Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi
2, 163-181, (1986)

SERİ DÖNÜŞÜMLERİ

Mehmet Ali SARIGÖL
E.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET

Bu çalışmada yavaş yakınsayan serileri hızlı yakınsayan serilere dönüştüren ve bu nedenle sonsuz serilerin toplamını elde etmede büyük kolaylık sağlayan Kummer ve Markoff seri transformasyonlarını inceledik.

TRANSFORMATIONS OF SERIES

SUMMARY

In this paper, we have studied Kummer's and Markoff's transformations of series which enable us to obtain the sum of the infinite series by transformating the slowly convergent series to rapidly convergent series.

1- GİRİŞ

Bu çalışmada serilerin toplamı için yeni bir kapalı ifade oluşturulmasından ziyade, nümerik hesaplamalarda kullanılan seri dönüşümlerinden bahsedeceğiz. İlerde göreceğimiz gibi, bu çeşit dönüşümler gerçekten önemli bir yer tutacaktır. Çünkü herhangi bir yakınsak seriyi gözönüne aldığımızda, böyle bir serinin toplamını kapalı bir şekilde hesaplamak, her zaman mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda toplamın önceden verilen bir hata ile yaklaşık değerini bulmak gerekir. Bunun için seriye uygun bir dönüşüm uygulanarak aynı toplama sahip, fakat verilen seriden daha hızlı yakınsayan ikinci bir seriyi elde etmek daha kullanışlı olacaktır. Zira verilen serinin toplamının yaklaşık hesabı için, bu dönüşüm serisinden daha az sayıda terim almak yetecektir. İşte bununla ilgili olarak Kummer ve Markoff seri dönüşümlerini bu çalışmada inceleyeceğiz.

Şimdi yukarıda sözünü ettiğimiz serilerin nümerik hesabından bahsedelim. Bir serinin nümerik hesabı denince, anlayacağımız şey daima, ilgili sayının bir ondalık kesirle ifadesi olacaktır. Böyle bir sonsuz ondalıklı kesri tam olarak, yazmağa olanak bulunmayacağından, bunu bir yerde kesmek gerekir. Bu ondalık hanelerini bir yerde kesme olayını biraz açıklıyalım. Örneğin e sayısını dört ondalıkla ifade etmek gerekirse, bunu 2,7182 sayısı ile yapabileceğimiz gibi 2,7183 sayısı ilede yapabiliriz. Birincisi virgülden sonra 7,1,8,2 rakamları e sayısının gerçek rakamları olduğundan, ikincisi ise virgülden sonra 7,1,8,3 rakamlarını almakla esayısının dört ondalıkla gösteriminde daha az hata yapıldığından dolayı doğrudur. Görüldüğü gibi, serilerin nümerik hesaplamalarının faydası serilerle temsil edilen sayıların arasında mukayese olanağı vermektedir. Şimdi yukardaki düşüncemizi bir örnekle açıklayalım.

Örnek 1.1 π sayısının yedi ondalığa kadar hesabı. ilkönce π nin hesabı için arctgx fonksiyonunun seriye açılımından uygun bir ifade arayalım.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots \qquad |x| < 1$$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ koyarsak,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + - \ldots\right]$$

açılımını elde ederiz. Bu açılıma nazaran, aşağıdaki açılım daha uygundur.

$$x = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) \text{ sayısı}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + - \ldots$$

açılımından kolaylıkla hesaplanır. α nın bu değeri için $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$ dır ve böylece

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2.\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2.\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

ve

$$\operatorname{tg}4\alpha = \frac{2.\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{2.\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

dır. Sonuç olarak 4α, $\frac{\pi}{4}$ den küçük bir miktar büyüktür.

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \beta$$

diyelim. Bu durumda

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(4\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg}4\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4\alpha . \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

olduğundan,

$$\beta = \operatorname{arctg}(\frac{1}{239}) = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots$$

elde edilir. Diğer taraftan $\pi = 4(4\alpha - \beta)$ olduğundan

$$\pi = 16\left[\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + - \dots\right] - 4\left[\frac{1}{1.239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} + \dots\right]$$

dir.

Eğer π yi ilk yedi ondalığa kadar hesap etmek istersek, kalanlar ve her bir terim için dokuz ondalığa kadar almak yeterli gelecektir. İlk seriyi $a_1 - a_3 + a_5 - + \dots$, ikinci seriyi $a_1^1 - a_3^1 + a_5^1 - + \dots$ ve bunların parçal toplamlarını sırasıyla S_v ve S_v^1 diyelim. Her bir terimi ondalık kesirlerle ifade edip, aşağıdaki şekilde toplayalım. Fakat ondalık kesirler halinde yazarken, yapılan hataları da pozitif ve negatif olduklarına göre, son ondalığın üzerine işaret koyarak belirtelim.

$$a_1 = \frac{1}{5} = 0{,}200000000 \qquad a_3 = 0{,}00266666\bar{7}$$

$$a_5 = \frac{1}{5.5^5} = 0{,}000064000 \qquad a_7 = 0{,}00000182\bar{9}$$

$$a_9 = \frac{1}{9.5^9} = 0{,}00000005\bar{7} \qquad a_{11} = 0{,}00000000\bar{2}$$

$$a_1 + a_5 + a_9 = 0{,}20006405\bar{7} \qquad a_3 + a_7 + a_{11} = 0{,}002668498^{---}$$

ve böylece

$$3,158328936 < 16\,\alpha < 3,158328970$$

elde edilir. Çünkü 16 ile çarptıktan sonra, 16 S_{11} e bir alt sınır ve bilmukabele bir üst sınır bulmak için, virgülden sonra dokuzuncu hanede $\frac{16}{2} = 8$ birim çıkarmak ve $\frac{48}{2} = 24$ birim eklemek gerekir.

$$0 < 16\,r_{11} < 2.10^{-9}$$

olması sebebiyle de nihayet sonuncuya dokuzuncu hanede daha 2 birim eklemeliyiz. Bu suretle $16\,\alpha$ nın yukarki sınırları bulunmuş olur. Bundan sonra

$$a_1^1 = 0,004184100^+$$

$$a_3^1 = 0,000000024^+$$

$$a_1^1 - a_3^1 = 0,004184076^{\pm}$$

ve $0 < r_3^1 < 10^{-12}$ dir. Şu halde

$$-0,016736307 < -4\,\beta < -0,016736302$$

olur ki, evvelki ile birlikte

$$3,141592629 < \pi < 3,141592668$$

elde edilir. Böylece, π sayısı tam olarak, ilk yedi ondalığa kadar hesaplanmış olur. Bu değer $\pi = 3,1415926$ dir. Böylece yukardaki ön bilgileri kısaca açıkladıktan sonra seri dönüşümlerini verebiliriz.

Şimdi her bir terimi sonsuz bir seri olan $\sum_{v=0}^{\infty} Z_v$ serisini gözönüne alalım ve bu serinin yakınsaklığını kabul edelim. Serinin terimlerini açık olarak aşağıdaki şekilde yazalım;

$$Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n} = a_{\infty} + a_{01} + \ldots + a_{0n} + \ldots$$

$$Z_1=\sum_{n=o}^{\infty} a_{1n} = a_{10}+a_{11}+\ldots+ a_{1n}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$Z_v=\sum_{n=o}^{\infty} a_{vn}=a_{vo}+a_{v1}+\ldots+a_{vn}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ayrıca $\sum_{v=o}^{\infty} a_{vn}=t_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ serilerinin de yakınsak olduklarını varsayalım. Acaba hangi koşullar altında $\sum_{n=o}^{\infty} t_n$ serisi yakınsaktır ve

$$\sum_{v=o}^{\infty} Z_v = \sum_{n=o}^{\infty} t_n$$

dır, yani hangi koşullar altında

$$\sum_{v=o}^{\infty}\sum_{n=o}^{\infty} a_{vn} = \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{v=o}^{\infty} a_{vn}$$

dır?

Eğer bu eşitlik gerçeklenirse $\sum_{v=o}^{\infty} Z_v$ serisinin dönüşümü elde edilmiş olacaktır. Bu çeşit dönüşüm, görüldüğü gibi verilen seri için yeni bir kapalı ifade vermektedir.

Teorem 1. (Cauchy çift seri teoremi)

(1) ifadesindeki her bir satır, yalnız mutlak yakınsak seri değil, aynı zamanda

$$\sum_{n=o}^{\infty} |a_{vn}| = \xi_v \quad (v=0,1,2,\ldots)$$

olduğunda, $\sum_{v=o}^{\infty} \xi_v = \sigma$ yakınsak olsun. Bu taktirde her bir sütun mutlak yakınsak seri oluşturur; ve eğer

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{vn} = t_n \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

dersek, bu taktirde $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ mutlak yakınsak ve

$$\sum_{v=0}^{\infty} Z_v = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$$

dir [1].

İspat. (1) ifadesindeki bütün terimleri içeren bir dizi oluşturalım. Bu dizinin terimlerini $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ile gösterelim. Bu durumda iddia ediyoruz ki, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsaktır. Çünkü $\sum_{n=0} |a_n|$ serisinin S_m parçal toplamlar dizisi sınırlıdır. Şöyle ki, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ terimlerini ilk k satırda bulunacak şekilde k'yı seçersek,

$$S_m \leqslant \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k \leqslant \sigma$$

elde ederiz. Diğer taraftan, mutlak yakınsak bir seri tekrar düzenlenebiliyor ve bu düzenleme serinin yakınsaklığını ve toplamını bozmuyordu. O halde uygun bir düzenlemeyle

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{v=0}^{\infty} Z_v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

elde edilir. Buda teoremin ispatını tamamlar.

1.1. Kummer Dönüşümü

Bu kısımda nümerik hesaplamalarda en çok kullanılan Kummer seri dönüşümünden bahsedeceğiz.

Kummer, önce pozitif terimli seriler için ortaya koyduğu aşağıdaki kriteri gözönüne aldı: Eğer, daima

$$P_n - P_{n+1} \frac{c_{n+1}}{c_n} \geqslant \rho > 0$$

kalacak şekilde pozitif p_n sayılarının bir dizisi bulunabiliyor ise; $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ dır.

İspat: Her n=o,1,... için

$p_n - p_{n+1} \frac{c_{n+1}}{c_n} > o \Rightarrow p_n c_n - p_{n+1} c_{n+1} > o$ olduğundan $(p_n c_n)$ dizisi monoton azalandır. O halde $(p_n c_n)$ dizisi pozitif terimli olduğundan dolayı, belli bir $\beta > o$ limitine sahiptir. Bu sebepten $\sum_{n=0}^{\infty} (p_n c_n - p_{n+1} c_{n+1})$ serisi yakınsaktır. Ayrıca

$c_n \leq \frac{1}{\rho} (p_n c_n - p_{n+1} c_{n+1})$ olduğundan dolayı $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ yakınsaktır.

Kummer, kendini bu kritere götüren araştırmalarında, kötü yakınsak serilerin iyi yakınsak serilere dönüşümüne varmıştır. Bu, sırf teorik ilgisiyle birlikte, büyük bir pratik anlam da taşır. Fakat bu, Kummer'in ortaya koyduğu ve sonraki gösterimlerinde de ortaya çıktığı gibi, garip bir biçim arzetmektedir. Bu sebebten bir çokları dönüşümü kullanışsız bulmaktadır. Bunun ifadesini aşağıdaki tanımla verelim.

Tanım 1.1.1. (Kummer seri dönüşümü)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq o$ olmak üzere gelişigüzel terimli yakınsak bir seri olsun. Öyle bir (α_n) sayı dizisi arayalım ki, bu dizi için

(i) $(\alpha_n a_n)$ dizisi belli bir w limitine yakınsasın.

(ii) Genel terimi

$$A_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=o,1,2...)$$

olan dizi, sıfırdan farklı bir A limitine yakınsasın. Bu taktirde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin Kummer dönüşümü

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{\alpha_o a_o - w}{A} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{A_n}{A}\right) a_n$$

eşitliği ile verilir.

İspatı aşikardır. Çünkü son eşitliğin sağ tarafı

$$= \frac{\alpha_0 a_0 - w}{A} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \frac{1}{A} \sum_{n=0}^{\infty} A_n a_n$$

dır. Halbuki (i) hipotezi gereğince $\sum_{n=0}^{\infty} A_n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n a_n - \alpha_{n+1} a_{n+1})$ serisi yakınsak ve toplamı $\alpha_0 a_0 - w$ olduğundan

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

Burada, anlaşılacağı üzere dönüşüm son derece açıktır. Fakat zor olan durum, α_n çarpanlarının (i) ve (ii) koşullarını sağlayacak şekilde nasıl bulunacağıdır.

Şimdi aşağıda göstereceğiz ki, Kummer dönüşümü daha açık olan bir başka dönüşüm ile özdeştir. Önce bu yeni dönüşümü tanımladıktan sonra bu iki dönüşümün özdeşliğini gösterelim.

Tanım 1.1.2. $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin ve $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ toplamı c olan ikinci bir yakınsak seri olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \gamma \neq 0$$

ise, $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma C + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \gamma \frac{c_n}{a_n}\right) a_n$$

dır [1,2] .

İspatı aşikardır, çünkü sağ tarafın $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ olduğu açıkça görülmektedir.

Bu iki dönüşümün özdeşliğini gösterelim.

a) Kummer dönüşümüne uygun olarak (α_n) dizisi bulunmuş ise, $c_n = \alpha_n a_n - \alpha_{n+1} a_{n+}$

terimleri yeni dönüşüm için mukayese serisini verirler. Çünkü, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisi yakınsak olup, toplamı $C=a_o \alpha_o - w$ dır ve

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{\alpha_n a_n - \alpha_{n+1} a_{n+1}} = \frac{1}{\alpha_n - \alpha_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{A_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{A} = \gamma \neq o$$

dır. Bu C ve γ değerleri ile yeni dönüşüm tamamen Kummer dönüşümüne dönüşür. Şöyle ki,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \gamma \neq o$$

olmak üzere

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n = \gamma C + \sum_{n=o}^{\infty} \left(1 - \gamma \frac{c_n}{a_n}\right) a_n$$

idi. Burada $C = \alpha_o a_o - w$ ve $\gamma = \frac{1}{A}$ değerlerini yerine koyarsak, bu durumda, $c_n = \alpha_n a_n - \alpha_{n+1} a_{n+1}$ olduğu ve A_n değeri gözönünde tutularak,

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n = \frac{\alpha_o a_o - w}{A} + \sum_{n=o}^{\infty} \left(1 - \frac{A_n}{A}\right) a_n$$

elde edilir ki, bu da bize Kummer dönüşümünü verir.

b) Tersine olarak dönüşüm tanım 1.1.2. şeklinde yapılmış ise ve buna uygun olarak bir $\sum_{n=o}^{\infty} c_n$ mukayese serisi bulunmuşsa, $\alpha_n = \frac{r_n}{a_n} = \frac{c_n + c_{n+1} + \ldots}{a_n}$ sayıları tanım 1.1.1. deki (i) ve (ii) şartlarını sağlarlar. Gerçekten

(i) $\alpha_n a_n = r_n \to o$ $(=w)$

(ii) $A_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$= \frac{r_n}{a_n} - \frac{r_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \frac{r_n - r_{n+1}}{a_n} = \frac{c_n}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\gamma} \qquad (=A)$$

dır. Fakat A nın ve w nın bu değerleri ile Kummer dönüşümü tamamen yeni şekli alır. Zira $\alpha_o a_o = \sum_{n=o}^{\infty} c_n = C$ dır.

1.2. Kummer Dönüşümünün Nümerik Hesaplara Uygulaması

Nümerik hesaplamalardaki seri dönüşümlerinin amacı, yakınsaklık hızını arttırmaktır. Kummer dönüşümü de böyle yakınsaklık hızını artıran dönüşümlerden biirdir. Çünkü tanım 1.1.2. deki Kummer dönüşümünün ifadesini gözönüne alacak olursak, $(1-\gamma \frac{c_n}{a_n}) \to o \; (n \to \infty)$ iken

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n = \gamma C + \sum_{n=o}^{\infty} (1-\gamma \frac{c_n}{a_n}) \, a_n$$

idi. Bu yeni serinin terimleri (bir indisten sonra) verilen serinin terimlerinden daha küçük olduğundan, daha hızlı yakınsamaktadır. Burada görüldüğü gibi, $(1-\gamma \frac{c_n}{a_n})$ çarpanları baştan itibaren ne kadar küçük ise, diğer bir deyimle $\sum_n c_n$ nin terimleri $\sum_n a_n$ nin terimlerine ne kadar iyi uyuyorsa o oranda yakınsaklığın hızı artacaktır.

Şimdi Kummer dönüşümüyle ilgili bir örnek verelim.

Örnek 1.2.1.

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2 (n+\alpha+1)^2 \dots (n+\alpha+p-1)^2} \qquad \begin{cases} \alpha \neq o, -1, -2, .. \\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

serisini gözönüne alalım. Burada $c_n = (n+y)a_n - (n+y+1)a_{n+1}$ $(n=1,1,\dots)$ şeklinde ele alalım ve y değerini (n'den bağımsız) c_n terimleri a_n terimlerine mümkün olduğu kadar yakın olacak şekilde alalım. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} n.a_n = o$ olduğundan

$$C = \sum_{n=o}^{\infty} c_n = \sum_{n=o}^{\infty} (n+y)a_n-(n+y+1)a_{n+1}$$

$$= y.a_o = \frac{y}{\alpha^2(\alpha+1)^2 \ldots (\alpha+p-1)^2}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$c_n=(n+y)a_n-(n+y+1)a_{n+1}$$

$$=(n+y)\ \frac{(n+\alpha+p)^2-(n+\alpha)^2}{(n+\alpha)^2\ldots(n+\alpha+p)^2} - \frac{(n+\alpha)^2}{(n+\alpha)^2\ldots(n+\alpha+p)^2}$$

$$= \frac{(2p-1)n^2+(2p\alpha+2py-2\alpha+p^2)n+2p\alpha y-\alpha^2+yp^2}{(n+\alpha)^2\ldots(n+\alpha+p)^2}$$

dır. Böylece

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{(n+\alpha+p)^2}{(2p-1)n^2+(2p\alpha+2py-2\alpha+p^2)\ n+2p\alpha y-\alpha^2+yp^2}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{2p-1}$$

bulunur. O halde verilen serinin Kummer dönüşümü

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n = \frac{ya_o}{2p-1} + \sum_{n=o}^{\infty} \left(1-\frac{(n+y)a_n-(n+y+1)a_{n+1}}{(2p-1)a_n}\right) a_n$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki ifadeyi düzenleyelim.

$$1-\gamma\frac{c_n}{a_n} = 1-\frac{c_n}{(2p-1)a_n}$$

$$= \frac{(3p^2+2p\gamma-2p-2py)n+(p+\alpha)^2(2p-1)-py^2-2\alpha py-\alpha^2}{(2p-1)(\alpha+n+p)^2}$$

Burada sadelik için n li terimi yok etmek istersek, yani

$3p^2+2p\alpha-2p-2py=0 \Rightarrow y=\alpha+\frac{3}{2}\cdot p-1$ alırsak, yukardaki ifademiz

$$1-\frac{c_n}{(2p-1)a_n}=\frac{p^3}{2(2p-1)}\cdot\frac{1}{(n+\alpha+p)^2}$$

olur. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2\ldots(n+\alpha+p-1)^2}=\frac{ya_0}{2p-1}+\frac{p^3}{2(2p-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2\ldots(n+\alpha+p)^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\frac{3}{2}p-1)}{(2p-1)\alpha^2(\alpha+1)^2\ldots(\alpha+p-1)^2}+\frac{p^3}{2(2p-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2\ldots(n+\alpha+p)^2}$$

elde edilir. Böylece bu dönüşüm paydaya ek bir karesel çarpan getirmektedir. Yani, dönüşüm başarılıdır. Özel olarak:

a) $\alpha=1$ alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2\ldots(n+p)^2}=\frac{\frac{3}{2}p\cdot\frac{1}{2p-1}}{1^2\cdot2^2\ldots p^2}+\frac{p^3}{2(2p-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2\ldots(n+p+1)^2}$$

olur. Daha açık olarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\ldots(k+p-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2\ldots(n+p)^2}=S_p$$

dersek,

$$S_p = \frac{3p}{2(2p-1).1^2.2^2\dots p^2} + \frac{p^3}{2(2p-1)} S_{p+1}$$

ɔulunur. Bu formül $s=S_1= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi için çok hızlı yakınsayan bir ;eri verir.

b) $\alpha = \frac{1}{2}$ koyalım. Benzer olarak,

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2.(2n+3)^2\dots(2n+2p-1)^2} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} p-1).\frac{1}{2p-1}}{(\frac{1}{2})^2 . (\frac{3}{2})^2\dots (p-\frac{1}{2})^2}$$

$$+ \frac{p^3}{2(2p-1)} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\dots(n+p+\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{3p-1}{2(2p-1)}.\frac{1}{1^2.3^2\dots(2p-1)^2}. + \frac{4p^3}{2(2p-1)}. \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\dots(2n+2p+1)^2}$$

lde edilir. Bu dönüşüm de $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ serisi için daha hızlı olarak ıkınsayan bir seri verecektir.

.3. Markoff Dönüşümü

ı kesimde Markoff dönüşümünü tanımlayıp, önemli özelliklerini vereceğiz. ıha sonra bunun, daha düzenli ve daha açık olan bir başka dönüşümle denkliği- göstereceğiz.

.rkoff dönüşümündeki hipotezler, gerek problemin anlamı bakımından gerekse ıalize edilebilmesi bakımından Kummer dönüşümünden daha az açıktırlar. Burada ğişik bir gösterimle bu durumu daha kullanışlı hale getireceğiz.

nım 1.3.1. (Markoff dönüşümü)

$_{vn}$) ve (B_{vn}) ($v,n=o,1,2,\dots$) iki çift dizi olsun ve bunlar şu koşulları gerçeklesinler:

(i) Daima $A_{vn}-A_{v,n+1}= B_{vn}-B_{v+1,n}$

(ii) Her sabit n için $\sum_{v=0}^{\infty} A_{vn} = Z_n$ yakınsak

(iii) $\lim_{n\to\infty} Z_n=o$

(iv) Her sabit n için $\lim_{v\to\infty} B_{vn} = o$

Bu taktirde Markoff dönüşümü

$$\sum_{v=0}^{\infty} A_{vo} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{on}$$

eşitliği ile tanımlanır [2] . Bunu kısaca şu şekilde gösterebiliriz.

(i) deki eşitlik v=o,1,2,... için yazılır ve sonra sıfırıncıdan v nünc kadar toplanırsa,

$$(A_{on}+A_{1n}+...+A_{vn}) - (A_{o,n+1} + A_{1,n+1} +...+A_{v,n+1}) = B_{on} - B_{v+1,n}$$

bulunur. Eğer $v\to\infty$ yapılırsa (ii) ve (iv) koşullarından $Z_n - Z_{n+1} = B_{on}$ el edilir. Buradan da $B_{oo}+B_{o1} +...+B_{on}=Z_o - Z_{n+1}$ çıkar. Burada $n \to \infty$ yapılır ve (iii) koşulu gözönüne alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{on} = Z_o = \sum_{v=0}^{\infty} A_{vo}$$

elde edilir. Böylece istenen gerçeklenmiş olur.

Bu dönüşümün evvelce bazı sakıncalarını belirtmiştik. Dönüşümün, birbirler belli bir şekilde bağlı iki çift diziden hareket etmesi, bu dizilerin, anl hemen kavranamayan daha üç hipotezi gerçeklemek zorunda olmaları bu sakınc idi. Bundan başka bu dönüşüm, uygulamalar içinde rahat bir yöntem değildir çünkü verilen ve transformasyonu istenilen bir seriden hareket edilmez. Ya özel hallerde, bu dönüşümün nasıl alınacağı asla belli değildir ve bu yüzden de, dönüşümün yakınsaklık üzerindeki etkisini hemen kontrol etmeye imkan yoktur.

Aşağıdaki gösterimler bu eksiklikleri kaldırmaya yarayacaktır. Verilen yakınsak bir

$$s = \sum_{v=o}^{\infty} z_v = z_o + z_1 + \ldots + z_v + \ldots$$

serisinden hareket edelim. Bu serinin her bir terimini mutlaka yakınsaması gerekmeyen ve kalan terimleri yazılmış olan

$$z_v = a_{vo} + a_{v1} + \ldots + a_{vn} + r_{v,n+1} \qquad \begin{cases} v,n=o,1,2,\ldots \\ \\ r_{vo} = z_v \end{cases}$$

sonsuz bir seri olarak düşünelim. Gösterim öyle olsun ki,

$$\begin{bmatrix} a_{oo} & a_{o1} \ldots & a_{on} \ldots \\ a_{1o} & a_{11} \ldots & a_{1n} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{vo} & a_{v1} \ldots & a_{vn} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

matrisindeki sütunlar, yakınsak $\sum_{v=o}^{\infty} a_{vn} = t_n$ $(n=o,1,2,\ldots)$ serileri olsun. Bu taktirde problem, Markoff dönüşümünden çift seriler teorisinde bilinen şu soruya özel bir cevap vermekten ibaret olurdu: Hangi koşullar altında sütun toplamlarının $\sum_n t_n$ serisi yakınsak ve

$$\sum_{n=o}^{\infty} t_n = \sum_{v=o}^{\infty} z_v$$

dır.

Şimdi aşağıdaki hatırlatmaları yaptıktan sonra, yukardaki sorumuza cevap veren teoremi ifade ve ispat edelim. Biliyoruz ki,

$$\sum_{v=0}^{\infty} z_v \quad \text{ve} \quad \sum_{v=0}^{\infty} a_{vo}$$

serileri yakınsak olduğunda

$$\sum_{v=0}^{\infty} (z_v - a_{vo})$$

serisi de yakınsaktır. Buna benzer şekilde her sabit $m > 1$ için

$$\sum_{v=0}^{\infty} (z_v - a_{vo} - a_{v1} - \dots - a_{v,m-1})$$

serisi de yakınsaktır. Görüldüğü gibi bu serinin terimleri kalan terimlerden oluşmaktadır. Burada her bir satırın kalan terimlerini r_{vm} $(v=o,1,2,\dots)$ ile gösterelim ve

$$r_{vm} = \sum_{n=m}^{\infty} a_{vn}$$

olmak üzere

$$R_m = \sum_{v=0}^{\infty} r_{vm}$$

diyelim. Burada (1) ifadesindeki her bir sütun yakınsak bir seri oluşturduğundan her sabit m için $R_m = \sum_{v=0}^{\infty} r_{vm}$ serileri de yakınsaktır.

Teorem 1.3.1. (Markoff seri dönüşümü teoremi)

(1) ifadesindeki her bir satır ve sütunların, yakınsak seriler olmak üzere $\sum_{v=0}^{\infty} z_v = z_o + z_1 + \dots$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} t_r$

serisinin yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = R$ mevcut ol-olmasıdır ve

$$\sum_{v=0}^{\infty} z_v = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$$

eşitliğinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{m\to\infty} R_m = R = o$$

olmasıdır [1] .

İspat: $a_{vn} = r_{vn} - r_{v,n+1}$ $(v,n=o,1,2,\dots)$

dır. Buna göre

$$a_{on} + a_{1n} + \dots + a_{qn} = (r_{on} + r_{1n} + \dots + r_{qn}) - (r_{o,n+1} + r_{1,n+1} + \dots + r_{q,n+1})$$

olur. Burada $q\to\infty$ yapılırsa,

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{vn} = R_n - R_{n+1}$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = R_o - \lim_{n\to\infty} R_n$$

bulunur. Görülüyor ki, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R$ mevcut ise $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n$ serisi yakınsak ve toplamı $R_o - R$ dir. Eğer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n$ yakınsak ise $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = R$ mevcuttur. Ayrıca, eğer $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = o$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = R_o = \sum_{v=0}^{\infty} z_v$$

dır, tersine

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{v=0}^{\infty} z_v$$

ise $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = o$ elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Demek ki, bu dönüşüm esas itibarıyle, verilen serinin bir çift seriye dönüştürülmesinden ibarettir. Burada satırlar toplamı $\sum_v z_v$ ve sütunlar toplamı $\sum_n t_n$ serilerinin her ikisi de yakınsak ve aynı toplama sahiptirler.

Eğer her bir satırın yakınsak olması zorunluluğunu kaldırırsak,

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{vn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{vn}$$

eşitliğinin geçerli olması için yani, iki toplamının sırasının değiştirilebilmesi için $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$ olması yeterlidir.

Şimdi tanım 1.3.1. ile verilen, Markoff dönüşümü ile teorem 1.3.1. de verilen dönüşümlerin denkliğini gösterelim.

a) Eğer dönüşüm teorem 1.3.1. deki yekilde kullanılıyor ise, $A_{vn}=r_{vn}$ (satır kalanı) ve $B_{vn}=r'_{vn}$ (sütun kalanı) koyalım.

Bu taktirde

(i) $a_{vn}=A_{vn}-A_{v,n+1}=B_{vn}-B_{v+1,n}$

(ii) $\sum_{v=0}^{\infty} r_{vn} = \sum_{v=0}^{\infty} A_{vn}$ serisi her sabit n için yakınsaktır.

(iii) $Z_n = R_n$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} Z_n=0$ dır.

(iv) Her sabit n için $\lim_{v\to\infty} B_{vn} = 0$ dır. $B_{vn}=r'_{vn}$ yakınsak serinin kalan terimidir. O halde

$$A_{vn}=r_{vn}=\sum_{i=n}^{\infty} a_{vi} \Rightarrow A_{vo}=r_{vo} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{vn} = z_v$$

$$B_{vn}=r'_{vn}=\sum_{i=v}^{\infty} a_{in} \Rightarrow B_{on}=r'_{on} = \sum_{v=0}^{\infty} a_{vn}=t_n$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{v=0}^{\infty} z_v \text{ eşitliğimiz } \sum_{v=0}^{\infty} A_{vo} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{on} \text{ eşitliğine döner.}$$

b) Tersine, eğer dönüşüm tanım 1.3.1. anlamında yapılmış ise, $z_v=A_{vo}$ ve $a_{vn}=A_{vn}-A_{v,n+1}=B_{vn}-B_{v+1,n}$ koyalım. Bu taktirde n=o için Markoff dönüşümünün (ii) hipotezi gereğince

$\sum_{v=0}^{\infty} A_{vo} = \sum_{v=0}^{\infty} z_v$ serisi yakınsaktır ve (iv) gereğince her bir $\sum_{v=0}^{\infty} a_{vn}$

sütun serisi yakınsaktır. Ayrıca $a_{vn}=B_{vn}-B_{v+1,n}$ ise $a_{on}+a_{1n}+\ldots+a_{vn}=B_{on}-B_{v+1,n}$ dır. Buradan $\sum_{v=0}^{\infty} a_{vn}=B_{on}=t_n$ dersek önceden yakınsak olan $R_n=\sum_{v=0}^{\infty} r_{vn}$

toplamında (iii) gereğince $\sum_{v=0}^{\infty} A_{vn}=\sum_{v=0}^{\infty} r_{vn}=Z_n$ ve $\lim_{n\to\infty} Z_n=0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} R_n=0$ bulunur.

Demek ki yeni dönüşümün bütün koşulları gerçeklenir ve $\sum_{v=0}^{\infty} A_{vo} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{on}$ eşitliği tamamen $\sum_{n} t_n = \sum_{v} z_v$ eşitliğine dönüşür. O halde teorem 1.3.1. anlamında verilen dönüşümdeki satırların yakınsak olması zorunluluğunu kaldırdığımızda, bu iki dönüşüm denk olmaktadır. Markoff dönüşümünün en iyi uygulamaları teorem 1.4.3. ve teorem 1.4.4. dir [3].

KAYNAKLAR

1- Knopp, K; Theory and Application of infinite series, Blackie, (1944)

2- Knopp, K; Einige Bemerkungen zur Kummerschen and Markoffschen Reihen transformation; Sitzungsberichte der, Berl.Math.Ges. Vol. 19,pp.4-17(1919)

3- Sarıgöl,M.A; Seri Transformasyonları ve Sonsuz Serilerin Toplanabilme Yöntemleri, Yük.Lis. Tezi, A.Ü.F.F. (1982).