Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 143-154, (1986)

STURM, LIOUVILLE ARKADAŞLIĞI

Haydar AKÇA

E.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET

Bu incelemede, üzerinde pek çok araştırma yapılmış ve halen yapılmakta olan Sturm-Liouville kuramının gelişimi kısaca özetlenmiş ve iki büyük matematikçinin dayanışması vurgulanmaya çalışılmıştır.

THE FRIENDSHIP OF STURM AND LIOUVILLE

SUMMARY

The present paper is an attempt to introduce briefly, development of Sturm-Liouville theory and give some knowledge about collaboration of two great mathematicians.

1- GİRİŞ

1836-1837 yılları arasında, Sturm ve Lioulville yayınladıkları bir dizi makale ile matematiksel analizde tümü ile yeni bir kuram geliştirdiler. Daha sonra kendi adları ile anılacak olan bu kuram ikinci basamaktan

$$(k(x)V'(x))' + (G(x)r - \ell(x))V(x) = 0, \qquad x\in(a,b) \tag{1}$$

genel doğrusal diferensiyel denklem ve

$$k(x)V'(x) - hV(x) = 0 \quad (x=a \text{ için}) \tag{2}$$

$$k(x)V'(x) + HV(x) = 0 \quad (x=b \text{ için}) \tag{3}$$

sınır değer koşulları ile ilgilidir. Burada k,g ve ℓ, x'in pozitif fonksiyonları h ve H verilen pozitif sabitler, r ise bir parametredir. Bu sınır değer problemi sıfıra özdeş olmayan çözümler olarak, ancak belli r özdeğerlerine karşı gelen özdeğer fonksiyonlarını çözüm kabul eder. Bu özdeğerler (1) - (3) denklemleri ile ilgili belli üstel denklemlerin kökleri olarak incelenir.

Sturm ve Lioulville'nin üzerinde çalıştıkları sorular kabaca üç ana grupta toplanabilir.

i) Özdeğerlerin özellikleri

ii) Özdeğer fonksiyonların nitel davranışı

iii) Özdeğer fonksiyonların bir sonsuz serisine keyfi fonksiyonların açılımı.

Bunlardan (i) ve (ii) yi Sturm araştırmıştır. Liouville, (iii) üzerinde çalışmış ve (i), (ii) ye ilişkin değişik sonuçlar ortaya koymuştur. Sturm ve Liouville'nin doğrusal diferensiyel denklemler üzerine olan çalışmalarını dört döneme ayırmak uygun düşer.

Birinci dönem olan 1829-1830 arasında her iki matematikçide, biribirinden bağımsız olarak yayınladıkları makalelerle konuya yaklaşımlarını belirlediler. 1831-1835 döneminin ortalarında Sturm'un yaptığı iki büyük çalışma ile üçüncü dönem olan 1836-1837 de Liouville'nin konuya ilişkin ilk meşhur çalışması ard arda yayınlandı. Kuram üzerindeki özgün çalışmaların son dönemi olan 1838-1840 yılları arasında Liouville'nin büyük katkıları olmuştur.

Bu incelemede tarihi sırayı izleme yerine, önce Sturm'un çalışmaları daha sonrada Liouville'nin çalışmaları özetlenmiştir. Zira, Sturm, Liouville'nin özgün çalışma ve kurama katkılarını olağan biçimde överken, Liouville'nin konuya ilişkin çalışmalarında Sturm her zaman kaynak olarak gösterilmiştir.

2- STURM-LIOUVILLE KURAMININ KÖKLERİ

Sturm-Liouville kuramına esin kaynağı olan görüşlere ilk kez Sturm'un geniş kapsamlı çalışmasının giriş bölümünde rastlanır [3]. Sturm ikinci çalışmasında [4] konuyu ayrıntılı olarak incelemiştir. Bir örnek olarak

$$g\,\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial\left(k\,\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} - \ell u \qquad (4)$$

Denklemi ile temsil edilen homogen olmayan ince bir teldeki ısı iletimi problemini göz önüne almıştır. Burada $U(x,t)$, x noktasındaki ve t zamanındaki sıcaklık, g, k ve ℓ, x in pozitif fonksiyonlarıdır. Eğer ince telin içinde bulunduğu ortam sıfır derece sıcaklıkta ise, U fonksiyonu a ve b sınır noktalarında

$$k \frac{\partial U}{\partial x} - hU = 0, \quad (x=a \text{ için}) \tag{5}$$

$$k \frac{\partial U}{\partial x} + HU = 0, \quad (x=b \text{ için}) \tag{6}$$

sınır değer koşullarını sağlamalıdır. Eğer t=0 için sıcaklık biliniyorsa

$$U(x,o) = f(x) \tag{7}$$

başlangıç koşulu belirlenmiş olur. Sturm, (7) yi ihmal ederek, (4)-(6) denklemlerinin $U=V(x)\,\bar{e}^{rt}$ biçiminde çözümlerini aramıştır. Bunun için kısmi denklemi adi denkleme dönüştürmüş ve Fourier'in 1822 de tanıttığı değişkenlerine ayırma yöntemini kullanmıştır.

Sturm-Liouville kuramının gelişiminde d'Alembert, Fourier ve Poisson'un çalışmaları temel ve yönlendirici etken olmuştur. 1830'ların başına dek matematikçiler (1) - (3) denklemleri gibi özel durumdaki problemlerin çözümlerini analitik olarak ifade edilebilen fonksiyonlar cinsinden elde etmek için yoğun çaba harcamışlardır. Homogen ve homogen olmayan bir teldeki titreşim problemini ilk kez d'Alembert ve eş zamanlı olarak Euler çalışmışlardır. Daha sonra Lagrange ve d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8}$$

denklemini kurmuşlardır. Burada X(x) tel boyunca kütlenin dağılımını göstermektedir. Bu denklemin $y=\zeta(x)\mathrm{Cos}\,\lambda t$ biçiminde çözümleri aranmıştır. Böylece denklem

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -X\lambda^2\zeta \tag{9}$$

formuna indirgenmiş. Burada da $\zeta = e^{\int p dx}$ olmak üzere denklem p ye göre,

$$(p^2 + X\lambda^2)dx = -dp \tag{10}$$

Riccati denklemine dönüşmüştür. Bu çalışmanın Sturm-Liouville kuramının önceliği bakımından önemi büyüktür. Bununla beraber Sturm bu çalışmayı kaynak olarak vermemiştir [1].

Buna karşın genç Sturm, hocası ve koruyucusu olan Fourier'in çalışmalarını çok iyi biliyordu. Fourier, homogen ortamlarda ısı iletim problemini silindirik ve küresel koordinatları kullanarak incelemiştir. Böylece problem basit trigonometrik ifadelere dönüştüğünden özdeğerleri kolaylıkla bulabilmiştir. Fourier, silindirik koordinatlarda sıcaklık fonksiyonunu $e^{-mt}\ U(x)$ biçiminde tanımlamış ve buna bağlı olarak U(x) için

$$d^2U/dx^2 + (1/x)\, dU/dx + (m/k)U = 0 \tag{11}$$

denklemini geliştirmiştir. Burada k pozitif bir sabit ve X eksenden olan uzaklıktır. Ayrıca U, h bir sabit ve b silindirin yarıçapı olmak üzere

$$hU + dU/dx = 0, \qquad (x=b \text{ için}) \tag{12}$$

sınır koşulunu sağlamak zorundadır.

Sturm ve Liouville'den önce Sturm-Liouville kuramındaki genel teoremi kanıtlayan tek matematikçi Siméon Denis Poisson (1781-1840) dır. Poisson bu kanıtı ısı iletimi denklemlerinin çözümünde, özdeğerleri belirlerken ortaya çıkan üstel denklemlerin köklerinin gerçelliği konusunda Fourier ile olan tartışmasında elde etmiştir [1]. Daha sonra Poisson özel biçimdeki

$$\partial U/\partial t = \partial^2 U/\partial x^2 + X(x)U \tag{13}$$

denklemi ile

$$dU/dx - hU = 0 \qquad (x=a \text{ için}) \tag{14}$$

$$dU/dx + HU = 0 \qquad (x=b \text{ için}) \tag{15}$$

sınır değer koşullarını birlikte incelemiştir. Buradan eğer y_p, (14)-(15) sınır değer koşullarını sağlayan

$$Py_p = d^2y_p/dx^2 + Xy_p$$

denkleminin çözümü ise, $y_p(x)\ e^{pt}$ fonksiyonu da (13)-(15) sınır değer probleminin çözümü olacağını kanıtlamıştır. Poisson bu çalışmasında ayrıca özdeğerlerin kesinlikle gerçel olacağını göstermiştir. Daha sonraki çalışmalarında, elde edilen bu sonuçları en genel sınır değer problemlerine uygulamıştır. Poisson'un çalışmalarının Sturm-Liouville kuramına olan katkıları, kuramın kendisi ile karşılaştırıldığında oldukça sınırlı kalmaktadır.

3- STURM'UN ÇALIŞMASI

Matematiksel şaheser olarak adlandırılan Sturm'un çalışması, diferensiyel denklemler üzerine teoremler ile ifadeleri Fourier ve Poisson tarafından verilen cebirsel denklemlerin köklerine ilişkin çalışmaları temel alarak kurulmuştur. Ne varki bu çalışmaların pek çoğu yayınlanmadığından özel arşivlerde kayıp olmuştur. Çalışma genel olarak ikinci basamaktan doğrusal diferensiyel denklem olan

$$L(d^2v/dx^2) + M(dv/dx) + Nv = 0 \qquad (16)$$

ile ilgilidir. L, M ve N katsayı fonksiyonları bir "r" gerçel parametresine bağlıdır. Sturm uygun düşmesi nedeniyle (16) denklemini self-adjoint formda

$$(K(r,x)V'r(x))' + G(r,x)Vr(x) = 0 \qquad x \in (a,b) \qquad (17)$$

ele almıştır. Bu ise (1) denkleminin genelleştirilmiş biçimidir. Sturm ilk çalışmasında (2) ve (3) sınır değer koşullarını tartışmamıştır. Bunu daha sonraki spektral kuramı üzerine olan çalışmasında irdelemiştir. İlk çalışmasında bir sınır değer koşulu kullanmıştır.

$$K(r,x)V_r'(x) - h(r)V_r(x) = 0\,, \qquad (x=a \text{ için}) \qquad (18)$$

Kolay anlaşılması bakımından Sturm'un çalışmasını kanıtlarına girmeden her biri belli özellikleri belirten önermeler biçiminde verelim.

3.1- ÖNERME A

V_r, (17) denkleminin bir çözümü ve $V_r(a)$ ve $V_r'(a)$ verilmiş olusn. Bu durumda V_r çözümü tanımlanan aralıkta her x için tek türlü bellidir. Sturm burada öncelikle V_r in (a,b) içindeki salınımlı davranışlarını irdelemiştir. 1830'lara dek çözümün varlık ve tekliği kabul ediliyorud. Nevarki varlık ve tekliğin ılk kanıtı daha sonra Liouville tarafından verilmiştir [1].

3.2- ÖNERME B

$V_r \not\equiv 0$, (17)nin bir çözümu ise V_r ve V_r' nün ortak kökleri yoktur.

3.3- ÖNERME C

Eğer V, (17) ve (18) denklemlerinin bir çözümü ve

$$
\left.
\begin{array}{l}
K > 0, \quad \forall r, \ \forall x \in [a,b] \ \text{için} \\
G, \ r \ \text{nin bir artan fonksiyonu} \ \forall x \in [a,b] \ \text{için} \\
K, \ r \ \text{nin bir azalan fonksiyonu} \ \forall x \in [a,b] \ \text{için} \\
[KV'/V]_{x=a} = h(r), \ r \ \text{nin bir azalan fonksiyonu ise}
\end{array}
\right\} \qquad (19)
$$

KV'/V her $x \in [a,b]$ için r nin bir azalan fonksiyonudur.

Bu önermenin kendisi ve kanıtı Sturm kuramında önemli bir yer tutar.

3.4- ÖNERME D

Eğer (19) kabulleri sağlanıyorsa (17) ve (18) denklemlerinin çözümü olan $V_r(x)$ in $x(r)$ kökleri r ile birlikte artandır.

Bu önermelerin sonucu olarak, Sturm aşağıdaki temel teoremi vermiştir.

3.5- TEOREM E

$$(K_i V_i')' + G_i V_i = 0 \quad (\forall x \in (a,b) \ \text{için}) \qquad (20)$$

$$(K_i V_i')/V_i = h_i \quad (x=a \ \text{için}) \qquad (21)$$

Denklemlerinin çözümleri sırası ile $i=1,2$ için V_1 ve V_2 olsun Ayrıca

$$G_2(x) \geqslant G_1(x), \qquad K_2(x) \leqslant K_1(x), \qquad (\forall x \in [a,b] \ \text{için}) \qquad (22)$$

$$h_2 < h_1 \qquad (23)$$

kabulleri sağlansın. Bu koşullar altında, (a,b) aralığı içinde V_1 ne kadar sıfır değerine sahip olur ve işaret değiştirirse V_2 de en az o kadar işaret değiştirir ve sıfır değerini alır.

Eğer x=a noktasından itibaren aynı dereceden V_1 ve V_2 nin kökleri artan biçimde numaralandırılırsa, V_1 in köklerinin sayısı V_2 nin kökleri sayısından daha geniştir.

3.6- STURM'UN KARŞILAŞTIRMA TEOREMİ

V_1 ve V_2 sırası ile i=1,2 için (20) denkleminin çözümleri ve G_i, K_i (i=1,2) için

$$G(x,r_i) = G_i(x), \quad K(x,r_i) = K_i(x) \tag{24}$$

ise, V_1 in ardışık iki kökünün sınırladığı aralıkta, V_2 nin en az bir kökü bulunacaktır.

3.7- STURM'UN SALINIM TEOREMİ

$$KV_r' + HV_r = 0, \quad (x=b \text{ için}) \tag{25}$$

Denklemini sağlayacak biçimde r nin iki ardışık değeri p ve p' olusn. Bu durumda (a,b) aralığında $V_{p'}$ nün kökleri sayısı V_p nin kökleri sayısından bir fazladır.

19.y.y. öncesine ait olan tüm bu analiz yöntemlerinin günümüz okuyucusu tarafından kolaylıkla anlaşılabilmesi için bazı küçük değişikliklere gerek vardır. Bugünkü ders kitaplarında verilen Sturm-Liouville kuramının ifadesi, Sturm'un kendisinin verdiği ifadeden fark edilebilecek ölçüde ayrılık göstermektedir. Örneğin günümüzde V_r çözümleri Hilbert Uzayında vektörler olarak düşünüldüğünde bunların salınımlı davranışları ilginçliğini yitirmektedir.

Sturm'un ikinci önemli çalışması Spectral kuramı üzerindedir. Bu çalışmasında kısmi diferensiyel denklemin bir parametreye bağlı olarak adi diferensiyel denkleme nasıl dönüştürüleceğini ve çözümünün elde edilişini ayrıntılı olarak vermiştir [4]. Birbirine her zaman destek olan bu iki büyük matematikçinin kendi adları ile anılan kuram konusunda yalnızca bir ortak çalışmaları vardır [5]. Bu çalışmada V_r, (1) denkleminin çözümleri olmak ve (2) koşulunu sağlamak üzere

$$\varphi(x) = F(x) - f(x) \quad \text{için}$$

$$\int_a^b \varphi(x)V_r(x)dx = 0, \quad \forall r \quad R \quad \text{için})$$

özelliğinin varlığı kanıtlanmıştır. Bundan sonra Sturm'un önceki çalışmaları doğrultusunda Sturm-Liouville kuramına katkılar Liouville tarafından yapılmıştır.

4- LIOUVILLE'NİN ISI İLETİMİ ÜZERİNDE ÇALIŞMALARI

Liouville'nin Sturm-Liouville kuramı üzerine olan çalışmaları iki ana konu üzerinde toplanmaktadır.

i) Keyfi fonksiyonların, özdeğer fonksiyonları cinsinden Fourier serisine açılımı ve ortogonallik özellikleri.

ii)Kuramın farklı tipteki ve yüksek basamakta denklemlere genelleştirilmesi. Liouville'nin bu iki konudaki çalışmaları 1836-1838 yılları arasında yayınlanmıştır. Isı kuramına ilişkin çalışmalarında Fourier ve Poisson'un Liouville üzerinde yönlendirici etkileri olmuştur. Ayrıca sürekli olarak Sturm'u kaynak göstermesi nedeniyle bu konuya yönelik çalışmalarında arkadaşının büyük etkisi ilk itici gücü oluşturmuştur diyebiliriz.

Sturm ve Liouville'nin kurama yaklaşımlarında dikkate değer bir farklılık vardır.

Gerçi ortagonallik ilişkileri, özdeğerlerin gerçelliği ve Fourier katsayılarının belirlenmesi gibi bazı teoremleri ortak olarak kullanıyorlarsada, çalışmalarının içerdiği farklı hedefleri maçlamaktadır. Sturm, özdeğer fonksiyonların nicel davranışlarına yönelirken, Liouville, Fourier serilerinin açılımına ağırlık vermiştir. Liouville'nin ikinci basamaktan diferensiyel denklemler üzerine olan çalışması hemen hemen tümü ile "keyfi" fonksiyonların Fourier açılımları ile ilgilidir [6,7,8] .

Ardışık yaklaşıklıklar yöntemini kullanarak bir diferensiyel denklemin çözümlerinin varlığını ilk kez Liouville kanıtlamıştır. Serilerle çözümlerin yakınsaklığı ve ortogonallik ilişkileri üzerine özgün sonuçlar vermiştir. Sturm-Liouville kuramı üzerine olan çalışmasında Sturm'un yöntemini kullanarak zamandan bağımsız bir analiz yöntemi geliştirmiştir. Bu çalışmasında ayrıca genel Sturm-Liouville problemi olan (1) - (3) için Bessel eşitsizliğini kanıtlamıştır. Daha sonraki çalışmalarında Liouville, Sturm-Liouville kuramında elde edilen sonuçları,

$$dU/dt = d^3U/dx^3$$

$$V^{(3)}(x) + r\,V(x) = 0,$$

$$U^{(3)}(x) - r\,U(x) = 0,$$

$$V_r^{(3)}(x) + g(x)\,rV_r(x) = 0,$$

$$U_r^{(3)}(x) - g(x)\,rU_r(x) = 0,$$

gibi yüksek basamaktan denklemlere uygulamış ve ilginç sonuçlar elde etmiştir.

5- STURM-LIOUVILLE KURAMININ GELİŞİMİ

Kuram üzerinde daha sonraki yıllarda ve günümüzde yapılan çalışmalar kabaca iki ana grupta toplanabilir.

i) Genelleştirme

ii) Daha karmaşık ve güç problemlere uygulama.

Birbirini karşılıklı olarak etkileyen bu iki tür çalışma konusunda oldukça geniş bir kaynakça var. 1880 lerde, Lord Rayleigh, G. Kirchhoff ve diğerleri titreşim problemini incelerken Sturm'un teoremlerinin benzerini yüksek basamaktan sınır değer problemlerine uygulamışlardır. Başlangıçta verilen (1) denkleminin özel durumlarını örneğin, k(x) in [a,b] aralığında sıfır değerini alması halini Schläfli, daha genel biçimini de Böcher ve başka matematikçiler çalışmışlardır. F.Klein, adi diferensiyel denklemleri birden fazla parametreleri göz önüne alarak incelemiştir. Klein bu çalışmasında o güne kadar iki ayrı konu olan sınır değer problemi kuramı ile diferensiyel denklemlerin polinom tipi çözümlerini birleştirmiştir. Daha sonra Poincare', Laplace operatörleri ile kısmi diferensiyel denklemlerde spectral kuramını tanıtmıştır.

Kuramın daha güç problemlere uygulanması düzenli olarak gelişme göstermiştir. 1880-1890 yılları arasında bu konudaki ilginç çalışmalara diğerlerinin yanında Böcher, Heine, Dini, Poincare' örnek olarak gösterilebilir. Sturm-Liouville kuramına tümü ile yeni bir yaklaşımın 1890 ların sonunda genel integral kuramının gelişimi ile başladığı görülür.

Günümüzde Sturm-Liouville kuramı, Hilbert uzayında göz önüne alınan genel operatör kuramına oldukça yakın bir yaklaşımla incelenmekteidr. Tüm bu çalışmalara Fiziksel problemlerin esin kaynağı olamsı önemli bir yer tutmaktadır. Sturm-Liouville kuramı üzerinde oldukça geniş sayıda araştırma yapılmış ve halende yapılmaktadır. Günümüzde kuramın pek çok araştırmacı tarafından kısmi diferensiyel denklemlere, fonksiyonel diferensiyel denklemlere genelleştirildiğini görüyoruz. Kuramın modern anlamdaki gelişimine 1900 lerin başından iitbaren Kneser- Hartman, Hille, Leighton, Nehari, Wintner, Fite, Morse, Reid... ve daha pek çok matematikçinin özgün katkıları olmuştur [2].

6- TARİHSEL SIRAYA GÖRE ÖZETLEME

Sturm-Liouville kuramının tarihsel gelişimini kilometre taşları diye adlandırabileceğimiz tarihlere göre şöylece özetleyebiliriz.

1763	- d'Alembert'in biribirine uymayan titreşimli teller üzerine makalesi
1803	- Sturm'un doğumu.
1807	- Fourier'in ilk ısı kuramı
1809	- Liouville'nin doğumu
1822	- Fourier'in "Théorie analytique de la Chaleur" isimli çalışmasının yayınlanması.
1823	- Poisson'un, özdeğerlerin gerçelliğine ilişkin ilk kanıtı.
1824	- Cauchy'nin varlık teoremi kanıtı.
1826	- Poisson'un özdeğerlerin gerçelliğine ilişkin yeni kanıtı
1829	- Direchlet'in trigonometrik Fourier serilerinin yakınsaklığına ilişkin çalışması.
1829	- Sturm'un kayıp olan çalışması

1830	- Liouville'nin ısı kuramındaki ardışık yaklaştırmalar yöntemini varlık teoreminin kanıtında kullanması.
1833	- Libri'nin Akademiye seçilmesi
1833	- Sturm'un iki büyük çalışmasının özetlenmesi
1835	- Liouville'nin Fourier serilerinin gerçel değerli olduğunu göstermesi.
1835/40	- Cauchy'nin varlık teoremi kanıtının yayınlanması.
1836	- Sturm'un iki büyük çalışmasının yayınlanması.
1836	- Liouville'nin üçüncü basamaktan sabit katsayılı diferensiyel denklemleri incelemesi.
1836	- Sturm'un Akademiye seçilmesi.
1837	- Liouville'nin Fourier serilerinin yakınsaklığına ilişkin iki kanıtı.
1837-38	- Liouville'nin Fizik ve Matematik üzerine dersleri
1838	- Liouville'nin değişken katsayılı yüksek basamaktan denklemleri incelemesi
1838	- Ecole Polytechnique'e, Sturm'un Prof.Liouville'nin asistanı olarak atanması
1838-40	- Liouville'nin kuramı en genel biçime uygulama çalışmaları
1839	- Liouville'nin Akademiye seçilmesi.
1855	- Sturm'un ölümü.
1879/80	- Rayleigh ve Kirchoff'un çubuk ve zarların titreşimi üzerine çalışmaları
1881	- Klein'in Lamé fonksiyonları üzerine çalışması.
1882	- Liouville'nin ölümü
1894	- Poincaré'in fark denklemlerinde spektral kuramı
1898/99	- Böcher'in Sturm'un metodunu somutlaştırması.
1904	- Kneser'in açılım teoremlerinin kanıtı.

1904/10 - Hilbert'in integral operatörlerle spektral kuramı.

1907 - Schmidt'in integral operatörlerle spektral kuramı.

KAYNAKLAR

1- Lützen, J., Sturm and Liouvilles work on ordinary linear diferential equations, the emergence of Sturm-Liouville theroy, Matematisk Institut Odense Unuversitet, preprints No: 1, 1982.

2- Swanson, C.A., Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press., New York 1968.

3- Sturm, C.F., Mémorie sur les Equations differentielles Linéaires du second ordre, Journ. Math. Pures Appl. Vol 1 (1836), 106 - 186.

4- Sturm, C.F., Mémorie sur une classe d'Equations a' différences partielles, Journ. Math. Pures. Appl. Vol 1 (1836), 373 - 444.

5- Liouville, J., and Sturm, C.F., Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis a' satisfaire a' une Méme équation différentielle linéaire, contenant un parametre variable, Journ. Math.Pures.Appl..Vol. 2 (1837), 220-223.

6- J.Liouville, Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de simus et de cosinus, Journ. Math.Pures.Appl. Vol. 1 (1836), 14-32.

7- J.Liouville, Mémoire sur une question déanalyse auxdifférences parti elles, Journ.Math.Pures.Appl.Vol 1 (1836), 33-74

8- J. Lioville, Note sur une maniére de généraliser la formule de Fourier, Journ.Math.Pures.Appl.Vol. 1 (1836), 102 - 105