Erc.Üniv.Fen Bil.Derg.11,1-2 (1995) 65-72

KOMPAKT YÖNLENDİRİLEBİLİR İNDİRGENEMEZ 3-MANİFOLDLARIN BİR TOPOLOJİK SINIFLANDIRILMASI

İsmet ALTINTAŞ
Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

ÖZET.

Bu çalışmada, izomorf esas gruplara sahip, kompakt yönledirilebilir indirgenemez 3-boyutlu manifoldların homeomorf oldukları gösterildi.

ABSTRACT.

In this study, it is shown that the compact, orientable irreducible 3-dimensional manifolds are homeomorfic if they have isomorfic fundamental groups.

1. GİRİŞ.

Stallings bir çalışmasında, izomorf esas gruplara sahip iki kapalı yönlendirilebilir indirgenemez 3-boyutlu manifoldun homeomorf olup olmadıkları sorusunu sorar[1].

Bu çalışmada bu soru, kompakt indirgenemez 3-boyutlu manifoldlar için olumlu cevaplandırıldı. Böylece bu manifoldların esas gruplarına bağlı olarak bir topolojik sınıflandırılması yapıldı.

M, bir kompakt 3-manifold olsun. Eğer M nin sınırı $\partial M = \varnothing$ ise, M kapalıdır. Böylece ele aldığımız soru $\partial M = \varnothing$ için Stalling'in sorusu ile aynıdır. $\partial M \neq \varnothing$ durumu, bu soruyu biraz daha genişletir.

1.1. Tanım.

M bir 3-manifold olsun. Eğer M içinde her 2-küre bir 3-top sınırlarsa, M ye indirgenemezdir denir[2].

1.2. Tanım.

M, N ve F eğrisel bağlantılı ve lokal eğrisel bağlantılı Haussdorf uzaylar ve $f: M \to N$ bir dönüşüm olsun. Eğer her bir $n \in N$ noktasının bir U komşuluğu varsa ve

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \to & U \times F \\ & U & \end{array}$$

diyagramı tutarlı olacak şekilde bir $f^{-1}(U) \to U \times F$ homeomorfizmi varsa $f: M \to N$ dönüşümüne F lifli bir lifleme denir. Ayrıca M ye toplam uzay, N ye taban uzay ve

$n \in N$ için her bir $f^{-1}(n)$ kümesine bir lif denir. Bu lif F ile homeomorftur.

M, taban uzayı S^1 birim çemberi olan bir F lif uzayının bir toplam uzayı olsun. Burada F eğrisel bağlantılıdır.

$$\pi_2(S^1) = 0, \quad \pi_0(F) = 0, \quad \pi_1(S^1) = Z$$

gerçeklerini dikkate alarak

$$\pi_2(S^1) \to \pi_1(F) \to \pi_1(M) \to \pi_1(S^1) \to \pi_0(F)$$

tam homotopi dizisinden yani,

$$0 \to \pi_1(F) \to \pi_1(M) \to Z \to 0$$

tam homotopi dizisinden $\pi_1(M)$ nin bir $\pi_1(F)$ normal alt gruba sahip olduğu ve

$$\pi_1(M) \,/\, \pi_1(F) \cong Z$$

olduğu sonucuna varırız. Eğer M bir kompakt 3-manifold ise, F yi bir kompakt 2-manifold olarak almak uygun olacaktır. Bunun doğruluğu aşağıdaki Stallings teoremi ile verilmiştir.

1.3. Teorem (Stallings). M bir kompakt 3-manifold olsun. Eğer $\pi_1(M)$,

$$\pi_1(M) \,/\, G \cong Z$$

olacak şekilde bir sonlu olarak doğurulmuş G normal alt gruba sahipse, bu durumda,

a. G, M içine yerleştirilmiş bir T 2-manifoldunun esas grubuna izomorftur,

b. Eğer G, Z / 2Z ye izomorf değilse ve M indirgenemez ise, bu durumda M, taban uzayı bir çember olan T lif uzaylı bir toplam uzaydır[1].

2. ESAS TEOREM

2.1. Teorem. M1 bir kompakt yönlendirilebilir indirgenemez 3-manifold ve $\pi_1(M) = G_1$ bir H_1 normal alt gruba sahip olsun öyleki;

a. H_1 sonlu olarak doğurulmuştur,

b. $G_1 / H_1 \cong Z$,

c. H_1 , Z_2 ye izomorf değildir.

M_2 herhangi bir kompakt yönlendirilebilir indirgenemez 3-manifold olsun. Bu durumda $\pi_1(M_1) = G_1 \cong \pi_1(M_2) = G_2$ ise M_1, M_2 ye homeomorftur.

İspat. 1. $\partial M_1 = \varnothing$ ve $\partial M_2 = \varnothing$ durumu. Bu durumda M_1 ve M_2 kapalı manifoldlardır. 1.3.Teorem ile M_1 bir N_1 kapalı 2-manifold ile S^1 çemberi üzerinde bir liflemeye sahiptir. $\pi_1(N_1) = H_1$ olsun. Hipotezde $G_1 / H_1 \cong Z$ olduğundan N_1, M_1, S^1 in esas gruplarının bir

$$1 \rightarrow H_1 \rightarrow G_1 \rightarrow Z \rightarrow 1 \tag{1}$$

homotopi dizisini elde ederiz. $\pi_1(M_1) = G_2$ diyelim ve $g^* : G_1 \rightarrow G_2$ bir izomorfizm olsun. Bu durumda g^*,

$$1 \rightarrow H_2 \rightarrow G_2 \rightarrow Z \rightarrow 1 \tag{2}$$

homotopi dizisini oluşturur. H_1 ve H_2 nin, Z nin bir doğurayı ile oluşturulan $\phi_1{}^*$ ve $\phi_2{}^*$ otomorfizmleri verilsin öyleki; H_1 ve H_2 nin bu otomorfizmleri H_1 ve H_2 üzerine eşlenik ile etki etsinler. g^* bir izomorfizm olduğundan

$$g^* \phi_1{}^* = \phi_2{}^* (g^* / H_1) \qquad (3)$$

olduğu kabul edilebilir. 1.3.Teorem ile M_2 nin (2) yi oluşturan bir liflemesi vardır. Bunun lif uzayını N_2 ile gösterelim. Böylece $H_1 = \pi_1(N_2)$ olur. M_1 ve M_2 bir lif boyunca kesilerek $N_1 \times I$ ve $N_2 \times I$ dan elde edilir. Bu kesikleri tekrar birleştiren dönüşümleri

$$\phi_i : N_i \times 0 \rightarrow N_i \times 1, \quad i = 1,2$$

ile gösterelim. Açıkça ϕ_i , $\phi_i{}^*$ ı oluşturur. Şimdi $g : N_1 \times I \rightarrow N_2 \times I$ homeomorfizmi

$$\phi_2 (g / N_1 \times 0) = g \phi_1 \qquad (4)$$

şartını sağlayarak bulunabiliyorsa, $g : M_1 \rightarrow M_2$ bir homeomorfizm tanımlar ve ispat tamamlanmış olur.

$g^* : \pi_1(N_1) \rightarrow \pi_1(N_2)$ herhangi bir izomorfizm olsun. Bu durumda $g_1{}^* = g^*$ olacak şekilde bir $g_1 : N_1 \rightarrow N_2$ homeomorfizmi vardır[3]. Şimdi

$$(g\phi_1)^* = (\phi_2 (g_1 / N_1 \times 0))^*$$

olur. $g\phi_1$ ve $\phi_2 (g_1 / N_1 \times 0)$ dönüşümlerini ayıran N_2 nin bir izotopisi h_t, $t \in I = [0,1]$, olsun. Bu durumda,

$$h_0 g_1 \phi_1 = g_1 \phi_1 , \quad h_1 g_1 \phi_1 = \phi_2 (g_1 / N_1 \times 0)$$

olur. $g : N_1 \times I \rightarrow N_2 \times I$ dönüşümünü

$$g(x , t) = (h_t g_1 , t)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$g(x,1) = (h_1 g_1, 1)$$

$$g(x,0) = (h_0 g_1, 0) = (g_1, 0)$$

olur. Böylece

$$g\,\phi_1 = h_1 g_1 \phi_1 = \phi_2(g_1 / N_1 \times 0)$$

olur.

$$\phi_2(g / N_1 \times 0) = \phi_2(h_0 g_1 / N_1 \times 0) = \phi_2(g_1 / N_1 \times 0)$$

olduğundan

$$g\,\phi_1 = \phi_2(g / N_1 \times 0)$$

olur. Böylece (4) sağlanır ve teorem $\partial M_1 = \varnothing$ ve $\partial M_2 = \varnothing$ durumu için ispatlanır.

2. $\partial M_1 \neq \varnothing$ ve $\partial M_2 \neq \varnothing$ durumu.

$\partial M_1 \neq \varnothing$ olması durumunda da yine 1.3.Teoreme göre M_1 bir Q_1 2-manifold lif uzayı ile S^1 üzerinde liflenir. M_1 yonlendirilebilir olduğundan bu lifleme, M_1 in her bir sınır birleşeninin bir tor olduğunu gerektirir. Bu sınır torlarını $T_1, \ldots, T_n$ ile gösterelim. Her bir T_i $i = 1, \ldots, n$, içinde m_i ve l_i eğrilerini seçelim öyleki m_i liflemenin izdüşümü altında S^1 i bir kere örtsün ve her bir l_i bir lif içinde bulunsun. Bu durumda m_i, l_i,T_i nin $\pi_1(T_i)$ esas grubunu doğurur. Ayrıca her bir m_i, l_i nin M_1 içinde sıfıra homotop olduğu çıkar. Her bir T_i yi M_1 içinde bir x taban noktasına bir α_i yayı ile bağlayalım. Bu durumda yuklarıda söylediklerimizden

$\pi_1(T_i \cup \alpha_i , x) \rightarrow \pi_1(M_1 , x)$

doğal dönüşümü bir monomorfizmdir. Şimdi

$$\pi_1(M_1 , x) = G_1$$

grubunu ve

$$\pi_1(T_i \cup \alpha_i , x) = A_i$$

alt gruplarını gözönüne alalım. Eğer α_i yaylarının farklı kümeleri seçilirse, $\overline{A_i}$ alt gruplarının bir kümesini elde ederiz. Burada her bir $\overline{A_i}$, A_i nin bir eşleniğidir. Bunun ışığında

$$(G_1 , [A_1] ,..., [A_n])$$

topolojik sabitini inceleyebiliriz. Burada, her bir $[A_i]$, A_i yi ihtiva eden eşlenik sınıftır. Bu sabite M_1 in çevresel sistemi diyeceğiz. Bu sistemin ayrıntıları için [4] e bakılabilir.

Şimdi M_2, $\pi_1(M_2 , x) = G_2$ ile

$$(G_2 , [B_1] ,..., [B_n])$$

çevresel sisteme sahip bir kompakt indirgenemez 3-manifold olsun. Eğer $[A_i]$ yi $[B_i]$ üzerine dönüştüren bir $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ izomorfizmi varsa, M_1 in M_2 ye homeomorf olduğunu iddia edebiliriz. Bu iddianın ispatı teoremin de ispatıdır.

1.3.Teorem ile M_2 , bir Q_2 2-manifold lif uzayı ile S^1 üzerinde liflenir. Burada

$$\pi_1(Q_2) = \phi(\pi_1(Q_1))$$

dir. M_2 nin sınır torları $S_1 ,..., S_n$ olsun. Şimdi y : T_i » a_i Æ S_i » b_i homeomorfizmini tanımlayalım öyleki, $\pi_1 (T_i \cup \alpha_i) = A_i$ içindeki her bir y elemanı için $\psi^* = \phi$ dir. Burada

β_i, S_i yi M_2 içinde taban noktasına bağlayan yaydır. α_i lerin ve benzer olarak β_i lerin hepsi bir tek lif üzerinde bulunduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. [5]'e göre bir ψ_{n+1} homeom fizmi, α_i yi ihtiva eden liften β_i yi ihtiva eden life, $\pi_1(Q_1) = H_1$ içindeki y elemanları için

$$\psi^*_{n+1} = \phi$$

yi sağlayarak ve

$$(T_i \cup \alpha_i) \cap (\alpha_i \text{ yi}$$

ihtiha eden lif) üzerinde S ψ_i ile uyuşarak, inşa edillebilir. Şimdi $\partial M_1 \cup$ (bir lif) üzerin tanımlanan homeomorfizme ψ diyelim. S ψ, $\partial M_1 \cup$ (bir lif) in bir küçük kapalı çarpım kom luğu-na genişleyebilir. Bu komşuluğu U ile ve U üzerinde tanımlanan homeomorfizmi ψ il gösterelim. Şimdi M - intU, cinsi bir olan bir katı tordur ve böylece ψ^*,

$$\pi_1(\partial(M_1 - \text{intU})) \rightarrow \pi_1(M_1 - \text{intU})$$

içermesinin çekirdeğini

$$\pi_1(\partial(M_2 - \text{intU})) \rightarrow \pi_1(M_2 - \text{int}\,\psi(U))$$

içermesinin çekirdeği üzerine dönüştürür. (Komütatör alt grup yerine H_1 alındığında bu if tamamen [5] deki gibidir.) Böylece, [5] de olduğu gibi ψ , M_1 in tamamına genişleyebilir ve pat biter.

KAYNAKLAR

1. Stallings, J., On fibering certain 3-manifold, Topology of 3-manifolds and related topics Prendice - Hall , Englewood Cliffs, N.J.,1960,95-100.

2. Waldhausen, F. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87, 1968 56-88.

3. Nielson, J., Untersuchungen zur toplogie der geschıossenen zweiseitigen flahen, Acta. Math., 50, Satz 11, 1927, 266.

4. Fox, R. H., On the complementary demoin of a certain pair of inequivalent knots, Neder Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 55=indag. Math. 14, 1952, 37-70.

5 Neuwirth, L., The algebraic determination of type of the complement of a knot, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 1961, 906