Erc. Üniv. Fen Bil. Derg. 11, 1-2 (1995) 1-9

GROUPOİDLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Osman MUCUK

Erciyes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, KAYSERİ

ÖZET

Bu makalede gruplarda bilinen bazı özellikleri gruplardan daha genel olan groupoidlere genelleştiriyoruz.

ABSTRACT

In this paper we will generalize some properties known on groups to the more general groupoids.

GİRİŞ

Groupoid her elemanının tersi olan bir kategoridir. Groupoid kavramı 1920 lerde Brandt ve Baer tarafından tanıtıldı. Daha sonra 1950 lerde Ehresmann [2] de groupoidi diferensiyel geometriye tanıttı. 1960 larda Pradines [6] da groupoidler, özellikle topological groupoidler hakkınba bazı önemli çalışmalar yaptı, ve daha sonra [1] ve [5] de bu çalışmalar daha da ilerletildi. Referanslardan [3] ve [4] groupoidler hakkında temel referanslarımızdır.

Bu makalede gruplardaki bazı özelliklerin groupoidler için de saglandığını ispat edeceğiz.

Tanım 1. G ve O_G iki cümle olsun. Burada G morphismlerin cümlesi ve O_G de objelerin cümlesi olarak bilinir. $\alpha, \beta\ G \longrightarrow O_G$ iki fonksiyon olsun, ve $1_{()}{:}O_G \longrightarrow G,\ x \to 1_x$ ile tanımlansın. Burada α başlangıç fonksiyonu β final fonksiyonu ve $1_{(\ )}$ da birim elemanı fonksiyonu olarak adlandırılır. Her bir $x \in O_G$ için $1_x \in G$ elemanına x noktasında birim eleman denir.

$$G*G = \{(g,h):\ g,h \in G \text{ ve } \beta(g) = \alpha(h)\}$$

olmaküzere

$$G*G \longrightarrow G,\ (g,h) \rightarrow gh$$

iletanımlanankısmi çarpımı göz önüne alalım. Burada dikkat edelim ki $g,h \in G$ için gh çarpımı tanımlıdır eğer $\beta(g) = \alpha(h)$ ise. Eğer aşağıdaki şartların tamamı sağlamyorise (G,O_G) ikilisine bir *groupoid* denir:

i) Her $(g,h) \in G*G$ için $\alpha(gh) = \alpha(g)$ ve $\beta(gh) = \beta(h)$.

ii) $\beta(g) = \alpha(h)$ ve $\beta(h) = \alpha(k)$ olacak şekildeki tüm $g,h,k \in G$ için $(gh)k = g(hk)$.

iii) Her $x \in O_G$ için $\alpha(1_x) = \beta(1_x) = x$.

iv) Her $g \in G$ için $gg^{-1} = 1_x$ ve $g^{-1}g = 1_y$ (burada $\alpha(g) = x$ ve $\beta(g) = y$) olacak şekilde bir g^{-1} vardır.

Eğer (G,O_G) ikilisi bir groupoid ise G, O_G üzerinde bir groupoiddir denir.

G bir groupoid olsun. Her $x,y \in O_G$ için $\alpha^{-1}(x) \cap \beta^{-1}(y)$ yerine $G(x,y)$ yazarız. O halde $G(x,y)$, x den y ye tüm morphismlerin cümlesidir. Özel olarak $G(x,x)$ cümlesi $G(x)$ olarak yazılır. O halde basitçe görülüyor ki $G(x)$ cümlesi groupoidin kısmi çarpımı altında bir grupdur.

Örnek 1. Bir G grubu, sadece bir objeli bir groupoid olarak düşünülebilir.

Örnek 2. X bir topolojik uzay olsun. X deki $a:[0,1] \rightarrow X$ eğrilerinin homotopy sınıflarının cümlesini πX ile gösterelim. Bu durumda X uzayındaki eğrilerin birleşimi πX de bir groupoid kısmi çarpımı tanımlar. Yani

$$\pi X * \pi X \rightarrow \pi X,\quad ([a],[b]) \rightarrow [a \circ b]$$

ve burada başlangıç ve final fonksiyonları $\alpha([a]) = a(0)$ ve $\beta([a]) = a(1)$ ile tanımlanır. Her $x \in X$ için x noktasındaki sabit eğrinin homotopy sınıfı x noktasındaki birim elemandır. Böylece πX, X üzerinde bir groupoiddir. Bu πX

groupoidine X uzayının *temelgroupoidi* denir. X uzayının bir x noktasındaki temel grubu $\pi_1X(x)$ ile gösterilirse $(\pi X)(x) = \pi_1X(x)$ elde edilir.

Örnek 3. G ve H iki groupoid olsun. Bu durumda (g,h), $(g',h') \in G \times G$ için gg' ve hh' sırası ile G ve H de tanımlı olmak üzere

$$(g,h)(g',h') = (gg',hh')$$

ile tanımlanan kısmi çarpım altında $G \times H$ kartezyen çarpımı $O_G \times O_H$ üzerinde bir groupoiddir. Burada $\alpha(g,h) = (\alpha g, \alpha h)$ ve $\beta(g,h) = (\beta g, \beta h)$ ile tanımlanıyor.

Groupoidin yukarıdaki tanımından aşağıdaki lemmalar hemen elde edilir. Bundan dolayı bunların ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Lemma 1. G bir groupoid olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) Her $x \in O_G$ için 1_x birim elemanı tektir.

ii) Her $g \in G$ elemanının bir tek tersi vardır.

iii) Her $g \in G$ için $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$ dır.

iv) Her $(g,h) \in G \times G$ için $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ dır.

Lemma 2. G bir groupoid ve $g,h \in G$ olsun. Bu durumda $ga=h$ ve $bg=h$ denklemlerinin G deki a ve b için bir tek çözümleri vardır. Özel olarak G de

$$ga=gb \text{ ise } a=b \text{ ve}$$
$$ag=bg \text{ ise } a=b \text{ dir.}$$

Tanım 2. G bir groupoid, H ve O_H da $H \subseteq G$ ve $O_H \subseteq O_G$ olacak şekilde boştan farklı iki cümle olsun. Bu durumda H ye G nin bir *altgroupoidi* denir, eğer G nin kısmi groupoidi altında H de bir groupoid ise. H alt groupoidi *genişdir* denir eğer $O_H = O_G$ ise.

α, β fonksiyonlarının H ye kısıtlanmalarını sırası ile α_H ve β_H ile göstereceğiz.

O halde H, G nin bir alt groupoidi ve K de H nin bir alt groupoidi ise açık olarak K de G nın bir alt groupoididir.

Lemma 3. G bir groupoid, H de G nin boştan farklı bir alt cümlesi olsun. Bu durumda H, G nin bir alt groupoidioir ancak ve ancak

i) her $(g,h) \in H * H$ için $gh \in H$;

ii) eğer $g \in H$ ise $g^{-1} \in H$ dır.

İspat. Önce dikkat edelim ki α ve β fonksiyonları H için bir O_H tanımlar. Bunun için $O_H = \alpha(H) \cup \beta(H)$ almak yeterlidir.

Eğer H bir alt groupoid ise (i) ve (ii) kesinlikle sağlanır.

Karşıt olarak (i) ve (ii) sağlansın. H nın bir alt groupoid olduğunu göstermek için sadece her $x \in O_H$ için $1_x \in H$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $x \in O_H$ alalım. $O_H = \alpha(H) \cup \beta(H)$ olduğundan $x \in \alpha(H)$ ya da $x \in \beta(H)$ dır. $x \in \alpha(H)$ ise $\alpha(g) = x$ olacak şekilde bir $g \in H$ vardır. (ii) ile $g^{-1} \in H$ ve (i) ile $gg^{-1} = 1_x \in H$ dır. Eğer $x \in \beta(H)$ ise $\beta(h) = x$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. Benzer şekilde $h^{-1}h = 1_x \in H$ dır.

Lemma 4. G bir groupoid, H ve K de G nin alt groupoidleri ise $H \cap K$ de G nin bir alt groupoididir.

İspatı Lemma 3 den açıktır.

Tanım 3. G bir groupoid, H de G nin bir alt groupoidi olsun. $g, h \in G$ için g, h ye *denktir* denir eğer $gh^{-1} \in H$ ise. Bu durumda $g \equiv h (\mathrm{mod}\, H)$ olarak yazılır.

Lemma 5. Eğer H alt groupoidi G de geniş ise $g \equiv h (\mathrm{mod}\, H)$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat.

i) $g \in G(x,y)$ ise $gg^{-1} = 1_x$ ve H geniş olduğundan $1_x \in H$ dır. O halde $gg^{-1} \in H$ olup yansıma özelliği sağlanır.

ii) g,h için $gh^{-1} \in H$ ise, H bir groupoid olduğundan $hg^{-1} \in H$ dır.

iii) $g, h, k \in G$ için $gh^{-1} \in H$ ve $hk^{-1} \in H$ ise

$$(gh^{-1})(hk^{-1}) = g(h^{-1}h)k^{-1} = gk^{-1} \in H$$

dır.

O halde $g \equiv h(\mathrm{mod}\, H)$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Bu denklik bağıntısına göre $g \in G$ elemanının denklik sınıfını [g] ile gösterelim.

G bir groupoid, H G nin bir alt groupoidi ve $g \in G$ için

$$Hg = \{hg : h \in H \text{ ve } \beta(h) = \alpha(g)\}$$

olsun.

Lemma 6. Herhangi bir $g \in G$ için $N_g=[g]$ dir.

İspat. $hg \in H_g$ ise $g(hg)^{-1}$ tanımlı olup $g(hg)^{-1}=h^{-1} \in H$ dır. Çünkü H bir groupoiddir. O halde $hg \in [g]$ ve dolayısiyle $H_g \subseteq [g]$ dır.

Karşıt olarak kabul edelim ki $h \in [g]$ dır. Bu durumda $gh^{-1} \in H$ ve H bir groupoid olduğundan $(gh^{-1})^{-1} = hg^{-1} \in H$ dır. $hg^{-1}=k$ dersek, $h = kg \in H_g$ olur. Yani $[g] \subseteq H_g$ dır. O halde bunlardan $H_g=[g]$ elde edilir.

G bir groupoid, H ve K de G nin alt groupoidleri olsun. HK çarpımı

$$HK = \{g = hk : h \in H,\ k \in K \text{ ve } \beta(h) = \alpha(k)\}$$

ile tanımlayalım. Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1. HK çarpımı G nin bir alt groupoididir ancak ve ancak HK=KH dır.

İspat. HK=KH olduğunu kabul edelim. Lemma 3 den dolayı HK nın bir alt groupoid olduğunu göstermek için HK nın kısmi çarpım altında kapalı olduğunu ve HK nın her elemanının tersinin yine HK de olduğunu göstermek yeterlidir. $\beta(g) = \alpha(g')$ olacak şekilde $g = hk \in HK$ ve $g' = h'k' \in HK$ olsun. Burada $\beta(k) = \alpha(h')$ dır. Bu durumda $gg' = hkh'k'$ dır. $kh' \in KH = HK$ olduğundan bazı $(h_2, k_2) \in H*K$ için $kh' = h_2k_2$ dır. Burada

$$H*K = \{(h,k) \in H \times K : \beta(h) = \alpha(k)\}$$

dır. O halde buradan

$$gg' = h(kh')k' = h(h_2k_2)k' = (hh_2)(k_2k') \in HK$$

olur ki buda HK nın kısmi çarpım altında kapalı olduğunu ispat eder. $hk \in KH$ olsun. $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$ olduğundan $(hk)^{-1} \in HK$ dır. O halde Lemma 3 ile HK G nin bir alt groupoididir.

Karşıt olarak HK G nin bir alt groupoidi olsun. Herhangi bir $(k,h) \in K * H$ için $kh \in KH$ olsun. O halde $h^{-1}k^{-1} \in HK$ dır. HK bir gruopoid olduğundan $\left(h^{-1}k^{-1}\right)^{-1} = hk \in HK$, yani $KH \subseteq HK$ dır. Eğer $g \in HK$ ise HK bir groupoid olduğundan $g^{-1} \in HK$ dır. O halde bazı $(h,k) \in K * H$ için $g^{-1} = hk \in HK$ dır. Böylece $g = k^{-1}h^{-1} \in KH$ olup $HK \subseteq KH$ dır. O halde KH=HK elde edilir ki budaispatıtamamlar.

G bir groupoid, A ve B de G nin alt groupoidleri olsun. G üzerinde bir $\approx$ bağıntısınıaşağıdakişekildetanımlayalım.

$g,h \in G$ için $g \approx h$ dır eğer bazı $a \in A$ ve $b \in B$ için $h = agb$ ise.

Lemma 7. Eğer A ve B, G nin geniş alt groupoidleri ise yukarıda tanımlanan $\approx$ bağıntısı G üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat. Bir $g \in G(x,y)$ için $g = 1_x g 1_y$ dır. A ve B geniş olduğundan $1_x \in A$ ve $1_y \in B$ dir. O halde $g \approx g$ dır.

Simetri vegeçişmeözellikleriaçıktır.

Bu denklik bağıntısına göre $g \in G$ elemanının denklik sınıfı

$$\{agb : a \in A,\ b \in B\}$$

(burada agb tanımlı) dır.

Tanım 4. G bir groupoid ve $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de G nin alt groupoidleri olsun. Kabul edelim ki $G = A_1 A_2 \ldots A_n$ olsun. Yani her $g \in G$ elemanı tek türlü

$$g = a_1 a_2 \ldots a_n \quad (a_i \in A_i)$$

olarakyazılabilsin. Bu durumda G groupoidine $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alt groupoidlerinin *direkçarpımı* denir.

Teorem 2. G groupoidi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alt groupoidlerinin direk çarpımı olsun. Bir B cümlesini

$$B = A_1 * A_2 \ldots * A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\}$$

(burada $\beta(a_i) = \alpha(a_{i+1})$, $1 \leq i \leq n-1$) ile tanımlayalım. Bu durumda G ile B arasında bir bijektif vardır.

İspat. $\phi : B \to G$ fonksiyonunu $\phi(a_1, a_2, \ldots a_n) = a_1 a_2 \ldots a_n$ ile tanımlayalım. $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$ ve $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in B$ için $\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \phi(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ise $a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_n$ dir. B nin tanımındaki tek türlü yazılması şartından $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$ dir. Yani ϕ fonksiyonu 1:1 dir. ϕ fonksiyonunun örten olduğu açık olup bijectiftir.

Tanım 5. G bir groupoid, N de G nin geniş bir alt groupoidi olsun. N ye *normaldır* denir eğer gng^{-1} tanımlı olacak şekildeki $g \in G$ ve $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ ise. O halde $g \in G(x,y)$ ise $n \in N(y)$ olmak zorundadır.

Lemma 8. N alt groupoidi G de normaldır ancak ve ancak her $g \in G$ için $gng^{-1} = N$ dir.

İspat. Eğer $gng^{-1} = N$ ise $gNg^{-1} \subseteq N$ olup N, G de normaldır. Karşıt olarak N G de normal olsun. Yani $gNg^{-1} \subseteq N$ olsun. Buradan $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subseteq N$ olur. O halde $N = g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subseteq gNg^{-1}$ olur. O halde $N = gNg^{-1}$ dır.

G bir groupoid N de G nin bir normal alt groupoidi olsun. G/N tüm Ng cümlelerinin sınıfı olsun. G/N de bir groupoid işlemi NgNh=Ngh ile tanımlansın. Burada $\alpha(N_g) = \alpha(g)$ ve $\beta(N_g) = \beta(g)$ ile tanımlansın. Basitçe sağlanacağı gibi G/N bir groupoiddir. Bu groupoide *bölüm groupoidi* denir. Bu makalede bölüm groupoidleri ile fazla ilgilenmiyeceğiz. Bununla ilgili olarak [3] e başvurulabilir.

Lemma 9. G bir groupoid, N G nin bir normal alt groupoidi ve H de G nin herhangi bir alt groupoidi olsun. Bu durumda NH de G nin bir alt groupoididir.

İspat. ab tanımlı olacak şekilde $a, b \in NH$ olsun. Bazı $n_1, n_2 \in N$ ve $h_1, h_2 \in H$ için $a = n_1 h_1$, $b = n_2 h_2$ ve böylece $ab = n_1 h_1 n_2 h_2$ dır. N normal olduğundan bazı n_3 için $h_1 n_2 = n_3 h_1$ ve böylece $ab = (n_1 h_1)(n_2 h_2) = (n_1 n_3)(h_1 h_2) \in NH$ dır.

$a \in NH$ ve $n \in N$, $h \in H$ için $a=nh$ olsun. Buradan $a^{-1}=h^{-1}n^{-1}$ ve N normal olduğundan bazı $n_1 \in N$ için $a^{-1}=h^{-1}n^{-1}=n_1h^{-1} \in NH$ dır. O halde Lemma 3 ile NH de G nin bir alt groupoididir.

Lemma 10. G bir groupoid, M ve N de G nin normal alt groupoidleri olsun. Kabul edelim ki farklı x,y için $M(x,y)=\emptyset$ ve $N(x,y)=\emptyset$ dır. Bu durumda NM de G nin normal alt groupoididir.

İspat. Lemma 9 dan NM, G nin bir alt groupoididir. Şimdi NM nin normal olduğunu gösterelim. $g \in G$, $a \in NM(x,y)$ ve gag^{-1} tanımlı olsun. $M(x,y)=\emptyset$ ve $N(x,y)=\emptyset$ olduğundan bazı $n \in N(y)$, $m \in M(y)$ için $a=nm$ dir. O halde

$$gag^{-1}=gnmg^{-1}=(gng^{-1})(gmg^{-1})$$

dır. N ve M normal olduğundan $gng^{-1} \in N$ ve $gmg^{-1} \in M$ olup $gag^{-1} \in NM$ dır. Yani NM normaldır.

Lemma 11. G bir groupoid, H, G nin bir alt groupoidi ve

$$N(H) = \{g \in G:\ ghg^{-1} \in H\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) N(H) G nin alt groupoididir.

ii) N, N(H) de normaldir.

iii) Eğer H, G de bir K alt groupoidinin normal alt groupoidi ise bu durumda $K \subseteq N(H)$ dır. Yani N(H) H yi normal alt groupoid kabul eden G deki alt groupoidlerin en büyüğüdür.

İspatı bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

REFERANSLAR

[1] M.E.-S.A.-F. Aof, "Topological aspects of holonomy groupoids", University of Wales Ph.D thesis, 1988

[2] C. Ehresmann, "Catégories topologiues et catégories differentiables", Coll. Géo. Diff. Glob. Bruxelles, 137-150 (1959).

[3] P.J. Higgins, "Categories and groupoids", Vann Nostrand, New York, 1971.

[4] K.C.H. Mackenzie, "Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry", London Math. Soc. Lecture Note Series124, Cambridge University Press, 1987.

[5] O. Mucuk, "Covering groups of non-connected topological groups and the monodromy groupoid of a topological groupoids", University of Wales Ph.D thesis, Bangor, 1993.

[6] J. Pradines, "Theorie de Lie pour les groupoides differentiables, relation etre proprietes locales at globales", Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 263, 907-910 (1966).