Erc. Üniv. Fen Bil. Derg. 15,1-2 (999) 77-86

BAZI KONİKLERİN İNVERSİVE YAY UZUNLUKLARI

Mehmet ÖZDEMİR & Nural YÜKSEL
Erciyes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,Kayseri
e-mail:yukseln@erciyes.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada farklı koniklerin inversive yay uzunluklarını hesaplamak için gerekli olan bir lemma ile bir teorem ispat edildi. Ayrıca söz konusu koniklerin inversive yay uzunlukları hesaplandı.

THE İNVERSİVE ARC-LENGTH OF SOME CONİCS

SUMMARY

In this paper one lemma and one theorem that are needed to compute inversive arc-length of different conics are proved. Furtheremore, inversive arc-length of above mentioned conics are evalua

1.GİRİŞ

$\alpha : I \to E^n$ eğrisi verilsin. $t_1, t_2 \in I \subset R$ olmak üzere

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt$$

şeklinde tanımlı s reel sayısına, α eğrisinin $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

$$\alpha : I \to E^n$$
$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s))$$

eğrisi için $\forall s \in I$ olmak üzere $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri ve s parametresine de yay parametresi denir.

s yay parametresi, v tanjant vektör ve η normal vektör olmak üzere α nın k eğriliği

$$\frac{dv}{ds} = k\eta$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.1 (Wirtinger's Eşitsizliği). $f \in C^1(R)$, 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$$

olsun. Bu taktirde

$$\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt \geq \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$$

dir. Burada eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$f(t) = a\cos t + b\sin t \qquad a, b \in R$$

olmasıdır [1].

İspat: Sürekli olan $f\big|_{[0,2\pi]}$ kısıtlaması, $[0, 2\pi]$ üzerinde kare integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayı $L^2([0, 2\pi])$ ye aittir ve böylece f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Fourier serisi ile L^2 normuna yaklaştırılabilir.

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$$

olduğundan $a_0 = 0$ olur ve Parseval Teoreminden [12]

$$| f |^2 = \sum_{n \geq 1} a_n^2 + b_n^2 = \int_0^{2\pi} f^2\,dt$$

elde edilir. f' nün Fourier serisi

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} f'(t) \cos nt\,dt$$

ve

$$\beta_n = \int_0^{2\pi} f'(t) \sin nt \, dt$$

integralleri yardımıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt)$$

şeklinde bulunur. Tekrar Parseval teoremini uygularsak,

$$| f' |^2 = \int_0^{2\pi} f'^2 \, dt = \sum_{n \geq 1} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \geq | f |^2$$

elde edilir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\forall n > 1$ için

$$a_n^2 + b_n^2 = 0$$

olmasıdır.

Teorem 1.1. E Euclid düzleminde C^p sınıfından her basit kapalı C eğrisi

$$\text{leng}^2(C) \geq 4\pi \, \text{area} \, (C_{int})$$

eşitsizliğini sağlar. Üstelik eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart C nin bir daire olmasıdır [1].

İspat: Kabul edelim ki bir homotopy altında C; 2π uzunluğuna sahip, h=(f,g) yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Eğrinin merkezi C_{int} de olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 0$$

yazılabilir. h, yay uzunluğu ile parametrelendirildiğinden

$$\int_0^{2\pi} (f'^2 + g'^2)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi = \text{leng}\ (C)$$

elde edilir. Diğer taraftan $d(x\,dy) = dx \wedge dy$ olmak üzere Stoke Teoremin den

$$\text{area}\ (C_{int}) = \int_{C_{int}} dx \wedge dy = \int_{\overline{C}_{int}} dx \wedge dy = \int_C x\,dy = \int_0^{2\pi} f\,g'\,dt$$

bulunur. Buradan

$$2(\pi - \text{area}\ (C_{int})) = \int_0^{2\pi} (f'^2 + g'^2 - 2 f g')\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (f'^2 - f^2)\,dt + \int_o^{2\pi} (f - g')^2 dt$$

elde edilir. Böylece $2\,\text{area}\ (C_{int}) \geq 2\pi$ ve $\text{leng}\ (C) = 2\pi$ olduğundan, sonuç olarak

$$\text{leng}^2(C) \geq 4\pi\,\text{area}\ (C_{int})$$

eşitsizliği bulunur. Eşitlik durumunun sağlanması için

$$\int_0^{2\pi} (f'^2 - f^2)\,dt = 0$$

ve

$$\int_o^{2\pi} (f - g')^2 dt = 0$$

şartları gereklidir. ilk şart Lemma 1.1 den f(t) = acost + bsint eşitliğini verir. İkinci şart
g(t)= asint-bcost+c olmak üzere süreklilikten dolayı $g'(t) = f(t)$ yi verir.

2. SONSUZ KÜÇÜK COXETER SABİTİ

Coxeter [5] çalışmasında, kesişmeyen iki daire arasındaki inversive uzaklığı tanımladı. Düzlemde bir üçgenin kenarları ve açıları arasında

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

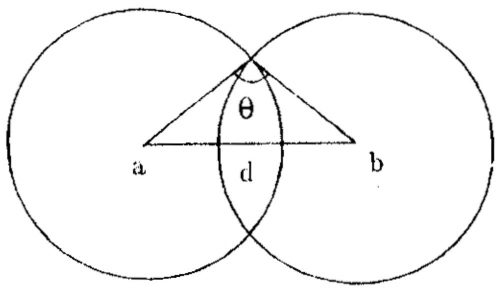
bağıntısı vardır. Benzer şekilde yarıçapları a ve b, merkezler arası uzaklık d, kesişme açısı θ olmak üzere kesişen iki daire için

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

olduğundan

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab} \tag{2.1}$$

bağıntısı yazılabilir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1

(2.1) in sol tarafı kesişen daireler için anlam ifade etmesine rağmen sağ taraf kesişmeyen daireler içinde anlam ifade eder. Bunu aşağıdaki şekilde açıklamak mümkündür.

$$\mu = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab} \qquad \text{daireler}$$

$\lvert\mu\rvert < 1$	kesişen
$\mu = 1$	iç teğet
$\mu = -1$	dış teğet
$\lvert\mu\rvert > 1$	ayrık

μ nün Geometrik Anlamı

Coxeter kesişmeyen iki daire arasındaki δ uzaklığını, $\cosh\ \delta = \mu$ şeklinde tanımlamaktadır. Kesişen iki daire arasındaki açının tanımına benzer şekilde, kesişmeyen iki daire arasındaki inversive uzaklık iki dairenin rölatif pozisyonunun conformal invaryantıdır. Bir eğri üzerinde çok yakın iki noktanın oskülatör daireleri arasındaki uzaklığı hesaplamada bu formülü kullanacağız. $\alpha,\ z:(\gamma,\beta)\to C$ yay uzunluğu ile parametrelendirilen C de düzgün bir eğri ve k(s) de α nın alışılmış Euclid eğriliği olsun. Kabul edelim ki $\left|k'(s)\right| > o$ olsun. Böylece α, vertex noktasına sahiptir. Buradan oskülatör dairenin yarıçapı 1/k ve merkezi $z + iz'/k$ dadır. s ve s+h parametrelerine göre oskülatör daireler arasındaki inversive uzaklık

$$\cosh\ \delta(s+h,s) = \frac{\dfrac{1}{k(s+h)^2} + \dfrac{1}{k(s)^2} - \left| z(s+h) - z(s) + i\left\{ \dfrac{z'(s+h)}{k(s+h)^2} - \dfrac{z'(s)}{k(s)^2} \right\} \right|}{\dfrac{2}{k(s+h)\,k(s)}}$$

ile verilir. Bu ifade h civarında Taylor serisine açılırsa,

$$1 + \frac{\delta^2}{2} + \ldots = \cosh\ \delta = 1 + \frac{1}{4\,!}k'(s)^2 h^4 + O(h^5) \qquad (2.2)$$

elde edilir. Belirtelim ki bu ifadenin sağ tarafı yeteri kadar küçük h için 1 den büyüktür. Eğrinin keyfi bir köşe noktası üzerindeki yakın noktalarında oskülatör dairelerinin ayrık olduğu ispatlanabilir. Buradan görülür ki böyle bir eğrinin bütün oskülatör daireler cümlesi iç içe geçmiş eğri ailesi formundadır. (2.2) den

$$\sqrt{\delta(s+h,s)'} = 12^{-1/4}\sqrt{|k'(s)|}\,h + O(h^2)$$

elde edilir. Buradan $w = \sqrt{|k'(s)|}$ ifadesi bir eğri üzerinde Möbius grubunun hareketleri altında invaryant bir formdur. Bu manada bir köşe olmama özelliği, inversive invaryant ve köşe olma özelliğide keza öyledir. w yı köşe noktasında 0 olarak tanımlayabiliriz ve o hala sürekli bir invaryant formdur. Böylece α eğrisinin inversive yay uzunluğu $\int_\alpha w$ integrali ile tanımlanır. Bu, α nın inversive invaryantıdır.Gerçekten $a \in \alpha$ sabit bir nokta olmak üzere eğriyi v-tabii parametresi ile parametrelendirebiliriz, burada

$$v(p) = \int_a^p w$$

dır. y = f(x) kartezyen denklemi ile verilen bir düzlemsel eğrinin eğriliği $\Delta = 1 + f'^2$ ve $ds = \Delta^{1/2}dx$ olmak üzere

$$k = \frac{1}{p} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = f''\Delta^{-3/2} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. (2.3) ün her iki tarafının s yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$k = \frac{f'''}{\Delta^2} - \frac{3f'f''^2}{\Delta^3}$$

elde edilir. Buradan bir eğrinin inversive yay uzunluğu

$$\int_{\alpha} w = \int_{\alpha} \sqrt{\left| k' \right|}\, ds = \int_{\alpha} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left| \Delta f''' - 3 f' f''^2 \right| \right\}^{1/2} dx \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (2.5)$$

elipsi için inversive yay uzunluğunu hesaplayalım. (2.5) den $f = a\sqrt{1-x^2}$ olmak üzere gerekli türevler alınıp (2.4) de yerine yazılırsa

$$\int_{\alpha} w = 4 \int_{0}^{1} \left\{ \left| \left(\frac{1 + x^2(a^2-1)}{1-x^2} \right) \left(\frac{-3ax}{(1-x^2)^{5/2}} \right) - 3 \left(\frac{-ax}{\sqrt{1-x^2}} \right) \left(\frac{-a}{(1-x^2)^{3/2}} \right)^2 \right| \right\}^{1/2}$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2(a^2-1)}\, dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\alpha} w = 4\sqrt{3a(a^2-1)} \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{(1-x^2)^{1/4}\,(1+x^2(a^2-1))}\, dx$$

bulunur. Bu son integralde $x = \sin\theta$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_{\alpha} w = 4\sqrt{3a(a^2-1)} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\theta\,\cos\theta}}{\cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta}\, d\theta \quad (2$$

elde edilir. Böylece elips için inversive yay uzunluğu (2.6) integralinden hesaplanır. Benzer düşünceyle

$$x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

hiperbolü için inversive yay uzunluğu

$$\int_{\alpha} w = 4\sqrt{3a(a^2+1)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos\theta}}{a^2+\cos^2\theta} d\theta$$

integralinin sonucu ile hesaplanır. Daire ve parabol içinde integral elemanter olarak hesaplanır.

Aşağıda farklı koniklerin inversive yay uzunluğu için bir tablo verilmiştir. Burada e dış merkezlik ve θ da asimptotlar arasındaki açıdır.

Tablo 2.1

Tipi	*e*	*İnversiveuz.*	*Tipi*	θ	*İnversiveuz.*
Daire	0.0	0.0	*Parabol*	0.0	$\sqrt{6}\pi = 7.6953$
Elipsler	0.1	0.59	*Hiperboller*	0.1π	12.10
	0.2	1.19		0.2π	10.71
	0.3	1.80		0.3π	9.60
	0.4	2.45		0.4π	8.63
	0.5	3.15		0.5π	7.70
	0.6	3.92		0.6π	6.77
	0.7	4.81		0.7π	5.79
	0.8	5.91		0.8π	4.68
	0.9	7.48		0.9π	3.30

KAYNAKLAR

[1] M. Berger and B. Gostiaux, " Differential geometry: Manifolds, Curves and Surfaces, ", Springer-Verlang New York 1987.

[2] G. Cairns, M. Özdemir and E. H. Tjaden, A Counter Example to a Conjecture of U. Pinkal, Topology, 31 (1992), 557-558.

[3] D. R. J. Chillingworth, Winding Numbers on Surfaces, 1. Math. Ann. 196, 218-249 (1972).

[4] R. Courant, Differential and Intagral Calculus, Vol(II), New York, Interscience Publishers Inc. (1936).

[5] H. S. M. Coxeter, Inversive distance, Ann. Math. Pura Appl. (4) 71 (1966) 73-83.

[6] M. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall (1976).

[7] H. H. Hacısalihoğlu, Differential Geometry, inönü Üniversitesi Fen- Ed. Fakültesi Yayınları Mat, No. 2 1983.

[8] S. B. Jackson, Vertices of Plane Curves, Bull. Amer. Math. Soc, 50 (1944) 564-578

[9] B. O' Neill, Semi-Riemannian Geometry - With Applications to Relativity, New York, Academic Press Inc. (1983).

[10] U. Pinkal, On the Four-Vertex Theorem, Aequationes Mathematice, 34 (1987), 221-230.

[11] M. A. Spivak, Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. II. Houston. Publish or Perish Inc. (1979).

[12] A. Zygmund, Trigonometric Series, Vol I, Cambridge Univ. Press, 1959.