ve yaklaşım derecesinin

$E_n(f) = \underset{T_n}{\mathrm{Min}} \|f - T_n\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}}\right)$ olduğunu veren bir teorem üzerinde durulmuştur.

2- TANIM VE LEMMALAR

2.1-TANIM:

Kısmi toplamlar dizisi (S_n) olan $\sum a_n$ sonsuz serisi verilmiş olsun. (p_n), $P_n = p_0+p_1+p_2 \ldots +p_n \to \infty$, $n \to \infty$ olacak şekildeki pozitif reel sabitlerin bir dizisini göstermek üzere $\sum a_n$ serisinin (N,p_n) ortalamasını

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=o}^{n} p_{n-k} S_k$$

ile gösterelim. Eğer $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}}\ T_n = S$ ise $\sum a_n$ serisi veya bunun kısmi toplamlar dizisi olan (S_n), S değerine (N,p_n) toplanabilirdir denir [2] .

2.2-TANIM:

$a \leqslant x \leqslant b$ için

$$\left(\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant A|h|^{\alpha} \qquad o < \alpha \leqslant 1$$ ise f fonksiyonuna Lip (α ,p) sınıfına aittir denir ve $f \in$ Lip (α ,p) şeklinde gösterilir [6] .

2.3-TANIM:

f fonksiyonunun normu $p \geqslant 1$ olmak üzere

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}$$ şeklinde verilir [3] .

2.4-TANIM:

f Fonksiyonunun yaklaşım derecesi $E_n(f)$ ile gösterilir ve

$E_n(f) = \underset{T_n}{\mathrm{Min}} \|f - T_n\|_p$ dir. Burada T_n n. dereceden bir trigonometrik polinomdur [3] .

2.5-TANIM:

(Hölder Eşitsizliği) $p>1$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu L^p nin, $g(x)$ fonksiyonu $L^{p/p-1}$ nin elemanı ise $f(x).g(x)$ L nin elemanıdır ve

$$\left|f(x).g(x)\, dx\right| \leqslant \left(\int |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int |g(x)|^{p/p-1}\, dx\right)^{p-1/p}$$ dir [7] .

2.6-LEMMA:

(p_n) pozitif ve artmayan bir dizi $0 \leqslant t \leqslant \pi$ ve herhangi bir n,a,b için

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k e^{i(n-k)t}\right| \leqslant AP_\tau \tag{2.1}$$

burada A bir sabit ve $\tau = [|\frac{\pi}{t}|]$ dir [6] .

2.7-LEMMA:

Eğer $f(x)$, $[0,\pi]$ aralığı üzerinde Lip (α, p) sınıfına ait bir fonksiyon ise $\emptyset(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ olmak üzere $\emptyset(t)$ de $[0,\pi]$ aralığı üzerinde Lip (α, p) sınıfının bir elemanıdır [6] . (2.2)

2.8-LEMMA:

$f(x)$, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$ için Lip(α, p) sınıfına ait bir fonksiyon ise $\alpha p > 1$ olduğunda $f(x)$ fonksiyonu Lip $(\alpha - \frac{1}{p})$ sınıfının bir fonksiyonuna denktir [6] .

3. TEOREM:

$0 < \alpha \leqslant 1$ için $f(x)$, Lip(α, p) sınıfına ait periyodik bir fonksiyon ve (p_n) negatif olmayan artmayan ve

$$P_n = P(n) = p_0 + p_1 + \dots + p_n \to \infty, \quad n \to \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizi olmak üzere

$$\left(\int_1^n \frac{(p(y))^q}{y^{q\alpha + 2 - q}} dy \right)^{1/q} = O\left(\frac{P(n)}{n^{\alpha + 1/q - 1}} \right)$$

ise f fonksiyonunun yaklaşım derecesi

$$E_n(f) = \underset{T_n}{\mathrm{Min}} \; ||f - T_n||_p$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}}\right)$$ dir. Burada T_n fourier serisinin (N, p_n) ortalamasıdır [3] .

ISPAT:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

serisinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $S_n(x)$ olmak üzere

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_o^{\pi} \frac{\sin(n + 1/2)t}{2\sin(1/2).t} [f(x + t) + f(x-t)] \, dt$$

ve

$$T_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi P_n} \int_o^{\pi} \varnothing(t) \sum_{k=o}^{n} p_{n-k} \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(1/2).t} dt$$

olur [8]. Burada

$$\varnothing(t) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)]$$

dir.

$$T_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi P_n} \int_o^{\pi} \frac{\varnothing(t)}{t} \sum_{k=o}^{n} p_k \sin(n-k)t dt + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi P_n} \left[\int_o^{\pi/n} + \int_{\pi/n} \right] \frac{\varnothing(t)}{t} \sum_{k=o}^{n} p_k \sin(n-k)t \, dt + o(1)$$

$$= I_1 + I_{11} + o(1)$$

diyelim.

$$I_1 = \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi/n} \frac{\phi(t)}{t} \sum_{k=o}^{n} p_k \sin(n-k)t \, dt$$

ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanır ve $\phi(t) \in Lip(\alpha, p)$ olduğu dikkate alınırsa

$$I_1 = O(\frac{1}{P_n}) \left(\int_0^{\pi/n} \left| \frac{\phi(t)}{t^{\alpha}} \right|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\pi/n} \left| \frac{\sum_{k=o}^{n} p_k \sin(n-k)t}{t^{1-\alpha}} \right|^q dt \right)^{1/q}$$

$$= O(\frac{1}{P_n}) \left(\int_0^{\pi/n} \left| \frac{t^{\alpha-\frac{1}{p}}}{t^{\alpha}} \right|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{\pi/n} \left| \frac{O(P_n . nt)}{t^{1-\alpha}} \right|^q dt \right)^{1/q}$$

$$= O(\frac{1}{P_n}) \; O(1) \; O(P_n) \; O(n) \; O(\int_0^{\pi/n} (\frac{t}{t^{1-\alpha}})^q dt)^{1/q}$$

$$= O(n) \; O(\int_0^{\pi/n} t^{\alpha q} dt)^{1/q}$$

$$= O(n) \; O(t^{\alpha q+1} \Big|_0^{\pi/n})^{1/q}$$

$$= O(n) \; O(\frac{1}{n^{\alpha q+1}})^{1/q}$$

$$= O(n) \; O(\frac{1}{n^{\alpha+1/q}})$$

$$= O(\frac{1}{n^{\alpha-1+1/q}})$$

$$= O(\frac{1}{n^{\alpha-1/p}}) \qquad (3.1)$$

$$I_{11} = \frac{1}{\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sum_{k=o}^{n} p_k \sin(n-k)t \, dt$$

yine Hölder Eşitsizliği uygulanır ve (2.1),(2.2),(2.3) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$I_{11} = O\left(\frac{1}{P_n}\right) \left(\int_{\pi/n}^{\pi} \left| \frac{\phi(t)}{t^{\alpha}} \right|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{\pi/n}^{\pi} \left| \sum_{k=o}^{n} \frac{p_k \sin(n-k)t}{t^{1-\alpha}} \right|^q dt \right)^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right) O(1) \left(\int_{\pi/n}^{\pi} \left| \frac{P_\tau}{t^{1-\alpha}} \right|^q dt \right)^{1/q} \qquad \tau = \left[\left| \frac{\pi}{t} \right|\right]$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right) O\left(\int_1^n \left(\frac{P(y)}{y^{\alpha-1}}\right)^q \frac{dy}{y^2} \right)^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right) \left(\int_1^n \frac{P(y)}{y^{\alpha q - 2 + q}} dy \right)^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right) O\left(\frac{P(n)}{n^{\alpha + 1/q - 1}}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}} \right) \tag{3.2}$$

4-SONUÇ

(3.1),(3.2) ve 2.4 tanım birlikte düşünülürse

$$E_n(f) = \operatorname*{Min}_{T_n} \|f - T_n\|_p$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}}\right)$$

bulunurki bu da teoremin ıspatını tamamlar.

KAYNAKLAR

1- G.Alexist. "Convergence problems of ortogonal series" Pergamon Press. London (1961)

2- B.N.Sahney ve D.S.Goel "On the degree of Approximation of Continuons functions" Ranchi Univ.Math.Jour.Vol.4, 50-53 (1977)

3- B.N.Sahney and V.V. Gopal Rao "Bull.Austral.Math.Soc.Vol. 6 11-18 (1972)

4- P.Chandra. "On the degree of approximation of functions belonging to the lipschitz class" Nanta Math. 8, 88-91 (1975)

5- K.Qureshi. "On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class by means of a conjugate series" Indian J.Pure. Appl.Math.12(9), 1120-1123 September (1981).

6- L.Mc Fadden "Absolute Nörlund summability" Duke Math.J.9 168 - 207 (1942)

7- E.C.Titchmars "The theory of functions" Oxford (1939).

8- H.Altındiş "Sürekli fonksiyonların Nörlund ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi" E.Ü.Fen Bilimleri Dergisi, 1, 331 - 337, (1985)