Erc. Üniv. Fen. Bil. Derg 15, 1-2 (999)68-76

MANİFOLD DÖNÜŞÜMLERİ ALTINDA KORUNAN ÖZELLİKLER

Mehmet ÖZDEMİR
Erciyes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,Kayseri
e-mail:ozdemirm@erciyes.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada Normal dönüşüm, Stereografik izdüşüm, Mercator izdüşümü ve Lambert izdüşümü altında bazı özelliklerin korundukları gösterildi.

SOME PROPERTIES PRESERVED UNDER THE MANIFOLD MAPS

SUMMARY

In this paper we will show that some properties are preserved under the Normal map, Stereographic projection, Mercators's projection and Lambert projection.

GİRİŞ

Bir topolojik n-manifold M ve M nin bir atlası S olsun. Eğer S atlası $C^k -$ sınıfından diferensiyellenebilir ise, M ye k. mertebeden diferensiyellenebilir n-manifold adı verilir veya kısaca $C^k -$manifold da denir [1]. E^n nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı $N = (a_1, a_2, ..., a_n)$ olsun. $\forall p \in M$ için

$$S_P : T_{M(P)} \to T_{M(P)}, X_P \to S_P(X_P) = D_{X_P} N$$

şeklinde tanımlı S_P dönüşümüne M nin şekil operatörü adı verilir. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde bir α eğrisi verilmiş olsun. α nin her noktasındaki teğeti bir asli doğrultu ise, α eğrisine M nin bir eğrilik çizgisi denir [2].

2. MANİFOLD DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım 2.1. E^n de M ve M_r iki hiperyüzey olsun. Bir $f : M \to M_r$ dönüşümünün eki $f_* : \chi(M) \to \chi(M_r)$ olmak üzere bir $\alpha : I \to M$ eğrisi eğrilik çizgisi ve teğet vektör alanı T iken $S(T) = \lambda T$ ifadesinden başka $S_r(f_*(T)) = \mu . f_*(T)$ bağıntısı sağlanıyor ise, α eğrilik çizgisi f tarafından korunuyordur denir. Burada S ve S_r sırası ile M ve M_r hiperyüzeylerine ait şekil operatörleridir [2].

NORMAL DÖNÜŞÜM

Tanım 2.2. E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı

$$N=\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, a_i \in C^\infty(M,R)$$

olmak üzere

$$M_r=\{(p_1+ra_1(p), p_2+ra_2(p),\ldots,p_n+ra_n(p)), p\in M\}$$

seklinde tanımlı M_r hiperyüzeyine M nin bir parelel hiperyüzeyi denir. $f:M\to M_r, p\to f(p)=(p_1+ra_1(p), p_2+ra_2(p),\ldots,p_n+ra_n(p))$ dönüşümüne de M nin M_r üzerine normal dönüşümü denir [2].

Bundan sonra $X=\sum_i^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\in\chi(M)$ vektör alanı yardımıyla

$$\overline{X}=\sum_i^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\in\chi(M_r)$$

vektör alanını $b_i(p)=\xi_i(f(p))$ eşitliği ile tanımlayacağız.

Yardımcı Teorem 2.1. M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r ve $f:M\to M_r$ bir normal dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler doğrudur.

1) $p\in M$ ve $\forall X_p\in T_M(p)$ için

$$f_*(X_p)=\overline{X}+r.S(\overline{X}_p)\big|_{f(p)}$$

2) $\forall X\in\chi(M)$ için

$$S_r(f_*(X))=S(\overline{X})$$

3) $\forall X\in\chi(M)$ için $S(X)=kX$ ise

$$S_r(f_*(X))=\frac{k}{1+rk}f_*(X)$$

dir 2].

Teorem 2.1. M nin bir paralel hiperyüzeyi M_r ve $f:M\to M_r$ bir normal dönüşüm olsun.Bu taktirde f altında eğrilik çizgisi olma, Umbilik nokta ve ücüncü temel form olma özellikleri korunur.

Ispat $\alpha:I\to M$ eğriside M de bir eğrilik çizgisi olsun. Teğet vektör alanı T için $S(T)=\lambda T$ olur. Yardımcı Teorem 2.1 den

$$S_r(f_*(T))=\frac{k}{1+rk}f_*(T)$$

$\frac{k}{1+rk}=\lambda$ için

$$S_r(f_*(T))=\lambda.f_*(T)$$

elde edilir. O halde normal dönüşüm eğrilik çizgişi olma özelliğini korur. M nin bir umbilik noktasi p olsun. Bu taktirde $\forall X_p \in T_M(p)$ ve $\lambda \in R$ için

$$S(X_p) = \lambda X_p$$

dir. Diğer taraftan Yardımcı Teorem 2.1 gereğince

$$f_*(X_P) = \overline{X}_P + r.S(\overline{X}_P)\Big|_{f(p)}$$
$$= (1 + r\lambda)\overline{X}_P$$

yazılabilir. Buna göre $\forall f_*(X_P) \in T_{M_r}(f(p))$ için

$$S_r(f_*(X_P)) = S(\overline{X}_P)$$
$$= \lambda \overline{X}\Big|_{f(P)}$$
$$= \frac{\lambda}{1+\lambda r} f_*(X_P)$$

veya

$$S_r = \frac{\lambda}{1+\lambda r}\Big|_{f(P)}$$

olur. Böylece umbilik nokta olma özelliği korunur. M nin üçüncü temel formu III ve M_r nin üçüncü temel formu III_r olsun. $p \in M$ ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$III_r((f_*)(X_P),(f_*)(Y_P)) = \langle S_r(f_*(X_P)), S_r(f_*(Y_P))\rangle$$
$$= \langle S(\overline{X}), S(\overline{Y})\rangle\Big|_{f(P)}$$
$$= \langle S(X), S(Y)\rangle$$
$$= III(X_P, Y_P)$$

yazılabileceğinden korunur.

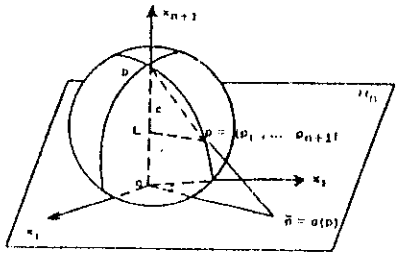
STEREOGRAPHİK İZDÜŞÜM

Tanım 2.3. E^{n+1} de bir hiperküre S_c^n ve bir n-hiperdüzlem H_n verilsin. $S_c^n \cap H_n = 0$ olsun. $0 \in E^{n+1}$ in c ye göre simetriği $b \in S_c^n$ olmak üzere

$$\sigma : S_c^n / b \to H_n$$

$p \in S_c^n / b, q \in H_n$ için $\sigma(p) = q$ seklinde tanımlanan σ fonksiyonuna stereografik izdüşüm denir [3].

Stereografik izdüşümün analitik ifadesi, S_c^n nin orijinden geçmesi ve c merkezinin X_{n+1} ekseninde olması halinde (şekil 2.1)



Şekil 2.1

$$\sigma(p) = \frac{rp - bp_{n+1}}{r - p_{n+1}}$$

şeklindedir. σ nin türev dönüşümü ise,

$$\sigma : S_c^n / b \rightarrow H_n$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, 0)$$

$$\sigma(X) = \bar{x}_i = \frac{rx_i}{r - x_{n+1}}$$

den

$$\sigma_*|_P = \frac{1}{r - x_{n+1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{x_1}{r - x_{n+1}} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{x_n}{r - x_{n+1}} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{x_n}{r - x_{n+1}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2. Stereografik izdüşüm altında eğrilik çizgisi ve umbilik nokta olma özellikleri korunur.

İspat. $\sigma : S_c^n / b \to H_n$ stereografik izdüşümünü gözönüne alalım. Hiperküre için şekil operatörü $S_k = I_n$ ve hiperdüzlem için şekil operatörü $S_d = O_n$ dir.

$$\alpha : I \to S_c^n / b$$

eğrisi hiperküre üzerinde bir eğrilik çizgisi ve teğet vektör alani T ise,

$$S_k(T) = \lambda T, \forall T \in \chi(S_c^n)/b$$

dir.

$$S_d(\sigma_*(T)) = O.\sigma_*(T)$$

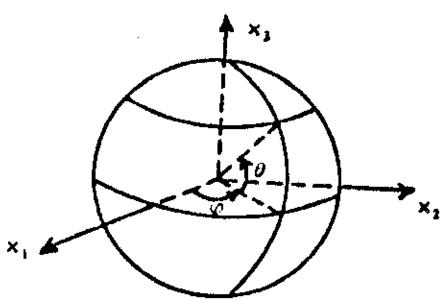
yazılabileceğinden, σ_* altında teğet vektör alanlarının resmi olan $\sigma_*(T)$ ler birer asli doğrultu olur.
Bu yüzden hiperdüzlem üzerindeki her eğri eğrilik çizgisi olur. O halde stereografik izdüşüm altında eğrilik çizgisi olma özelliği korunur. $p \in S_c^n / b$ bir umbilik nokta olsun. O zaman $S_k(X_P) = \lambda X_P, \forall X_P \in T_{S_c^n/b}(p)$, yazılabilir. Diğer taraftan

$$S_d(\sigma_*(X_P)) = O.\sigma_*(X_P)\Big|_{\sigma(P)} = O.I_n$$

yazılabileceğinden umbilik nokta olma özelliği korunur.

MERCATOR İZDÜŞÜMÜ

Tanım 2.4. Mercator izdüşümü E^3 de kürenin düzlem üzerine konform taşviridir [4]. Mercator izdüşümü



Şekil 2.2

$$f : S^2 \to E^2, (\theta, \varphi) \to f(\theta, \varphi) = (\lambda . \ln \tan \frac{\theta}{2}, \lambda \varphi) = (X_1, X_2)$$

şeklinde tanımlanır. Mercator izdüşümünün türev dönüşümü

$$f(\theta,\varphi)=(\lambda.\ln\tan\frac{\theta}{2},\lambda\varphi)=(X_1,X_2)$$

den

$$f_*=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda}{\sin\theta} & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Parelel daireler için $\theta=$sabit$,T_\varphi=(0,\lambda))$ ve meridyenler için

$\varphi=$sabit, $T_\theta=\left(\dfrac{\lambda}{\sin\theta},0\right)$

olduğundan

$$f_*(T_\theta)=\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}=\frac{\lambda}{\sin\theta}T_\theta$$

$$f_*(T_\varphi)=(0,\lambda^2)=\lambda T_\varphi$$

yazılır.

Teorem 2.3. Mercator izdüşümü altında eğrilik çizgisi ve umbilik nokta olma özellikleri korunur.

İspat S^2 küresinin şekil operatörü $S_k=I_2$ ve düzlemin şekil operatörü $S_d=O_2$ dır. Küre üzerinde bütün eğriler birer eğrilik çizgisi olduklarından meridyenler ve parelel daireleri de birer eğrilik çizgisidir. Bunların teğet vektör alanları olan T_θ,T_φ asli doğrultularının f_* altında düzlem üzerindeki resimleri olan doğrular için

$$S_d=\left(f_*(T_\theta)\right)=O.\frac{\lambda}{\sin\theta}T_\theta$$

$$S_d\left(f_*(T_\varphi)\right)=O.\lambda T_\varphi$$

yazılabileceğinden her doğrultu bir asli doğrultu ve her eğri bir eğrilik çizgisidir. Dolayısıyla f altında egrilik çizgisi olma özelligi korunur. Benzer sekilde umbilik nokta olma özelliğinin korunduğu ispatlanabilir.

LAMBERT İZDÜŞÜMÜ

Tanım 2.5. E^3de küreden silindir üzerine olan bir izdüşümdür. Kürenin noktalarının şilindir üzerindeki izdüşümünde resim noktalar, kürenin oktalarından silindirin eksenine çıkılan diklerin silindiri deldiği oktalardır.

(şekil 2.3.)[4]. Silindir denklemi $x^2+y^2=1, (z=t$ keyfi $)$ ve kürenin denklemi $x^2+y^2+z^2=1$ dir. Lambert izdüşümünün deklemi; $OXQ \approx OX'Q'$ ücgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OX'}}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OQ'}}, \overline{QQ'}=1$$

olur. Buradan

$$\frac{X}{X'}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1} \Rightarrow X'=\frac{X}{\sqrt{1-z^2}}$$

ve

$$x'^2+y'^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1-z^2}+y'^2=1 \Rightarrow y'=\frac{y}{\sqrt{1-z^2}}$$

bulunur buradan

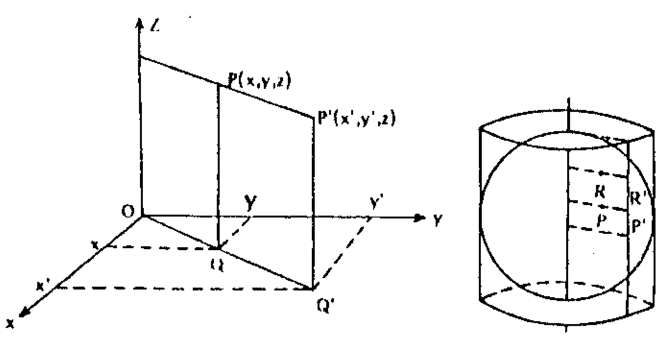
$$f: S^2 \to C^2$$

$$f(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z\right)$$

şeklinde elde edilir. Türev dönüşümü ise,

$$f_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} & 0 & \frac{xz}{(1-z^2)^{3/2}} \\ 0 & \frac{1}{1-z^2} & \frac{zy}{(1-z^2)^{3/2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.



Şekil 2.3

Teorem 2.4. Lambert izdüşümü meridyen ve paralel dairelerinden ibaret olan eğrilik çizgilerinin bu özelliğini korur.

İspat. $X : I \to S^2$ bir eğrilik çizgisi ve teğet T vektör alanı için $S_k(T) = \lambda T$, (λ =sabit) yazılabilir. Silindirin şekil operatoru S_c olmak üzere

$$S_c(f_*(T)) = \mu . f_*(T)$$

olacak şekilde doğrular bulabilirsek, o zaman eğrilik çizgisi olma özelliğinin korunduğunu gösterebiliriz. $f_*(X) = e_3$ için $X \in \xi(S^2)$ olacak biçimde doğrular var mıdır buna bakalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ için $f_*(x) = (0,0,1)$ eşitliğinden x_1, x_2, x_3 hesaplanırsa x noktası olarak

$$X = \left(-\frac{zx}{1-z^2}, -\frac{zy}{1-z^2}, 1 \right)$$

bulunur. Resimleri e_3 olan eğrilik çizgileri $S_k(X) = \lambda X, S_k = I$ olduğundan

$$X = \lambda X$$

$$\left(-\frac{zx}{1-z^2}, -\frac{zy}{1-z^2}, 1 \right) = \lambda \left(-\frac{zx}{1-z^2}, -\frac{zy}{1-z^2}, 1 \right)$$

$\lambda = 1$ bulunur. Silindiriçin e_3 doğrultusunda $S_c(f_*(x)) = O.f_*(x)$ dir. Cünkü şekil operatorü $S_c = O_2$ dir.

Sonuç 2.1. f_* altında teğet vektör alanının resmi silindir üzerinde e_3 olan eğrilik çizgileri silindir üzerinde de eğrilik çizgileridir. f_* altında teget vektör alanlarının resimleri e_3 e dik olan eğrilik çizgileri: $\langle f_*(X), e_3 \rangle = 0, x_3 = 0$ bulunur. Bu doğrultuda $S_c = I_2$ olduğundan

$$S_c(f_*(X)) = f_*(X)$$

$$f_*(X) = (x_1, x_2, 0)$$

dır.

Sonuç 2.2. Teğet vektör alanlarının f_* altında resimlerinin doğrultuları e_3 e dik olan eğrilik çizgileri f altında C^2 üzerinde de eğrilik çizgileridir.

REFERANSLAR

[1] H.H. Hacısalihoğlu,Yüksek Diferensiyel Geometriye giriş, Fırat üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat-No:2, 1980.

[2] N. J. Hicks, Notes On Differential Geometry, Van. Nostrand ReinholdCompany, London, 1-49,1974.

[3] H. H. Hacısalıhoğlu, Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Ankara üniversitesi, Fen Fakültesi, Ankara, 183-185, 199-202, 1976.

[4] A: Goetz, Introduction to Differential Geometry, University of Notre Dame, Indiana,298-299, 1970.

[5] B. O'Neill, Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 6-11, 1966.

[6] M. özdemir, Manifold Dönüşümleri ve Eğrilik çizgileri, Doğa Bilim Dergisi, Vol: 9, No A1, 19-25, 1985.