

## SİMETRİK VE ASİMETRİK KAFES KODLAMALI MODÜLASYON

Eyüp TUNA\*, Necmi TAŞPINAR\*\*

\* İnönü Üniversitesi, Malatya Meslek Yüksekokulu, 44100 MALATYA

\*\* Erciyes Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Bölümü, 38039

KAYSERİ

### ÖZET

Bu çalışmada simetrik ve asimetrik kafes kodlu modülasyon (TCM) şemaları tanıtılmakta ve 1/2, 2/3, 3/4 oranlı kodlar için performansları birbirleriyle karşılaştırılmaktadır. Karşılaştırmada, bu simetrik ve asimetrik TCM şemalarının her birinin performansının kafes diyagramındaki durum sayısının artmasıyla arttığı görülmüştür. 1/2 ve 3/4 oranlı asimetrik TCM şemalarının performanslarındaki artış aynı kod oranlarına sahip simetrik TCM şemalarına göre biraz daha fazla olmaktadır. Diğer taraftan, 2/3 kod oranlı TCM şemalarında asimetri sadece iki durumlu kafes diyagramında ilave performans artışı getirir, fakat dört ve daha fazla durumlu kafes diyagramları için kodlanmamış iletme göre her iki haldede performans artışları aynı olur.

## SYMETRICAL AND ASYMMETRICAL TRELIS CODED MODULATION

### ABSTRACT

In this work, symmetrical and asymmetrical trellis coded modulation (TCM) schemes are introduced and their performances are compared with each others for the codes rates 1/2, 2/3 and 3/4. The comparasion yields that the performance of each of these symmetrical and asymmetrical TCM schemes increases with increasing number of its trellis states. The increase in performances for the asymmetric TCM schemes with rates 1/2 and 3/4 is more than that for the symmetric TCM schemes. On the other hand, for the rate 2/3 the asymmetry in TCM scheme introduces additional performance increase only in two-state trellis, but for four or more state trellis performance increases over uncoded transmission are the same for both cases.

## 1.GİRİŞ

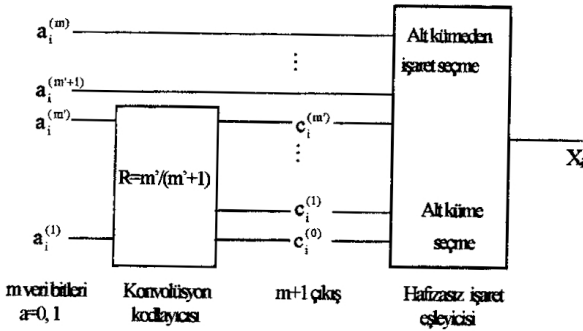
Gücün sınırlı olduğu bir ortamda arzu edilen seviyede bir sistem performansının mümkün olduğunca düşük miktarda güç harcanarak elde edilmesi istenir. Bu amaçla, iletilen semboller dizisine fazladan bitler eklemek suretiyle güç verimliliğinin artırıldığı hata düzeltici kodlar kullanılır. Bu çözüm ise daha yüksek veri hızında çalışan modülatörleri, dolayısıyla daha fazla bir band genişliğini gerektirir. Halbuki haberleşmeye ayrılan frekans aralığı pek çok kullanıcıyla paylaşılmak zorunda olduğu için band genişliğinin artırılması başka sorunlara neden olur.

Kafes kodlamalı modülasyon (TCM), band sınırlı kanallar üzerinden sayısal iletim sağlamak amacıyla geliştirilmiş birleşik bir kodlama ve modülasyon tekniğidir [1]. TCM'i, iletim için harcanan gücü ve gerekli band genişliğini arttırmak zorunda kalmadan sayısal iletim sisteminin güvenilirliğini geliştiren birleşik bir kodlama ve modülasyon şeması olarak da tanımlamak mümkündür [2]. Band-sınırlı bir ortamda frekans bandı kullanımındaki bu verimlilik artışı yüksek dereceli modülasyon şemalarının (örneğin 4-PSK yerine 8-PSK) seçilmesiyle elde edilebilir, fakat aynı işaret ayrıklığını ve dolayısıyla aynı hata olasılığını sağlamak için daha yüksek bir işaret gücüne ihtiyaç duyulur [3].

İlk TCM şeması 1976 yılında önerilmiştir [2]. Daha detaylı çalışmaların sonuçlarını veren Ungerboeck'in 1982'deki bir yayınının arkasından günümüze kadar yapılan pek çok çalışma TCM'in teorisinin ve özelliklerinin iyi anlaşılabilir bir noktaya gelmesine sebep olmuştur [1].

Kafes kodlamalı modülasyon bir konvolüsyon kodunu yüksek dereceli bir modülasyon ile birleştirir. Bu sırada alıcı, demodülasyon ve kod çözme işlemlerini iki ayrı adımda yapmak yerine, bu iki işlemi bir adımda

yapar. Şekil 1'de bir TCM modülatörü verilmiştir [3]. Bu modülatörde konvolüsyon kodlayıcısı  $m$  kaynak bitinden  $m' \leq m$  tanesini alır ve  $m+1$  kodlanmış çıkışı üretir. Eşleyici bu çıkışları M-PSK işaretlere dönüştürerek kanala verir.



Şekil 1. TCM modülatörü

İletim hızındaki azalmayı önlemek için kodlanmamış durumdaki  $\Omega'$  takım yıldızı TCM işlemi sonucu  $\Omega$  takım yıldızına genişletilir ve sonuç olarak iki mümkün dizi arasında,  $\Omega'$  takım yıldızı içindeki işaretlerin arasındaki uzaklıktan ( $d_{\min}$ ) daha büyük bir minimum uzaklık ( $d_{\text{free}}$ ) elde edilir. Böylece maksimum olasılıklı dizi sezmenin kullanılması  $d_{\text{free}}^2 / d_{\min}^2$  kadar bir uzaklık kazancı sağlar.

Diğer taraftan takım yıldızın genişletilmesi ortalama enerji harcanmasında  $E'$ 'den  $E$ 'ye bir artış getirir. Öyle ise bir TCM şemasının asimtotik kodlama kazancı

$$\gamma = \frac{d_{\text{free}}^2 / E}{d_{\text{min}}^2 / E} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır.

Çalışmanın ikinci bölümünde simetrik TCM şemaları, bunların performansları, alt ve üst sınırları verilecektir. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde verilen simetrik takım yıldızı kullanılarak elde edilen kod performanslarının asimetrik takım yıldızı kullanılarak artırılacağı görülecektir.

## II. SİMETRİK TCM ŞEMALARI VE PERFORMANS ANALİZLERİ

Ayrık bir  $i$  zamanında iletilen  $x_i$  işareti yalnızca aynı zaman diliminde iletilen  $a_i$  kaynak sembollerine bağlı olmayıp, sonlu sayıda daha önceki kaynak sembollerine de bağlı olur ve

$$x_i = f(a_i, a_{i-1}, \dots, a_{i-L}) \quad (2)$$

şeklinde gösterilir. Kodlayıcının  $i$  anındaki durumu

$$\sigma_i = (a_{i-1}, \dots, a_{i-L}) \quad (3)$$

şeklinde tanımlanırsa denk. (2)'deki ifade

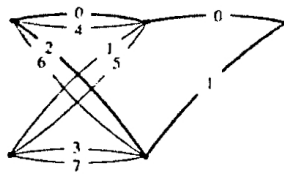
$$x_i = f(a_i, \sigma_i) \quad (4)$$

gibi kapalı bir şekilde yazılabilir. Kodlayıcının bir sonraki  $i+1$  durumu kodlayıcıya  $i$  anında giren kaynak sembollerine ve kodlayıcının  $i$  anındaki durumuna bağlıdır ve bu

$$\sigma_{i+1} = g(a_i, \sigma_i) \quad (5)$$

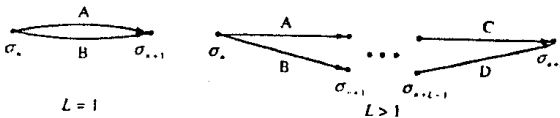
olarak ifade edilebilir.  $f(\cdot, \cdot)$  fonksiyonu her bir kanal sembolünün yalnızca karşılığı olan kaynak sembollerine bağlı olmayıp, aynı zamanda kodlayıcının durumuna da bağlı olduğunu gösterir. Başka bir ifade ile, herhangi bir zaman biriminde iletilen işaret  $\sigma_i$ 'nin değerine göre seçilen bir takım yıldızı içinden seçilir.  $g(\cdot, \cdot)$  fonksiyonu kodlayıcının hafıza bölümünü tanımlar.

Yukarıda tanımlanan  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarını göstermek için kafes diyagramı kullanmak uygun olur. Kodlayıcının  $i$  anındaki durumu olan  $\sigma_i$ 'nin aldığı değerler kafesin düğümleridir. Her bir düğümden  $i$  zamanında çıkan ve  $i+1$  zamanında başka bir düğüme varan her bir dal bir kaynak sembolü ile etiketlenir. Yani, kafesin yapısını  $g$  fonksiyonu belirler,  $f$  fonksiyonu ise kanal sembollerinin kafes boyunca dallarla gösterilmesini sağlar. TCM modülatöründeki konvolüsyon kodlayıcısının hafıza elemanı sayısı  $k$  ise kafes diyagramında  $2^k$  tane düğüm bulunur. Eğer  $M'$  tane kaynak sembolü var ise kafesin her bir düğümünden  $M'$  tane dal çıkar ve her bir düğüme  $M'$  tane dal girer. Bazı durumlarda iki veya daha fazla dal aynı düğüm çiftlerini birleştirirler. Bu olduğu zaman paralel geçişlerin meydana geldiği söylenir. Bir TCM şemasının uzaklık özellikleri onun kafes diyagramında aranır. Şekil 2'de iki durumlu bir kafes diyagramı görülmektedir.



Şekil 2 İki-durumlu kafes diyagramı

Optimum kod çözmeye, alınan dizi için kafes boyunca en büyük olasılıklı yolu araştırmaktır. Bu, en iyi şekilde Viterbi algoritması kullanılarak yapılır. Seçilen yol, gürültü nedeniyle, kaynak sembolleri dizisince oluşturulan doğru yol ile uyum içinde olmayabilir: Alınan dizi bazen, örneğin  $n$  anında, doğru yoldan ayrılır ve daha sonraki örneğin  $n+L$  zamanında bu yol ile birleşir. Bu oluştuğunda  $L$  uzunluğunda bir hata olayı meydana gelir. Bu sebepten bir TCM şemasının serbest uzaklığı, hata olayını oluşturan yolların her hangi bir çiftinin arasındaki minimum Öklid uzaklığıdır. Eğer düğümler arasında, şekil 3'de görüldüğü gibi, paralel geçişler varsa  $L=1$  uzunluğunda hata olayı oluşur ve serbest Öklid uzaklığı,  $d_{free}$ , paralel geçişler tarafından belirlenir. Yani  $A$  verilen bir düğüm noktasından çıkan dalları gösteren bir küme ise serbest Öklid uzaklığı  $A$  kümesine ait işaretler arasındaki uzaklık olur.



**Şekil 3**  $L=1$  ve  $L>1$  için ayrılan ve birleşen yollar

Düğümlerin arasında paralel geçişler yok ise, yine şekil 3'de görüldüğü gibi, bir başlangıç düğümünden çıkan ve  $L$  zaman sonra tek bir düğümde birleşen yolların bir çifti tarafından temsil edilen işaretlerin arasındaki uzaklık serbest Öklid uzaklığı olur.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $D$ , düğümlerden çıkan dallarla ilişkili alt kümeleri temsil etsinler. Bu durumda  $L>1$  uzunluğundaki bir hata olayı için minimum karesel Öklid uzaklığı

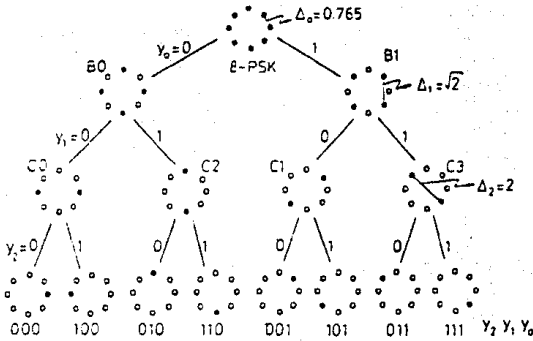
$$d_{\text{free}}^2 = d^2(A, B) + \dots + d^2(C, D) \quad (6)$$

ifadesi ile bulunur. Hesaplanan bu değer bir kodun kodlama kazancının bulunmasında kullanılan önemli bir parametredir.

TCM'de ulaşılabilecek performans, konvolüsyon kodlayıcısında bulunan hafıza elemanı sayısına, dolayısıyla kafes diyagramındaki durum sayısına bağlıdır. 1/2 kodunun kullanıldığı TCM'de, işaretleri arasındaki normalize karesel minimum uzaklık  $d_{\text{min}}^2/E^2=4$  olan kodlanmamış BPSK iletme göre, 4 durum ile 3 dB, 8 durum ile 4 dB, 16 durum ile 5 dB ve 128 veya daha fazla durum ile 6 dB'e yakın bir kodlama kazancı elde edilebilir [3]. Bu tür TCM şemasında iletilen her bir işaret ile bir bilgi biti taşınır, (1 bit/S/Hz). İletilen bir işaret ile 2 bilgi bitinin taşındığı, (2 bit/S/Hz), 2/3 kodunu kullanan TCM şemalarında, işaretleri arasındaki normalize karesel minimum uzaklık 2 olan kodlanmamış QPSK iletme göre, 2 durum ile 1,1 dB, 4 durum ile 3 dB, 8 durum ile 3,6 dB'lik [3], 16 durum ile 4,1 dB'lik, [1], bir kodlama kazancı elde edilebilir. 3/4 kodunu kullanan TCM-QPSK şemasıyla, kodlanmamış BPSK'ya göre, 2 durum ile 1,76 dB, 4 durum ile 3,52 dB, 8 durum ile 4,77 dB ve 16 durum ile 5,74 dB'lik kodlama kazancı elde edilir. Fakat bu şemada iletilen her işaret 1,5 bilgi bitini taşır, (1,5 bit/S/Hz) [4]. Yukarıda verilen kodlama kazançları karşılaştırıldığında  $R=m'/(m'+1)$  kod oranındaki  $m'$  ve  $m'+1$  değerleri arttırıldıkça kodlama kazancının da arttığı görülür.

Denk. (6) ile verilen ifade iyi bir kod için aynı başlangıç veya aynı bitiş durumuna etiketlenen alt kümelerin mümkün en büyük uzaklığa sahip olması gerektiğini ima eder. Bunu sağlamak için Ungerboeck U1, U2, U3 kurallarını teklif etmiştir[5]. En uygun TCM şemasının seçilebilmesinde büyük öneme sahip bu kuralları sağlamak için "küme bölmeleme" olarak

bilinen bir tekniği geliştirmiştir [5]. Şekil 4'de 8-PSK takım yıldızın küme bölmelenmesi görülmektedir.



Şekil 4 8-PSK takım yıldızın küme bölmelenmesi

Bir TCM kodlayıcısı iki şekilde gösterilebilir ve gerçekleştirilebilir: Birincisi, TCM kodlayıcısının hafıza bölümünü konvolüsyon kodlayıcısı ile modellemektir. Şekil 1'de verilen TCM kodlayıcı-modülatörü şeması Ungerboeck gösterilimini temel alır [1, 5]. İkincisi, kaynak sembollerini çıkış işaretlerine eşlemek amacıyla analitik ifadeler elde etmek ve buna dayanarak TCM kodlayıcısı oluşturmaktır. Buna da Calderbank ve Mazo gösterilimi denir [6].

Eğer  $i$  anındaki kaynak sembolü  $a_i$ ,  $2^k$  değerlerini alabiliyorsa, bu, kodlayıcıya aynı zamanda verilen  $k$  adet ikili dijitalerin  $b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, \dots, b_i^{(k)}$  şeklindeki bir dizisi olarak gösterilebilir. TCM kodlayıcısının  $i$  anındaki çıkış işareti  $x_i, v_j \geq 0$  olmak üzere  $j$ .ci ikili giriş dizisinin önceki bitlerine bağlı olacaktır. ( $j=1, \dots, k$ )



$$x_i = f(b_i^{(1)}, b_{i-1}^{(1)}, \dots, b_{i-v_1}^{(1)}, \dots, b_i^{(k)}, \dots, b_{i-v_k}^{(k)}) \quad (7)$$

olarak ifade edilebilen TCM'in Ungerboeck modelinden, TCM kodlayıcısının iki bölümden oluşmuş gibi göstermek mümkündür:  $b_i^{(1)}$ ,  $b_2^{(2)}$ , ...,  $b_i^{(k)}$  şeklinde  $k$  girişe,  $c_i^{(1)}$ ,  $c_i^{(2)}$ , ...,  $c_i^{(n)}$  şeklinde  $n$  çıkışa sahip bir konvolüsyon kodlayıcısı ve bu konvolüsyon kodlayıcısının çıkışındaki ikili  $n$ -tapılı bir  $x_i \in \Omega$  işaretine eşleyen hafızasız bir modülatör bölümü.

$2^m$  elemanlı bir alfabeden alınan bir  $a_i$  semboller dizisini üreten bir bilgi kaynağı göz önüne alınsın. Kafes kodlayıcısının işlevi bu semboller dizisini  $\Omega$  takım yıldızından alınan işaretler dizisine dönüştürmektir:

$$x_i = f(a_i, a_{i-1}, \dots, a_{i-L}) \quad (8)$$

Denk.(8) ile verilen model kafes kodlayıcısının farklı bir gösterilimine temel oluşturur. Bu ifade hafızalı bir sistemin giriş-çıkış ilişkisini ortaya koyduğundan bu transfer fonksiyonunun analitik tanımı kodlayıcı tasarımı için bir temel oluşturur. Bir kodlama kazancı elde edebilmek için bu eşitlikteki  $f(\cdot)$  fonksiyonu lineer olmamalıdır. Eğer lineer olursa bir kodlama kazancı sağlamadığı kolayca gösterilebilir ve sistemin performansına katkı sağlamayan semboller arası girişimi ifade eder [3].

Denk.(8)'de verilen ifade

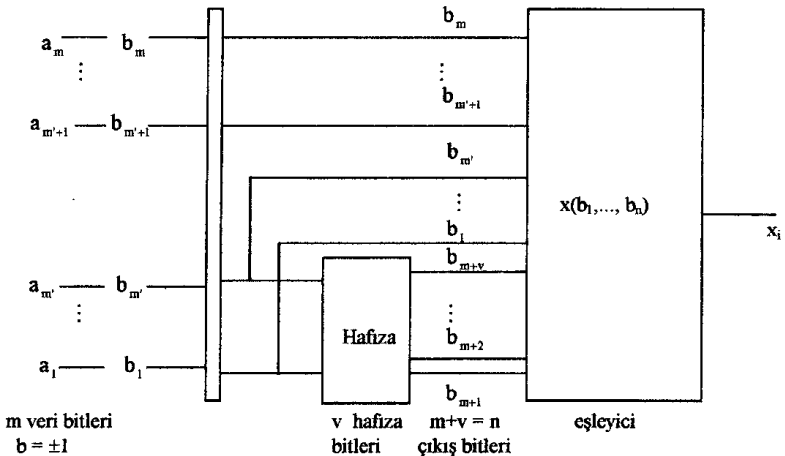
$$x_i = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = k^{(0)} + \sum_i k_i^{(1)} a_i + \sum_{j>i} k_{ij}^{(2)} a_i a_j + \sum_{h>j>i} k_{ijh}^{(3)} a_i a_j a_h + \dots + k_{1\dots n}^{(n)} a_1 a_2 \dots a_n \quad (9)$$

şeklinde genelleştirilebilir.  $\{0,1\}$  kümesinden değerler alan  $a_i$  değişkenlerinin yerine  $\{-1,+1\}$  kümesinden değerler alan  $b_i$  ( $b_i=1-2a_i$ ) değişkenlerini kullanmak uygun olur. Sonuç olarak Denk.(9)'daki ifade

$$x_i = f(b_1, b_2, \dots, b_n) = d^{(0)} + \sum_i d_i^{(1)} b_i + \sum_{j>i} d_{ij}^{(2)} b_i b_j + \sum_{h>j>i} d_{ijh}^{(3)} b_i b_j b_h + \dots + d_{1\dots n}^{(n)} b_1 b_2 \dots b_n \quad (10)$$

şeklini alır. Buradaki  $d^{(i)}$ 'ler  $f(\cdot)$  fonksiyonunun matematiksel çözümlerle bulunabilen sabitlerin bir kümesidir. Bu sabitler hesaplandığında TCM şemasının kodlayıcısı elde edilir. Denk.(10) ile verilen ifade Calderbank-Mazo gösterilimidir. Bunu temel alarak şekil 5'de gösterilen Calderbank-Mazo TCM kodlayıcısı oluşturulmuştur [3].

Bir sayısal haberleşme sisteminin değerlendirilmesi için en yaygın şekilde kullanılan parametre hata olasılığıdır. Hata olasılığı,  $d_{free}$  artarken düzgün olarak azalan bir fonksiyon tarafından alttan ve üstten sınırlanır. Toplamsal beyaz Gauss gürültülü (AWGN) kanallar üzerinden iletim için kullanılan TCM şemalarının karşılaştırılmasında serbest Öklid uzaklığı, özellikle yüksek gürültü oranlarında tek parametre haline gelir [3].



Şekil 5 Calderbank-Mazo tipi TCM kodlayıcı/modülatörü

L uzunluğunda  $X_L$  ve  $X_L'$  gibi iki dizi ele alınmış olsun. Eğer kod çözücü bu dizilerden iletilen  $X_L$  dizisi yerine, bu diziyeye karşılık gelen yoldan her hangi bir zamanda ayrılan ve L zaman sonra tekrar bu yol ile birleşen kafes yolunun karşılığı olan  $X_L'$  dizisini seçerse L uzunluğunda bir hata olayı meydana gelir. O takdirde toplam hata olasılığı hata olaylarının L uzunluğu boyunca toplanmalarıyla elde edilir. Bir hata olayının olasılığı için birleşik sınır

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{X_L} \sum_{X_L' \neq X_L} P[X_L] P[X_L \rightarrow X_L'] \quad (11)$$

eşitsizliğini verir. Buradaki  $P[X_L \rightarrow X_L']$   $X_L$  gönderildiğinde demodülatörün bunun yerine  $X_L'$  dizisini tercih etmesi olasılığını temsil eder.  $X_L$  ve  $X_L'$  ile bunların etiketleri olan  $C_L$  ve  $C_L'$  arasında bire bir ilişki olduğundan Denk.(11)'deki ifade

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{C_L} P[C_L] \sum_{C_L' \neq C_L} P[C_L \rightarrow C_L'] = \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{C_L} P[C_L] \sum P[C_L \rightarrow C_L \oplus E_L] = \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{E_L \neq 0} P[E_L] \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki  $E_L$ ,  $e_i$  hata vektörlerinin L uzunluğundaki bir dizisidir.  $P[E_L]$  üzerindeki  $\exp(-1/4N_0)$  Bhattacharyya sınırını kullanarak Denk.(12)'deki ifadeden hata olasılığına

$$p(e) \leq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{\text{free}}}{2\sqrt{N_0}} \right) e^{d_{\text{free}}^2/4N_0} T(D) \Big|_{D=e^{-1/4N_0}} \quad (13)$$

üst sınırı elde edilir. Buradaki  $T(D)$  hata durum diyagramının transfer fonksiyonudur. Bu ifade yüksek işaret gürlüğü oranlarında

$$P(e) \approx N(d_{\text{free}}) \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{\text{free}}}{2\sqrt{N_0}} \right) \quad (14)$$

şeklinde ifade edilir.

Aynı şekilde bit hata olasılığı için de

$$P_b \leq \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial I} T(D; I) \Big|_{I=1, D=e^{-1/4N_0}} \quad (15)$$

üst sınırı elde edilir. Bhattacharyya sınırı kullanılarak bit hata olasılığına üst sınır getirilirse bu

$$P_b \leq \frac{1}{2m} \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{\text{free}}}{2\sqrt{N_0}} \right) \exp \left( \frac{d_{\text{free}}^2}{4N_0} \right) \frac{\partial}{\partial I} T(D, I) \Big|_{I=1, D=Z} \quad (16)$$

ifadesiyle verilen daha sıkı bir üst sınır olur. Buradaki  $Z = \exp(-1/4N_0)$  Bhattacharyya sınırıdır.

AWGN kanal üzerinden iletimde hata olasılığının alt sınırı gerçek bir alıcının hata olasılığının verilen yan bilgiyi kullanan alıcının hata olasılığından büyük olması gerçeğine dayanır. Yan bilgiyi kullanan alıcı  $C = (c_i)_{i=0}^{K-1}$  şeklindeki bir diziyi alır. Alıcı iletilen dizinin  $C$  veya  $C' = (c'_i)_{i=0}^{K-1}$  olduğuna karar verir.  $C'$ ,  $C$  'ye minimum Öklid uzaklığı kadar uzakta bulunan iletilmesi mümkün dizilerden seçilmiş bir dizidir. Böyle bir alıcının hata olasılığı

$$P_G(e|C) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\|f(C) - f(C')\|}{2\sqrt{N_0}} \right) \quad (17)$$

olur. Koşulsuz olasılık düşünülürse

$$P_G(e) = \frac{1}{2} \sum_c P(C) \operatorname{erfc} \left( \frac{\|f(C) - f(C')\|}{2\sqrt{N_0}} \right) \geq \frac{1}{2} \sum_c I(C) P(C) \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{\text{free}}}{2\sqrt{N_0}} \right) \quad (18)$$

olur. Buradaki  $I(C)$ , eğer  $\min_c [f(C), f(C')] = d_{\text{free}}$  ise 1 aksi halde 0 değerini alır. Eğer herhangi bir anda rasgele seçilen bir kafes yolu, bu anda bu yoldan

ayrılan ve sonraki bir anda tekrar bu yolla birleşen bir yola sahip ise ve bu iki yolun arasındaki uzaklık  $d_{free}$  ise sonuç olarak hata olasılığına

$$P(e) \geq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{free}}{2\sqrt{N_0}} \right) \quad (19)$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir. Fakat bu sınır her zaman geçerli değildir. Geçerli olabilmesi için kafes yollarının hepsinin birbirlerinden  $d_{free}$  kadar uzakda olmaları gerekir. Verilen bir TCM şeması için  $\wedge$   $d_{free}$  değerine ulaşabilen hata olaylarının minimum uzaklığını,  $N_{\wedge}(d_{free})$   $\wedge$  uzunluğundaki bu yolların sayısını gösterebilir. Eğer  $m$  her hangi bir kafes düğümündeki bilgi bitlerinin sayısı ise herhangi bir düğümden başlayan  $\wedge$  uzunluğunda  $N2^{m\wedge}$  tane yol vardır. Sonuç olarak  $N_{\wedge}(d_{free})/N2^{m\wedge}$  oranı verilen her hangi bir zamanda rasgele seçilen, bu yoldan o anda ayrılan ve sonraki bir zamanda tekrar bu yolla birleşen bir yola sahip, bir kafes yolunun olması olasılığı olur. Bu iki yolun uzunlukları  $\wedge$  ve aralarındaki Öklid uzaklığı  $d_{free}$ 'dir. Buradan

$$\psi \geq \frac{N_{\wedge}(d_{free})}{N2^{m\wedge}} \geq \frac{1}{N2^{m\wedge-1}} \quad (20)$$

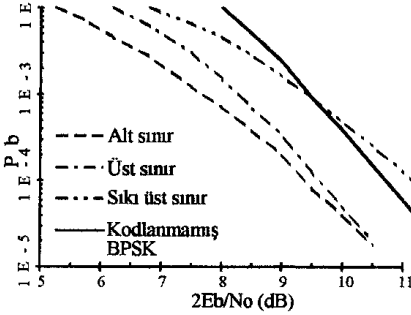
eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikde  $N_{\wedge}(d_{free}) \geq 2$  olduğu kabul edilmiştir. Sonuç olarak bit hata olasılığı için

$$P_b \geq \frac{\psi}{2m} \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{free}}{2\sqrt{N_0}} \right) \quad (21)$$

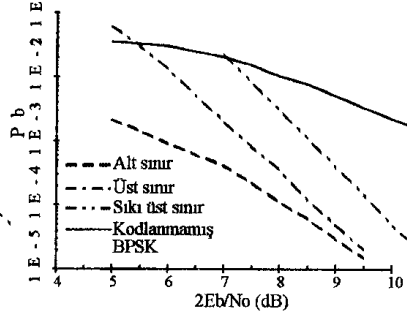
alt sınırı elde edilir.

Denk.(16) ve Denk.(21)'deki ifadelere bakılırsa bit hata olasılığının hem üst sınırının ve hem alt sınırının serbest uzaklığın birer fonksiyonu oldukları görülebilir. Şekil 6'da iki durumlu bir 4-PSK TCM şeması için bit hata

oranının üst ve alt sınırları gösterilmiştir. Şekil 7’de ise benzer eğriler dört durumlu bir 4-PSK şeması için verilmiştir [3].

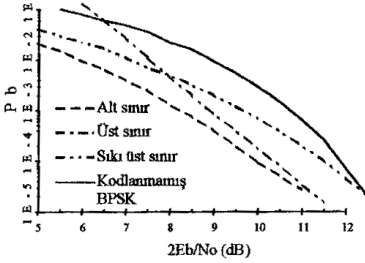


Şekil 6. 2-durumlu bir 4-PSK için bit hata olasılığına üst ve alt sınırlar sınırlar

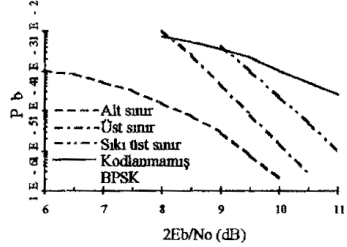


Şekil 7. 4-durumlu bir 4-PSK için bit hata olasılığına üst ve alt sınırlar sınırlar

Şekil 8’de iki durumlu 8-PSK TCM şeması için ve şekil 9’da ise dört durumlu 8-PSK TCM şeması için bit hata olasılığının alt sınırının, üst sınırlarının ve kodlanmamış 4-PSK’nın bit hata olasılığının  $2E_b/N_0$  oranına göre değişimi gösterilmiştir [3].



**Şekil 8.** 2-durumlu 8-PSK için bit hata olasılığına alt ve üst sınırlar sınırlar

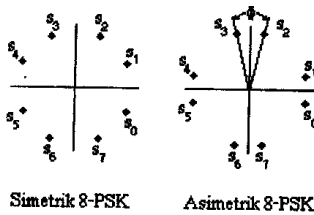


**Şekil 9.** 4-durumlu 8-PSK için bit hata olasılığına üst ve alt sınırlar

### III. ASİMETRİK TCM ŞEMALARI VE PERFORMANS ANALİZLERİ

İkinci bölümde ele alınan kodlanmamış AWGN ortamlarda optimum olan simetrik işaret kümeleri (birbirlerinden eşit uzaklıklarda yerleştirilen işaret noktaları) kodlanmış sistemlerde optimum olmayabilir [3]. İşaret takım yıldızının asimetrik şekilde düzenlenmesi simetrik takım yıldızına dayanan TCM şemasına göre bir kazanç sağlar. Asimetrik takım yıldızlarının kodlamada kullanılma fikri ilk kez Divsalar ve Yuen'in çalışmasında görülmüştür [7]. Bu çalışmanın sonuçları daha sonra Simon ve Divsalar tarafından, 2, 4, 8 ve 16 durumlu maksimum  $d_{free}$  açısından optimum TCM şemaları ile yüksek dereceli asimetrik işaret kümelerinin birleştirilmesi için kullanılmıştır [8].

M-PSK işaretinde bir derecelik serbestlik sahibi işaret kümeleri için  $m/(m+1)$  oranlı kafes kodlama ile kullanılan optimum asimetric  $2^{m+1}$  noktalı takım yıldızı,  $2^m$  noktalı simetrik bir takım yıldızı ile bunun faz döndürülmüş uyarlamasından geliştirilmiştir. Başka bir ifade ile, asimetric  $M=2^{m+1}$ -noktalı işaret kümesi, simetrik  $M/2$  noktalı bir işaret kümesi ile bunun  $\phi$  açısı kadar döndürülmüşünün birleştirilmesiyle elde edilir. Küme bölmeleme açısından bakıldığında,  $M$ -noktalı asimetric kümeyi şu şekilde açıklamak mümkündür:  $M$ -noktalı simetrik bir takım yıldızı şekil 4'de görüldüğü gibi iki tane  $M/2$  noktalı alt takım yıldızına bölünür. Birinci küme bölmelemesi seviyesindeki bu alt takım yıldızlardan birisinin noktaları  $\phi$  açısı kadar döndürülür. Sonra bu iki alt takım yıldızı tekrar birleştirildiğinde  $M$ -noktalı asimetric bir takım yıldızı elde edilir. Şekil 10'da simetrik ve asimetric 8-PSK takım yıldızları, Şekil 11'de ise asimetric 8-PSK takım yıldızının küme bölmelemesi verilmiştir.

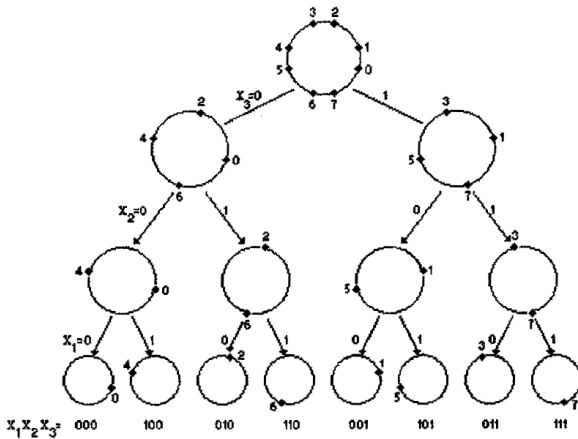


Şekil 10 . Simetrik ve asimetric 8-PSK'nın takım yıldızlar

Şekil 11'de verilen asimetric 8-PSK takım yıldızın küme bölmelemesi incelendiğinde, orjinal küme de dahil her kümenin eşit sayıda işarete sahip olduğu ve işaretleri arasında en büyük minimum uzaklık bulunan iki alt



kümeye bölünebildiği görülür. Simetrik M-PSK şemalarında optimizasyon kriteri serbest Öklid uzaklığını maksimum yapmak olduğu halde, asimetrik M-PSK şemalarının optimizasyonu için bunun yanında  $\phi$  dönme açısının da en uygun değerinin seçilmesi gerekir.



Şekil 11. Asimetrik 8-PSK takım yıldızın küme bölmelenmesi

Her zaman olduğu gibi,  $m/(m+1)$  oranlı bir kafes kodlayıcısı her bir  $m$  tane giriş bitine karşılık  $m+1$  tane kodlanmış çıkış sembolünü üretir. Bu semboller kullanılan eşleme işlemine göre asimetrik  $2^{m+1}$  işaret kümesinin belirli bir elemanına karşı düşürülür. Böylece ayırık  $i$  zamanında iletilen her bir  $x_i$  kompleks işareti bu zamandaki kodlayıcının durumunun ( $\sigma_i$ ) ve kaynak sembollerinin doğrusal olmayan bir fonksiyonudur, yani

$$x_i = f(u_i, \sigma_i) \quad (22)$$

Kodlayıcının bir sonraki ayırık zamandaki durumu kodlayıcının bu andaki durumunun ve bu anda kodlayıcıya giren kaynak sembollerinin doğrusal olmayan bir fonksiyonudur:

$$\sigma_{i+1} = g(u_i, \sigma_i) \quad (23)$$

i ayırık zamanında alınan işaret örneği

$$r_i = x_i + n_i \quad (24)$$

şekilde gösterilir. Buradaki  $n_i$ , sapması  $\sigma^2$  olan sıfır ortalamalı kompleks Gauss gürültüsüdür.

Viterbi kod çözücünün ortalama hata olasılığını bulmak için çarpım-kafes algoritması kullanılır [3]. Alınan işaret dizilerinin  $X_L$  vektörleri ile bu işaretlerin etiketlerinin  $C_L$  vektörleri arasındaki bire-bir ilişki kullanılarak

$$P(X_L \rightarrow \tilde{X}_L) \leq Z^{\sum_{i=1}^L \delta^2(u_i, s_i)} \quad (25)$$

yazılabilir. Buradaki

$$\delta^2(u_i, s_i) = |f(u_i, s_i) - f(u_i', s_i')|^2 \quad (26)$$

ifadesiyle verilir. Burada  $u_i'$  ve  $\sigma_i'$ , sırasıyla kaynak sembollerinin ve kodlayıcı durumunun tahmin edilen değerleridir.  $S_i$  süper durumu ve  $U_i$  süper sembolü

$$S_i = (\sigma_i, \sigma_i') \quad U_i = (u_i, u_i') \quad (27)$$

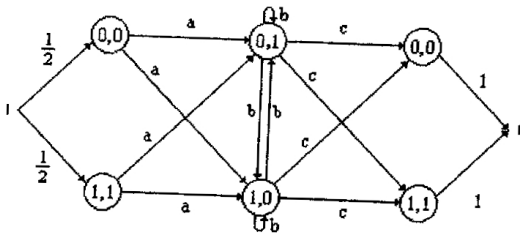
şeklinde tanımlanır.  $\sigma_i = \sigma_i'$  olduğu zaman  $S_i$  iyi (doğru) süper durum,  $\sigma_i \neq \sigma_i'$  olduğunda  $S_i$  kötü (yanlış) süper durum olarak isimlendirilir. Sonuç olarak bit hata olasılığı

$$P_b \leq \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial I} T(D, I) \Big|_{I=1, D=Z} \quad (28)$$

ifadesiyle üstten sınırlanır. Daha sıkı bir üst sınır ise

$$P_b \leq \frac{1}{2m} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{mE_b}{N_0} \frac{d_{\text{free}}^2}{4}} \right) D^{-d_{\text{free}}} \frac{\partial}{\partial I} T(D, I) \Big|_{I=1, D=Z} \quad (29)$$

ifadesiyle verilir[3]. Burada  $T(D, I)$ , TCM şemasının süper durum diyagramının transfer fonksiyonu ve  $Z = e^{-mE_b/4N_0}$ 'dir. Şekil 12'de 1/2 kodu için iki durumlu kafes diyagramının süper-durum geçiş diyagramı verilmiştir.



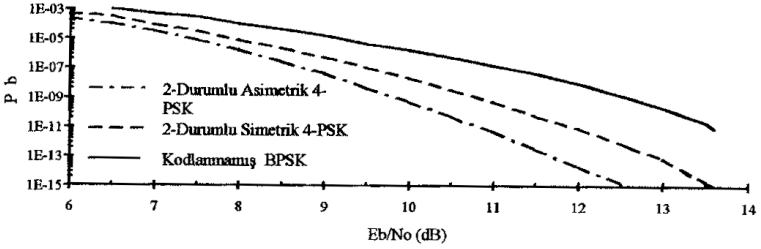
**Şekil 12 .** 1/2 oranlı 4-PSK TCM'in 2-durumlu kafes diyagramının süper-geçiş diyagramı

Hedef olarak büyük SNR değerleri için  $d_{\text{free}}$  değerini maksimum yapmak ortalama bit hata olasılığını minimum yapmakla aynı anlama gelir.

Asimetrik durumun optimizasyonu, SNR değeri sonsuz limitine ulaşırken işaret noktaları birbirine birleşme eğilimi gösteren işaret kümelerini üretir. Bu sonuç katastrofik bir kod ortaya çıkarır. Katastrofik kodda karesel uzaklıkları, karesel serbest uzaklığa eşit veya biraz fazla olan çok çok uzun yollar ortaya çıkar. Bu olduğunda hata olayı olasılığı üzerindeki birleşik sınıra artık ilk terimiyle yaklaşım yapılamaz veya kodlama kazancının belirlenmesinde serbest uzaklık tek başına yeterli olamaz.

İşaret noktaları birbirleriyle birleştiğinde ortaya çıkan katastrofinin yanında, işaretlerin biri-birine çok yaklaşımları maksimum-olasılıklı kod çözücünün sistemi, taşıyıcı zamandaşlamasının tam sağlanamaması durumunda, sistemin faz sıçramalarına daha hassas duruma getirmesine sebep olur. İşaret noktaları birbirlerine yaklaştıkça hata yollarının bazıları tarafından uzaklığın ortaya çıkarılması oldukça yavaşlar ve bu kod çözme için büyük yastık hacmini gerektirir. Bu nedenle asimetrik işaret kümelerinin optimizasyonu için performans ölçüsü olarak bit hata olasılığını kullanmak tercih edilir.

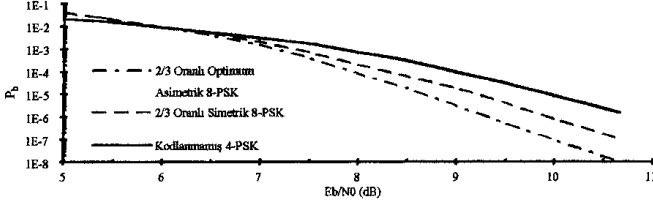
1/2 oranlı, 2-durumlu optimum A4-PSK TCM şemalarında  $d_{\text{free}}^2=8$  olur ve kodlanmamış 2-PSK'ya göre 3 dB'lik kodlama kazancı elde edilir. Halbuki simetrik durumda kodlama kazancı 1,76 dB idi. Kodlanmamış 2-PSK'da karesel minimum uzaklık 4'dür. 1/2 oranlı 2-durumlu asimetrik TCM şemasının optimum durumu  $\phi=\pi$  için gerçekleşir. Bu ise 1 ile 2 ve 0 ile 3 noktalarının birleşmesi demektir. Noktaların birleşmesi kodu katastrofik hale getireceğinde 2-durumlu kafes ile 3 dB'lik kodlama kazancı ulaşılamayacak bir limit değeridir. Şekil 13'de 1/2 oranlı iki durumlu kafes kodlama yapılmış simetrik ve asimetrik 4-PSK için bit hata olasılığına üst sınırlar verilmiştir [3].



**Şekil 13.** 1/2 oranlı, 2-durumlu simetrik ve asimetrik 4-PSK TCM şemaları için bit hata olasılığının  $E_b/N_0$ 'a göre değişim eğrileri

1/2 oranlı 4-durumlu optimum A4-PSK TCM şemasında  $d_{free}^2=10,67$  olur ve 4,26 dB kodlama kazancı elde edilir. Simetrik durumdaki kodlama kazancı 3,98 dB'dir. 8-durumlu optimum A4-PSK için  $d_{free}^2=12$ , kodlama kazancı 5,23 dB olur. Simetrikde ise kodlama kazancı 4,77 dB'dir.

2/3 oranlı 2-durumlu optimum A8-PSK TCM şemasında  $d_{free}^2=4$  olur ve işaretleri arasındaki karesel minimum uzaklık 2 olan kodlanmamış 4-PSK'ya göre 3 dB'lik bir kodlama kazancı elde edilir. Simetrik durumdaki kodlama kazancı 1,1 dB olarak elde edilmişti. Şekil 14'de 2/3 oranlı 2-durumlu simetrik ve asimetrik 8-PSK TCM şemaları için bit hata olasılığının üst sınırları verilmiştir [3].



**Şekil 14.** 2/3 oranlı 2-durumlu simetrik ve asimetrik 8-PSK TCM şemaları için bit hata olasılığının üst sınırının  $E_b/N_0$ 'a göre değişimi

2/3 oranlı 4-durumlu optimum asimetrik ve simetrik 8-PSK TCM şemalarının her ikisi için de 3 dB kodlama kazancı elde edilir. Bu durum için simetri ilave kodlama kazancı sağlamadığı halde kodlayıcı ve kod çözücünün karmaşıklığını arttırmak gibi bir olumsuzluğa yol açar. 8-durumlu optimum A8-PSK TCM için  $d_{free}^2=4,586$  ve kodlama kazancı 3,6 dB'dir ki simetrik durumda da aynı kazanç elde edilir. 16-durumlu optimum A8-PSK TCM için  $d_{free}^2=5,2$  ve kodlama kazancı 4,15 dB olur. Simetrik 8-PSK TCM şemasında kodlama kazancı 4,126 dB'dir. 16-durumlu bir kafes diyagramında asimetri çok düşük bir kodlama kazancı sağlamaktadır.

2-durumlu, 3/4 oranlı optimum A16-PSK TCM şemasında  $d_{free}^2=1,172$  olur.  $d_{min}^2=0,586$  olan kodlanmamış 8-PSK'ya göre 3 dB'lik kodlama kazancı sağlar. 3/4 oranlı simetrik 16-PSK TCM şemasında kodlama kazancı 1 dB'dir. 4-durumlu 3/4 oranlı A16-PSK TCM şemasında  $d_{free}^2=1,38$ , kodlama kazancı 3,72 dB (simetrik durum için  $d_{free}^2=1,324$  ve 3,54 dB) elde edilir. 8-durumlu 3/4 oranlı optimum A16-PSK TCM

şemasında  $d_{\text{free}}^2=1,589$ , kodlama kazancı 4,333 dB'dir. Simetrik durumda ise kodlama kazancı 4,014 dB'dir.

#### IV. ÖZET

Bir TCM şemasında, bit hata olasılığının sınırlarının elde edilmesinde önemli bir parametre olan serbest Öklid uzaklığını arttırmak önemlidir. Bunun bir yolu kafes diyagramındaki durum sayısını arttırmaktır. Şekil 6 ve şekil 7'deki eğriler karşılaştırıldığında aynı kod oranlı bir TCM şemasının durum diyagramındaki durum sayısının artmasıyla performansındaki iyileşme görülür. Durum sayısı arttığında  $E_b/N_0$  oranının küçük değerlerinde bit hata olasılığının alt ve üst sınırları birbirlerinden daha uzaktır, büyük değerlerinde ise birbirlerine daha çok yaklaşır.

TCM'de, asimetrik takım yıldızı kullanmak da ilave bir performans iyileşmesi sağlar, ancak bu durumda katastropik kodların üretilmemesine dikkat edilmelidir. Simetrik TCM şemalarında optimizasyon kriteri serbest Öklid uzaklığıdır. Asimetrik TCM'de ise bunun yanında asimetri açısında optimum olması istenir. Fakat bazen ikisi birden sağlanamayabilir.

#### KAYNAKÇA

- [1] G. Ungerboeck. "Channel coding with multi-level/phase signals."  
IEEE Trans. Inf. Theo., Vol. IT-28, PP. 55-67. Jan. 1982
- [2] G. Ungerboeck and I. Csajka. "On improving data-link performance by increasing the channel alphabet and introducing sequence coding."  
Int. Symp. Inform. Theo. Ronneby, Sweeden. Jun. 1976.
- [3] E. Biglieri, D. Divsalar, P.J. McLane, K. Simon, "Introduction to trellis-

- coded modulation with application”, McMillon Publishing Comp., Newyork, 1991.
- [4] H. Y. Chung, “Rate 3/4 trellis-coded QPSK”, Proc. of International Conference on Signal Procesing. pp. 354-361, 1990, Ankara, Turkey.
- [5] G. Ungerboeck. “Trellis-coded modulation with redundant signal sets. Part I:Introduction. Part II: State of the art.” IEEE Comm. Mag., vol. 25, pp. 12-22. Feb. 1987.
- [6] A. R. Calderbank and J. E. Mazo. “A new description of trellis code.” IEEE Trans. Inf. Theo., vol. IT-30, pp. 784-791. Nov. 1984.
- [7] D. Divsalar and J. H. Yuen, “Asymeric M-PSK for trellis codes.”, Proc. Globecom '84, Atlanta, Ga., pp. 20.6.1-20.6.8, Nov. 1984.
- [8] M. K. Simon and D. Divsalar, “ Combined trellis coding with asymeric M-PSK modulation”, JPL Publication 85-24, Pasadena, Calif., May 1, 1985.