MİLLÎ EĞİTİM ● Cilt: 53 ● Kış/2024 ● Sayı: 241, (133-164)

Öğretmen Adaylarının Rasyonel Sayılara İlişkin Zihin Haritaları: Pirie-Kieren Teorisi

ARAŞTIRMA MAKALESİ

Sare ŞENGÜL[1], Büşra KIRAL DEMİR[2]

1 Prof. Dr., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, zsengul@marmara.edu.tr, ORCID: 0000-0002-1069-9084.

2 Arş. Gör., İstanbul Aydın Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, busrakiral@aydin.edu.tr, ORCID: 0000-0001-5816-6183.

Gönderilme Tarihi: 06.07.2022 Kabul Tarihi: 17.10.2023 DOI: 10.37669/milliegitim.1141497

Atıf: "Şengül, S., ve Kıral-Demir, B. (2024). Öğretmen adaylarının rasyonel sayılara ilişkin zihin haritaları: Pirie-Kieren teorisi. *Millî Eğitim*, *53*(241), 133-164. DOI: 10.37669/milliegitim. 1141497"

Öz

Bu araştırmanın amacı, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının, rasyonel sayılar kavramına ilişkin matematiksel anlama düzeylerinin Pirie-Kieren teorisine göre incelenmesidir. Araştırma, İstanbul ilindeki bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan üç öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Öğretmen adayları "Matematiğin Temelleri", "Ortaokul Matematik Öğretim Programları" ve "Sayıların Öğretimi" derslerini almış, akademik başarıları yüksek ve iyi düzeyde olan iletişim becerileri yüksek, gönüllü öğretmen adayları arasından seçilmiştir. Araştırma, durum çalışması desenine göre tasarlanmıştır. Veriler, araştırmacılar tarafından geliştirilmiş rasyonel sayılar kavramına ilişkin dört açık uçlu sorudan oluşan rasyonel sayılar kavram testi ve yarı-yapılandırılmış görüşmelerle toplanmıştır. Elde edilen veriler, Pirie-Kieren anlama katmanlarına göre analiz edilmiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak "görüntü oluşturma" katmanında bulundukları belirlenmiştir. Yarı-yapılandırılmış görüşme sonuçları ile beraber süreç göz önüne alındığında ise öğretmen adaylarının "görüntüye sahip olma", "özelliği fark etme" ve "soyutlama" katmanları arasında ileri geri katlamalar yaparak bilgilerini yapılandırma çabası gösterdikleri tespit edilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının Pirie-Kieren teorik modeline göre zihin haritaları oluşturularak sonuçlar tartışılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre bu alandaki araştırmacılar için öneriler geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Pirie-Kieren teorisi, kavramsal anlama, rasyonel sayılar, öğretmen adayı*

Pre-service Teachers' Mind Maps on Rational Numbers: Pirie-Kieren Theory

Abstract

The aim of this study is to examine the mathematical understanding levels of secondary school mathematics teacher candidates regarding the concept of rational numbers according to the Pirie-Kieren theory. The research was carried out with three pre-service teachers studying in the primary mathematics teaching program of a university in Istanbul. The pre-service teachers were selected from among volunteer pre-service teachers with a high and good level of academic achievement and high communication skills who took the courses "Basics of Mathematics", "Secondary School Mathematics Curriculum", and "Teaching Numbers". The research was designed according to the case study pattern. The data were collected through a rational numbers concept test consisting of four open-ended questions on the concept of rational numbers developed by the researchers and semi-structured interviews. The obtained data were analyzed according to the Pirie-Kieren comprehension layers. The study determined that pre-service teachers were mostly in the "image creation" layer. Considering the process together with the semi-structured interview results, it was determined that the pre-service teachers tried to construct their knowledge by folding back and forth between the layers of "having the image", "noticing the feature", and "abstraction". In addition, pre-service teachers' mind maps were created according to the Pirie-Kieren theoretical model, and the results were discussed. According to the results obtained, suggestions have been developed for researchers in this field.

Keywords: *Pirie-Kieren theory, conceptual understanding, rational numbers, pre-service teacher*

Giriş

Yapılan araştırmalar (Kamii ve Clark, 1995; Mack, 1995; Stafylidou ve Vosniadou, 2004; Yetim ve Alkan, 2010) öğrencilerin rasyonel sayılar kavramını kavramsal anlamda yapılandıramadığını göstermektedir. Bu araştırmaların detaylarına bakıldığında, Kamii ve Clark (1995) beşinci ve altıncı sınıf, Mack (1995) üçüncü ve dördüncü sınıf, Stafylidou ve Vosniadou (2004) 10-16 yaş arasındaki öğrencilerin kesirlere ilişkin; Yetim ve Alkan (2010) ortaokul yedinci sınıf (13 yaş) öğrencilerinin rasyonel sayılara ilişkin kavramsal anlama zorluklarının olduğunu belirlemişlerdir. Bu durumun birçok nedeni olabilir. Trance (2017) öğrenci performanslarının esas olarak öğrencinin okulda öğrendiklerine bağlı olduğunu, dolayısıyla her durumda öğretmenlerin, öğrencilerin öğrenmelerinin birincil kaynağı olduğunu açıklamaktadır. Bu bağlamda öğrencilerin temel kavramları istenilen nitelikte yapılandıramamalarında öğretmenlerin, bu konudaki kavramsal anlamalarının sınırlı olması ya da istenilen düzeyde olmaması bir neden olarak gösterilebilir. Buna yönelik olarak Alajmi ve Reys (2007); Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johansson ve Yang (1999) ülkelerdeki çocukların ve öğretmenlerin aynı sorunları paylaştıklarını belirtmektedirler. Bu düşünce çeşitli matematik konularına ilişkin öğrencilerin (Coe ve Ruthven, 1994; Healy ve Hoyles, 2000; Wearne ve Hiebert, 1988), öğretmenlerin (Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989) ve geleceğin öğretmeni olacak öğretmen adaylarının (López-Martín, Aguayo-Arriagada ve García López, 2022; Newton, 2008; Vula ve Kingji-Kastrati, 2018) kavramsal anlamalarını ortaya koyan çalışma sonuçlarının birbiriyle paralellik göstermesi ile gerekçelendirilebilir. Kavramsal anlama; matematiksel kavramlar, işlemler ve ilişkilerin anlaşılmasıdır (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001). Star ve Stylianides (2013) kavramsal anlamanın ilkeler ve tanımlar dahil olmak üzere kavramların bilgisine atıfta bulunduğunu ifade etmektedirler. Kavramsal bilgiyi derin seviyedeki bilgi ile ilişkilendiren Glaser (1991) derin seviyedeki bilginin anlama, esneklik, değerlendirme ve eleştirel muhakeme ile bağlantılı olduğunu vurgulamaktadır. Bu bağlamda kavramsal anlamanın, öğrenen tarafından yapılan akıl yürütmelerle yeni bilgiyi eski bilgiyle ilişkilendirip anlamlı hale getiren, etkili öğrenme ortamı sağlayan bir yapısının olduğunu söyleyebiliriz. Schoenfeld (2013) ister pür ister uygulamalı olsun matematik yapmanın temelde anlamlandırma ile ilgili olduğunu ifade etmektedir.

Matematik öğretme ve öğrenmenin etkililiği; öğretmenlerin matematiksel içerik bilgisini kullanma ile öğrencileri matematiksel görevlere katabilme işleviyle ilişkilidir. Dolayısıyla öğrenme ve öğretme sürecindeki etkililik; matematiksel içerik, öğretmen ve öğrenciler şeklindeki üç unsurun karşılıklı etkileşimine bağlıdır (Kilpatrick vd., 2001). Bu kapsamda öğretmenin sahip olacağı kavramsal anlamanın öğrencilerine açıklayacağı içeriği, dolayısıyla öğrencilerin kavramsal anlamalarını etkileyeceği yorumu yapılabilir. O halde öğretmen adaylarının matematiğin önemli kavramlarından biri olan rasyonel sayılara yönelik kavramsal anlama düzeylerinin ortaya konmasının, ileriki yıllarda zengin öğrenme ortamlarında işlevsel öğretim süreçlerinin temellendirilmesinin önemli bir göstergesi olacağı söylenebilir.

Rasyonel Sayılar Kavramının Anlamı

Matematik öğretim programı incelendiğinde, ortaokul müfredatında konuların birbiriyle bağlantılı bir yapıda ilerlediği görülmektedir. Örneğin kesirler ve kesirlerle işlemler konuları ilk kez beşinci sınıf müfredatında yer alırken rasyonel sayılar ve rasyonel sayılarla işlemler konuları ilk kez yedinci sınıf müfredatında yer almaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018). Ellerbruch ve Payne (1978) de öğrencilere rasyonel sayılar kavramı öğretilmeden önce kesir kavramının sağlam temelli bir şekilde öğretilmesinin önemini vurgulamaktadırlar. Bu bağlamda kesirler konusunun, rasyonel sayılar konusunu öğrenmek için bir ön koşul olduğunu söyleyebiliriz. Bu doğrultuda kesir ve rasyonel sayılar kavramlarının ilişkisini anlamak amacıyla öncelikle bu kavramların tanımlarını incelemek gerekebilir. Kesir, pay ve paydadan meydana gelen herhangi bir cebirsel veya nümerik gösterim olarak tanımlamaktadır (Niven, 1961). Rasyonel sayı ise a/b ifadesinde, a ve b aralarında asal olan iki tam sayı ve b sıfır değilse a ve b tam sayılarının oranı olarak ifade edilmektedir (Çelik, 2006). Buna yönelik olarak Lamon (2007) her bir kesire yalnızca bir rasyonel sayı karşılık geleceğini vurgulayarak rasyonel sayıların aralarında asal olma ilişkisine dikkat çekmektedir. Benzer şekilde Çelik (2006) a/b şeklinde yazılabilen bir ifadenin rasyonel sayı olduğunun ispatında aralarında asal olma ilişkisinin göz önüne alındığını belirtmektedir. Bu açıklamalardan yola çıkarak kesirler, rasyonel sayıları öğrenmek için bir ön koşul olmasına rağmen her iki kavramın farklı anlamları olduğu görülmektedir. Lamon (2007) bu anlamları: (i) *Parça-Bütün*: a/b ifadesi b parçaya ayrılmış bir bütünün a parçasını ifade etme, (ii) *Bölüm:* a/b ifadesi a sayısının b sayısına bölünmesini belirtme, (iii) *Oran:* a/b ifadesi a niceliğinin b niceliği ile karşılaştırılmasını bildirme, (iv) *Ölçme:* a/b ifadesi bir ölçme işleminin sonucunu gösterme, (v) *İşlemci:* a/b ifadesini a.(1/b) çarpma işlemini gösterme şeklinde ifade etmektedir. Behr, Lesh, Post ve Silver (1983) da rasyonel sayıların farklı (parça-bütün, bölüm, oran, ölçme ve işlemci) anlamlarını vurgulamaktadırlar.

Araştırmacıların açıklamaları göz önüne alındığında, rasyonel sayıların birçok anlamı olduğu görülmektedir. Bunlardan birisi de parça-bütün ilişkisi anlamında kullanılan kesir kavramıdır. Kieren (1976) rasyonel sayıların kavramsal anlaşılması ve her bir farklı anlamının bağımsız olarak anlamlı yapılandırılmasıyla birlikte bu anlamların birbirleriyle ilişkilendirilmesinin de önemli olduğunu ileri sürmektedir. Öğrenciler, kesir kavramını günlük hayattaki deneyimlerinden bildikleri halde, matematik dersinde, kesirlerin teknik bir tanımının öğrenilmesi gerektiğinde endişelenirler. Kesir kavramının konuşma dilindeki kullanımı yeterince karmaşıktır ancak matematik eğitiminde çoklu kullanımı da sorunludur. Birçok kişi, kesir ve rasyonel sayı ifadelerini birbirinin yerine kullanarak konuyu daha da karıştırır (Lamon, 2020). Bu durumun olası nedenlerinden birini Mack (1995) matematik derslerinde rasyonel sayıların öğretiminde, parça-bütün anlamının fazlaca vurgulanıp diğer anlamlarına yeterince yer verilmemesi olarak ifade etmektedir. Dolayısıyla matematik eğitiminde rasyonel sayıların her bir anlamının üzerinde durulmasının önemli olduğu söylenebilir. Bu duruma yönelik olarak Kieren (1981) de rasyonel sayıların dört matematiksel alt yapısı olan ölçme, bölüm, oran ve işlemcinin her birinin nicel ve ilişkisel rasyonel sayı deneyimi sağlayacağını belirtmektedir.

Yukarıda belirtildiği üzere rasyonel sayı kavramının farklı anlamlarının öğrencilere kazandırılması kavramsal öğretilmesi için önemlidir. Rasyonel sayılar genellikle "*a ve b birer tam sayı, b≠0 olmak üzere a/b şeklinde yazılabilen sayılara "rasyonel sayılar" denir."* şeklinde tanımlandığından kesir kavramı ile rasyonel sayı kavramının ayırt edileceği bir durum oluşmamaktadır. Fakat rasyonel sayıların ve kesirlerin ayrımına ilişkin Lamon (2020) her kesir için birbirine denk sonsuz çoklukta kesir yazılabilirken her kesirin yalnızca bir rasyonel sayı karşılığı olduğunu bildirmektedir. Böylece a ve b tam sayı ve b≠0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ ifadesi bir rasyonel sayı ise a ve b'nin aralarında asal olma ilişkisine vurgu yapmaktadır. Ayrıca Niven (1961) de aralarında asal olmaması durumunda, a ve b'nin tam sayı olmasa bile $\frac{a}{b}$ ifadesinin bir rasyonel sayı olabileceğini ifade etmektedir. Örneğin $\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$ gibi. Buradan hareketle, rasyonel sayı kavramını tanımlarken a ve b'nin aralarında asal olma ilişkisi göz önüne alınmadığı takdirde a ve b'nin tam sayı olması, rasyonel sayı olmasını garantilememektir. Öğrencilerin rasyonel sayı ve kesir kavramlarını birbirinden ayırabilmeleri için öğrenme sürecinde iki kavramın ayrım ve ilişkilendirilmesinin açık bir şekilde ortaya konması önem arz etmektedir. Bu duruma ilişkin Lamon (2020) ilkokul ve ortaokul matematik müfredatının, rasyonel sayı kavramını genel bir şekilde ele aldığını ifade etmektedir. Bunun da öğrencilerin rasyonel sayıları kavramsallaştıramaması ve rasyonel sayılara ilişkin matematiksel anlamalarının işlemsel düzeyde kalmasına sebep olduğu düşünülmektedir.

Behr vd. (1983) müfredattaki rasyonel sayılara yapılan kurala dayalı yapı vurgusunun, öğrencilerin işlevsel anlayışlarını dikkatli bir şekilde geliştirememesine dolayısıyla da düşük performansa sebep olabileceğini bildirmekte ve eklemektedirler: Rasyonel sayı kavramı, çocukların ortaokul yıllarında karşılaştıkları en karmaşık ve önemli matematiksel fikirler arasındadır. Rasyonel sayıların önemi çeşitli perspektiflerden görülebilir:

a) Pratik açıdan; bu kavramlarla etkili bir şekilde başa çıkma yeteneği, kişinin gerçek yaşamdaki durumları ve sorunları anlayarak değerlendirme yeteneğini büyük ölçüde geliştirir,

b) Psikolojik açıdan; rasyonel sayılar, çocukların entelektüel gelişimi için gerekli zihinsel yapıları geliştirebilecekleri ve genişletebilecekleri zengin bir alan sağlar,

c) Matematiksel açıdan; rasyonel sayı anlayışları, daha sonra temel cebirsel işlemlerin dayandırılabileceği temeli sağlar (Behr vd., 1983).

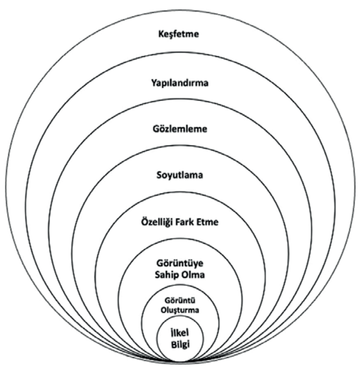
Farklı bağlamlardan bakıldığında, öğrencilerde rasyonel sayıların güçlü kavramsal yapılarının oluşturulmasının önemli olduğu açıktır. Ayrıca Kieren (1981) de öğrenme ortamlarında matematiksel kavramların, matematiksel, görsel, gelişimsel, yapıcı ve sembolik doğasına değinilmesinin öğrenenler açısından önemini belirtmektedir. Bu bağlamda cebir gibi başka konuların öğrenilmesinde temel bir konu olan rasyonel sayıların (Behr vd., 1983) anlamlı öğrenilmesi için de bu konuyu anlatacak olan matematik öğretmeninin konuya ilişkin kavramsal anlama düzeyinin yüksek olması gerektiği söylenebilir. Bu nedenle Pouta, Lehtinen ve Palonen (2021) tarafından öğrencilerin rasyonel sayıları öğrenmesini geliştirmek için öğretmenlerin mesleki becerilerine ve eğitimine daha fazla odaklanılması gerektiği vurgulanmaktadır. Dolayısıyla öğretmen eğitimi de önem taşımaktadır. Öğretmen adaylarının ileride öğretmen olduklarında, rasyonel sayılar konusunu öğrencilerine anlamlı öğretebilmeleri için kendilerinin de bu konuyu anlamlı bir şekilde yapılandırmış olmaları gerektiği ortaya çıkmaktadır.

Pirie-Kieren Teorisi

Matematiksel kavramların anlama düzeylerinin belirlenmesinde, Pirie ve Kieren'in matematiksel anlamanın gelişimi teorisi dikkat çekmektedir. Bu teori matematiksel anlamanın gelişimini, Şekil 1'de sunulduğu üzere birbirini içeren sekiz katmandan oluşan lineer olmayan bir süreç şeklinde ifade etmektedir (Pirie ve Kieren, 1991). Bu teoride anlamanın gelişimi, tek yönlü bir süreç olmayıp katmanlar arası ileri-geri katlamalarla yapılandırılmaktadır. Bunu görsel olarak iletmek amacıyla, model iç içe daireler veya katmanlar dizisi olarak sunulmuş, böylece her katmanın önceki tüm katmanları içerdiği ve sonraki tüm katmanlara gömülü olduğu ifade edilmiştir. Büyümenin, katmanlar arasında ileri-geri hareketle temsil edildiği ve bu nedenle anlamanın dinamik ve organize bir süreç olarak nitelendirildiği belirtilmiştir. Burada teorinin görsel şemasındaki her bir halka "katmanlar" olarak ifade edilmiş, her bir katmanın da kendi içerisinde farklı bir anlama düzeyini temsil ettiği bildirilmiştir (Pirie ve Kieren, 1994). Bu katmanlı model aşağıda Şekil 1'de yer almaktadır.

Şekil 1

Pirie ve Kieren'in Matematiksel Anlama Modeli (Pirie ve Kieren, 1994'ten Uyarlanmıştır.)



Şekil 1 incelendiğinde, modelin *ilkel bilgi, görüntü oluşturma, görüntüye sahip olma, özelliği fark etme, soyutlama, gözlemleme, yapılandırma* ve *keşfetme* şeklinde sekiz katmanlı olduğu görülmektedir. Pirie ve Kieren (1994) bu katmanları şu şekilde açıklamaktadır:

İlkel Bilgi; anlamaya başlama süreci, ilkel bilme katmanında başlar. Buradaki ilkel, düşük seviyeli matematik anlamına gelmez; daha ziyade herhangi bir belirli matematiksel anlamanın gelişmesi için başlangıç noktasını oluşturur (Pirie ve Kieren, 1994, s.170). *Görüntü Oluşturma* katmanında; öğrenciden var olan bilgileri arasında ayrım yaparak onu yeni durumlarda kullanması beklenir (Pirie ve Kieren, 1994, s.170). *Görüntüye Sahip Olma* katmanındaki öğrenci; bir konu hakkında zihinsel bir yapıyı, onu ortaya çıkaran belirli faaliyetleri yapmak zorunda kalmadan kullanabilir (Pirie ve Kieren, 1994, s.170). *Özelliği Fark Etme* katmanındaki öğrenci; bağlama özgü, ilgili özellikler oluşturmak için sahip olduğu görüntülerin yönlerini değiştirebilir veya birleştirebilir (Pirie ve Kieren, 1994, s.170). *Soyutlama* katmanındaki öğrenci; fark ettiği özellikleri nasıl karakterize ettiğine bağlı olarak sahip olduğu görüntüleri bir yöntem olarak soyutlar (Pirie ve Kieren, 1994, s.170-171). *Gözlemleme;* soyutlama yapan bir öğrenci, aynı zamanda bu tür biçimsel faaliyetler üzerinde düşünür ve koordine eder. Ayrıca bu tür koordinasyonları teoremler gibi ifade eder (Pirie ve Kieren, 1994, s.171). *Yapılandırma* katmanındaki öğrenci; gözlemlerini bir teori olarak düşünmeye çalıştığında meydana gelir. Bu katmandaki birey, bir teoremler dizisinin birbiriyle nasıl ilişkili olduğunun farkındadır ve mantıksal veya meta-matematiksel argüman yoluyla ifadelerin gerekçelendirilmesi veya doğrulanması için çabası gösterir (Pirie ve Kieren, 1994, s.171). *Keşfetme* katmanındaki bir öğrenci; tam yapılandırılmış bir anlama düzeyine sahiptir. Dolayısıyla bu anlamayı getiren izlenimlerinin ötesinde tamamen yeni bir kavrama dönüşebilecek yeni sorular yaratabilir (Pirie ve Kieren, 1994, s.171).

Alan yazın incelendiğinde, Pirie ve Kieren'in matematiksel anlama modeline göre birçok çalışmanın yapıldığı görülmüştür. Örneğin yapılan çalışmalara bakıldığında, Borgen ve Manu (2002) Pirie ve Kieren'in dinamik modelini kullanarak bir öğrencinin cebirsel formalizasyonlarını incelemiş ve bir öğrencinin cebirsel formalizasyonların çeşitli bileşenleri arasındaki ilişkilerin farkında olmadan doğru çözümler elde edebileceğini belirlemişlerdir. Düzenli-Gökalp ve Sharma (2010) öğrencilerin kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerine ilişkin kavramsal ve işlemsel anlayışlarını anlamak amacıyla yaptıkları çalışmada, Pirie ve Kieren'in teorik modelini kullanmışlardır. Sonuçta öğrencilerin sembolik açıklama gerektiren sorularda sözlü açıklama gerektirenlere göre daha başarılı olduklarını ve yapılandırma ile keşfetme katmanlarındaki sorularda zorlandıklarını saptamışlardır. Düzenli-Gökalp ve Bulut (2018) Pirie ve Kieren'in teorik modelinin haritalama özelliğini çoklu temsil kullanımı ışığında geliştirmek, üretilen haritaların tasvir gücünü artırmak amacıyla yaptıkları çalışmada, altıncı sınıf öğrencilerinin zihin haritalarını belirlemişlerdir. Çalışma sonucunda ise öğrencilerin soruları anlamadan da çözebildiklerini, farklı temsil türlerini kullanma tercihleri ile kesirlerde çarpma işlemini anlama düzeyleri arasında bir ilişki olduğunu bulgulamışlardır. Gülkılık, Uğurlu ve Yürük (2015) Pirie ve Kieren'in teorik modelini kullanarak 10. sınıf öğrencilerinin çoklu temsillerle zenginleştirilmiş bir ortamda geliştirilen geometrik dönüşümlere ilişkin matematiksel anlayışlarını analiz etmişlerdir. Sonuçta öğrencilerin matematiksel anlama düzeyleri informalden formale doğru gelişse de, bu gelişimin tek yönlü olmayıp öğrencilerin informal anlayışları kullanma eğiliminde olduklarını tespit etmişlerdir. Hakim ve Murtafiah (2022) matematik lisans programı öğrencilerinin matematiksel ispat problemlerini çözmeye ilişkin anlama düzeylerini betimlemeyi amaçladıkları araştırmalarında, öğrencilerin anlama düzeylerinin ilkel bilgi, görüntüye sahip olma, özelliği fark etme, soyutlama, gözlemleme ve yapılandırma katmanlarında olduğunu belirlemişlerdir. Lawan (2011) 13 yaşındaki iki öğrencinin Pirie-Kieren teorik modelinin katmanları üzerinde rasyonel sayıların parça-bütün alt yapısını anlamalarının gelişimini incelemiş ve anlamalarının gelişimi için geriye katlamanın önemli bir faktör olduğu sonucuna varmıştır. Martinie (2007) yedinci sınıf öğrencilerinin rasyonel sayılar konusuna yönelik anlama düzeylerini Pirie-Kieren teorik modeline göre belirlemiştir. Araştırma sonucunda ise öğrencilerin bu konuya ilişkin kavram yanılgıları ve/veya eksiklikleri olduğunu elde etmiştir. Nopa, Suryadi ve Hasanah (2019) dokuzuncu sınıf öğrencilerinin Pirie-Kieren teorik modeline dayalı problem çözmedeki matematiksel anlamalarını tespit etmişlerdir. Sonuçlar katılımcıların görüntüye sahip olma katmanında çalışmaya başladıklarını ve soyutlama katmanına geçtiklerini fakat ilkel bilgi ve görüntü oluşturma katmanında eksik olduklarını göstermiştir. Peñaloza ve Vásquez (2022) altıncı sınıfta öğrenim görmekte olan öğrencilerin Pirie-Kieren teorik modeline dayalı olarak orantı ile ilgili anlama süreçlerini analiz etmeyi amaçladıkları araştırmalarında, öğrencilerin görevleri çözerken matematiksel stratejileri doğru şekilde uygulamada zorluklar yaşadıklarını ve oran kavramına ilişkin anlamalarını soyutlamayı başaramadıklarını gözlemlemişlerdir. Syafiqoh, Amin ve Siswono (2018) 11. sınıf öğrencilerinin Pirie-Kieren teorik modeline dayalı olarak üstel kavram anlayışlarını analiz etmişlerdir. Sonucunda ise ilkel bilgi katmanı için temel bilgilere sahip olduklarını, üstel tanımı kendi ifadeleriyle açıklayabildiklerini; görüntü oluşturma ve görüntüye sahibi olma katmanları için problem çözmede farklı stratejiler geliştirerek uygulayabildiklerini, özelliği fark etme katmanı için çarpma ve bölme işlemlerinde üstel özellikleri belirleyerek ayırt etme yeterliğine sahip olduklarını, soyutlama katmanı için bu özellikleri matematik sembolüyle ifade edebildiklerini, fakat üstel özellikleri kanıtlamak için cebirsel yeteneklerinin olmadığını ve gözlemleme katmanına ulaşamadıklarını belirlemişlerdir. Şengül ve Argat (2015) akademik başarıları düşük yedinci sınıf öğrencilerinin faktöriyel kavramlarını anlama süreçlerini Pirie-Kieren teorik modeli ile incelemişlerdir. Araştırma sonucunda akademik başarısı düşük olan öğrencilerin verilen etkinlikleri yorumlayarak kavram oluşturmada güçlük yaşadıklarını ve soyutlama katmanına ulaşabildiklerini tespit etmişlerdir. Şengül ve Göktepe Yıldız (2016) ortaokul matematik öğretmeni adaylarının çok değişkenli fonksiyonlar alanına ilişkin anlayışlarını incelemek için Pirie-Kieren teorik modelini kullanmışlardır. Yaptıkları çalışmanın sonucunda ise öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak özelliği fark etme katmanında olduklarını saptamışlardır. Şengül, Kaba ve Argat (2016) akademik başarıları yüksek ortaokul yedinci sınıf öğrencilerinin faktöriyel kavramını anlama süreçlerini, Pirie-Kieren teorik modeli ile değerlendirmişlerdir. Sonuçta öğrencilerin etkinlikleri yorumlayarak kavramları kolaylıkla yapılandırabildiklerini ve soyutlama katmanına ulaşabildiklerini elde etmişlerdir. Valcarce, Martín, Astudillo ve Pérez (2013) bir grup öğrencinin harmonik serilerle çalışmayı içeren bir kulenin yükseklik ve hacim hesabı ile ilgili etkinliğini Pirie-Kieren teorik modeli ışığında çözme sürecini yansıtan aşamaları analiz etmişlerdir. Araştırma kapsamında öğrencilerin problemin matematiksel bir fikrini oluşturmak için farklı stratejiler denediklerini (ilkel bilgi), problemi çözmek için belirli eylemlere ihtiyaçlarının olmadığını (görüntü oluşturma), çalıştıkları matematiksel nesnelerin belirli özelliklere sahip olduğunu fark ettiklerini (özelliği fark etme) ve problemi çözmek için bazı teorik bilgilere başvurduklarını (soyutlama) gözlemlemişlerdir. Warner (2008) öğrenci davranışları ile matematiksel fikirlerin gelişimi arasındaki ilişkiyi Pirie-Kieren teorik modelini kullanarak araştırmıştır. Sonucunda ise anlama geliştikçe öğrencilerin birbirlerini sorgulama, açıklama yapma, kendilerinin ve başkalarının fikirlerini kullanma gibi davranışlardan varsayımsal durumlar kurma, temsilleri ve bağlamları ilişkilendirme gibi davranışlara doğru geçtiklerini saptamışladır. Yao (2020) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının The Geometer's Sketchpad kullanımı ile geometrik dönüşümlerin kompozisyonları hakkında geometrik bilginin gelişimi arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlayan çalışmasında Pirie-Kieren anlama katmanlarını kullanmış ve bu amaç için Pirie-Kieren teorik modelinin, öğretmen adaylarının anlayışlarını mikro düzeyde belirlemede yararlı bir araç sağladığını vurgulamıştır.

Alan yazına bakıldığında, rasyonel sayılar konusuna ilişkin Pirie-Kieren teorik modeline göre matematiksel anlama düzeyinin belirlendiği az sayıda çalışmanın (Lawan, 2011; Martinie, 2007) olduğu görülmektedir. Ayrıca bu çalışmalar da dâhil olmak üzere alan yazındaki çalışmaların çoğunluğu ilköğretim ve ortaöğretim öğrencileri ile yürütülmüştür. Yapılan bu çalışmada, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının, rasyonel sayılar kavramına ilişkin matematiksel anlama düzeylerinin Pirie-Kieren teorik modeline göre belirlenmesi ve bu kavrama yönelik zihin haritalarının oluşturulması amaçlanmıştır. Rasyonel sayıların çoklu temsiller ile ilişkilendirilerek yapılandırılabilmesi, ortaokul (11-14 yaş) düzeyinde gerçekleştirildiği için bu düzeyde öğretmenlik yapacak öğretmen adaylarının rasyonel sayılara ilişkin kavramsal yapılarının ortaya konulması önem arz etmektedir. Bu kavramsal yapıların ortaya konulmasında ise Yao'nun (2020) öğretmen adaylarıyla yaptığı araştırmada mikro düzeyde yarar sağladığı vurgusu üzerine Pirie-Kieren teorik modeli kullanılmıştır. Çalışmanın amacı doğrultusunda, problem durumu "Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının rasyonel sayılar kavramına ilişkin matematiksel anlama düzeyleri nasıldır?" şeklinde belirlenmiştir.

Yöntem

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışması, "nasıl" veya "neden" soruları sorulduğunda, araştırmacının olaylar üzerinde çok az kontrolü olduğunda ve odak, gerçek yaşam bağlamındaki bir olayda güncel bir fenomen üzerinde olduğunda tercih edilen bir yöntemdir (Yin, 2009). Durum çalışmasının türlerinden biri olan çoklu durum çalışmasında, birbirinden bağımsız durumlar yer alır (Yin, 2009). Bu çalışmada, üç ortaokul matematik öğretmeni adayının rasyonel sayılar kavramını anlama süreçleri Pirie-Kieren teorik modeline göre derinlemesine incelendiğinden çoklu durum çalışması tercih edilmiştir.

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemine göre belirlenmiştir. Bu kapsamda araştırma, İstanbul ilindeki bir üniversitede İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında üçüncü sınıfta öğrenim görmekte olan gönüllü ve iletişim becerileri yüksek üç öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Bu öğretmen adaylarının çalışma grubunu oluşturmalarında, rasyonel sayılar kavramına tam anlamıyla hâkim olmaları (Sayıların Öğretimi dersi kapsamında) bu kavramın nasıl tanımlanacağı (Matematiğin Temelleri dersi kapsamında) ile ortaokul müfredatındaki yerini bilmeleri (Ortaokul Matematik Öğretim Programları dersi kapsamında) dolayısıyla temel matematik kavramlarının nasıl yapılandırıldığına ilişkin alt yapılarını oluşturacak olan "Matematiğin Temelleri", "Ortaokul Matematik Öğretim Programları" ve "Sayıların Öğretimi" derslerini başarılı olarak geçmiş olmaları dikkate alınan kriterdir. Çalışma grubunun akademik başarılarına ilişkin bilgiler aşağıda Tablo 1'de katılımcı isimleri değiştirilerek sunulmuştur.

Tablo 1

Çalışma Grubunun Akademik Başarılarına İlişkin Bilgiler

Öğretmen Adayı	Matematiğin Temelleri	Ortaokul Matematik Öğretim Programları	Sayıların Öğretimi	Genel Akademik Not Ortalaması (GANO)
Cemre	90-100/100	90-100/100	85-89/100	3.20/4.00
Berk	70-74/100	80-84/100	75-79/100	2.84/4.00
Emel	90-100/100	85-89/100	75-79/100	3.28/4.00

Tablo 1'e bakıldığında, seçilen öğretmen adaylarının matematik başarı düzeyleri birbirinden farklı olsa bile Cemre ve Emel'in yüksek, Berk'in ise iyi düzeyde olduğu söylenebilir. İkisinin yüksek, birinin iyi olması durumları ise rastlantısaldır. Araştırmada öğretmen adaylarının matematiksel anlama düzeylerini, cinsiyete göre karşılaştırma amacı bulunmadığından kız ve erkek öğretmen adaylarının eşit sayıda alınmaması önemsenmemiştir.

Etik Kurul İzni

Araştırmanın yapılabilmesi için Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünden 21.04.2022 tarihli 04-17 sayılı etik kurul onayı alınmıştır.

Veri Toplama Araçları ve Süreç

Yapılan araştırmada veri toplama aracı olarak araştırmacılar tarafından hazırlanan rasyonel sayılar kavramına ilişkin açık uçlu soruların yer aldığı Rasyonel Sayılar Kavram Testi (RSKT) kullanılmıştır. RSKT'nin oluşturulmasında alan yazında (Behr vd., 1983; Lamon, 2020) da bahsedilen rasyonel sayılar kavramının öğrenilmesinde temel teşkil eden kesirler ile rasyonel sayılar kavramlarında yaşanan zorluklar göz önünde bulundurulmuştur. Buna yönelik olarak başlangıçta kesirlerin sonrasında rasyonel sayıların kesirlerle bağlantısının ele alınmasına karar verilmiştir. Daha sonra Pirie-Kieren teorisindeki katmanlara göre ilkel bilgiden keşfetme katmanına kadarki sürecin gözlemlenebileceği sorular hazırlanmıştır. Testte dört açık uçlu soru bulunmaktadır (Ek 1). Tüm soruların katılımcılar tarafından ayrıntılı olarak cevaplanması istendiğinden soru sayısının yeterli olduğuna karar verilmiştir. Ayrıca uygulanan test sonrasında öğretmen adaylarıyla yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır (Ek 2). Çalışmanın tamamı Covid-19 pandemi döneminden dolayı çevrimiçi ortamda video kayıt alınarak toplanmıştır. Öğrencilerin soruları çözdükleri kâğıtları ekrana yansıtmaları istenmiş ve uygulamanın bitiminde veriler üzerinde değişiklik yapma ihtimalleri düşünülerek video kayıt devam ettiği sırada (görüntü ve ses açık halde) cevap kâğıtlarını araştırmacıya iletmeleri sağlanmıştır. Veri toplama sürecinde öğretmen adaylarının RSKT'yi cevaplama süreleri yaklaşık 40 dakika, yarı-yapılandırılmış görüşme süreleri ise yaklaşık 20 dakika olmuştur. Verilerin analizi için veriler yazılı doküman haline getirilmiştir. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının zihin haritalarını oluşturmak için Pirie-Kieren katmanlarındaki çalışma eylemlerini dikkate almışlardır.

Verilerin Analizi

Yapılan araştırmada "Rasyonel Sayılar Kavramına İlişkin Pirie-Kieren Teorik Modelinin Aşamaları" oluşturulurken Pirie ve Kieren'in (1994) kesirlere ilişkin araştırmalarında on iki yaşındaki öğrencilerin çalışmalarıyla oluşturdukları örnek model ve Niven'in (1961) tanımları dikkate alınmıştır. Bu kapsamda üç öğretmen adayının RSKT'ye verdikleri cevaplar, iki uzman tarafından değerlendirilerek Tablo 2'deki anlama katmanları davranış göstergeleri oluşturulmuştur. Çalışmada EK-2'de yer verilen yarı-yapılandırılmış görüşmedeki diyaloglar parantez içinde belirtilmiştir. Örneğin; (*18*).

Tablo 2

Rasyonel Sayılar Kavramına İlişkin Pirie-Kieren Teorik Modelinin Aşamaları

Anlama Katmanı	Anlama Katmanlarına Ait Davranışsal Göstergeler
İlkel Bilgi	• Kesir ve rasyonel sayı kavramlarının anlamını bilme/tanımlayabilme. • Matematiksel dili kullanarak kesir/rasyonel sayı kavramını ifade edebilme.
Görüntü Oluşturma	• Kesir/rasyonel sayı kavramlarını örneklerle açıklayabilme.
Görüntüye Sahip Olma	• Kesirin bir gösterim/bağıl ilişki olduğunun farkında olma. • Rasyonel sayıların, kesirlerin bir denklik sınıfı olduğunu bilme. • Kesir/rasyonel sayı kavramlarını modelleyebilme.
Özelliği Fark Etme	• Kesir ve rasyonel sayı kavramları arasındaki farkları bilme. • Kesir/rasyonel sayı kavramının özelliklerini bilme.
Soyutlama	• Kesir/rasyonel sayı kavramının özelliklerini matematiksel dil ve sembollerini kullanarak açıklayabilme. • Gerektiğinde kesir/rasyonel sayı kavramını öğrenci seviyesine göre modelleyebilme.
Gözlemleme	• Kesir ve rasyonel sayıların birbirleriyle olan bağlantısı yansıtabilme.
Yapılandırma	• Önceki deneyimlerini matematiksel bir teori şeklinde ifade edebilme ve ispatlama.
Keşfetme	• Rasyonel sayıların sayılar kümesi içerisindeki yerini belirleyerek diğer sayı sistemlerinin gerekliliğini açıklayabilme.

Bu aşamada, üç öğretmen adayı için Cemre, Berk ve Emel şeklinde kodlama isimler verilmiştir. Veriler analiz edilirken araştırmacılar ve matematik eğitimi alanında bir uzman, öğretmen adaylarının Tablo 2'deki Rasyonel Sayılar Kavramına İlişkin Pirie-Kieren Teorik Modelinin Aşamalarına göre yanıtlarının hangi katmanda olduğunu ayrı ayrı belirlemiştir. Sonrasında elde edilen sonuçlarla güvenirlik, Miles ve Huberman (1994) tarafından açıklanan (Güvenirlik=ortak görüş/ortak görüş+farklı görüşx100) uyum yüzdesi ile saptanmıştır. Sonuç olarak, araştırmacılar ve uzman arasındaki uzlaşma oranı %92 şeklinde belirlenmiştir. Uzman ve araştırmacıların uyuşamadığı noktalar ise birlikte yeniden değerlendirilerek ortak bir karara varılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının cevaplarına ilişkin bulgular bölümünde doğrudan alıntılar sunulmuştur. Yarı-yapılandırılmış görüşme sorularından elde edilen veriler ise öğretmen adaylarının rasyonel sayılar kavramına ilişkin zihin haritalarını oluşturmak amacıyla RSKT'ye verdikleri cevapları desteklemek ve sonuçları tartışmak amacıyla kullanılmıştır.

Bulgular

Bu kısımda öğretmen adaylarının RSKT'ye verdikleri cevaplar, doğrudan alıntı yoluyla araştırmanın problemi doğrultusunda dört alt başlık altında ele alınmış ve elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

1. Birinci Soru Bağlamında Elde Edilen Bulgular

Öğretmen adaylarının rasyonel sayılar kavram testinin birinci sorusuna ilişkin açıklamaları aşağıda Tablo 3'te yer almaktadır.

Tablo 3

Öğretmen Adaylarının Kesir ve Rasyonel Sayı Tanımları, Tanımlarına Uygun Örnekleri ve Aralarındaki Farka İlişkin Açıklamaları

Soru 1. *Kesir nedir? Rasyonel Sayı nedir? Tanımlayınız. Tanımlarınıza uygun örnek veriniz. Aralarında fark var mıdır? Varsa nelerdir açıklayınız.*	
Öğretmen Adayı	**Yanıtı**
Cemre	Rasyonel sayı; a, b ∈ $\mathbb{Z}$ ve b≠0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardır. Örneğin; $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$ Kesir; kesir de aynı zamanda bir rasyonel sayıdır fakat birçok anlam içerir. Kesirin parça-bütün, bölme, ölçme gibi birçok anlamı vardır. Bir bütünden ne kadar parçanın alındığını ifade eder. Örneğin; 8 dilime ayrılmış pizzanın 3 diliminin alınması $\frac{3}{8}$.
Berk	Kesir; bir sayının $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılması $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ gibi. ($\frac{1}{5}$ ifadesini "bir bölü beş" diye okuyor). Kesir günlük hayatta da karşımıza çıkmaktadır. Çeyrek ekmek, yarım kilo elma gibi. Rasyonel sayı; iki tam sayının birbirine oranı $\frac{2}{7}$ gibi. Aralarındaki farkı; kesirler rasyonel olarak değil de yüzdelik olarak da yazılabilir ama rasyonel sayılar iki tam sayının birbirine oranıdır.
Emel	Kesir, iki sayı arasındaki bağıl ilişkidir. Kesirin birden çok anlamı mevcuttur. Parça-bütün, oran, bölme gibi. Örneğin "$\frac{3}{6}$" bir kesirdir. Rasyonel sayı ise $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardır. Ancak a ve b aralarında asal olmak zorundadır. "$\frac{1}{7}$" bir rasyonel sayıdır. Her rasyonel sayı bir kesirdir ama her kesir bir rasyonel sayı değildir. Çünkü kesirlerde aralarında asallık olmaz.

Tablo 3 incelendiğinde, Cemre'nin, rasyonel sayılar için pay ve paydanın aralarında asal olma özelliğini belirtmemesi ve kesirleri bir rasyonel sayı olarak kabul etmesi nedeniyle bu kavramları doğru yapılandıramadığı söylenebilir. Dolayısıyla Cemre, Pirie-Kieren katmanlarından ilkel bilgi katmanında olup buradaki bilgileri sorgulama sürecindedir. Ayrıca kesir kavramının çoklu temsillerini örneklerle açıklamaya çalışması, görüntü oluşturma katmanında eylem sergilemesi olarak değerlendirilmektedir.

Berk'in kesiri $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen bir sayı olarak değerlendirmesi dolayısıyla kesirin bir gösterim olduğunun farkında olması görüntüye sahip olma katmanından başladığı şeklinde yorumlanmaktadır. Ayrıca kavramları örneklerle açıklama girişimi, görüntüye sahip olma katmanından görüntü oluşturma iç katmanına geçtiğini göstermektedir. Diğer yandan rasyonel sayı kavramını [a ve b $\in \mathbb{Z}$, b≠0 ve (a, b)=1] şeklinde tanımlayamadığı ve kesir kavramı ile arasındaki farkı açıklayamadığı için ilkel bilgi katmanında eylemde bulunduğu gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra Ek 2'de yer alan Berk ile yapılan yarı-yapılandırılmış görüşme diyaloglarındaki (*9, 17*) söylemleri, özelliği fark etme katmanına geçmeye çalıştığını fakat aralarındaki ilişkiyi fark edemediğini göstermektedir.

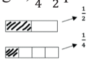
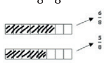
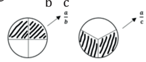
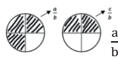
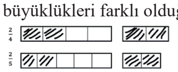
Emel, bir bağıl ilişki çıkarımıyla görüntüye sahip olma, parça-bütün ilişkisi kurarak ilkel bilgi ve sonrasında örnekler vererek görüntü oluşturma katmanına geçmiştir. Son olarak, aralarındaki farkı açıklayabildiği için özelliği fark etme katmanına ulaşmıştır.

2. İkinci Soru Bağlamında Elde Edilen Bulgular

Öğretmen adaylarının rasyonel sayılar kavram testinin ikinci sorusuna ilişkin açıklamaları aşağıda Tablo 4'te yer almaktadır.

Tablo 4

Öğretmen Adaylarının Kesirlerin Temel Özelliklerine İlişkin Açıklamaları

Soru 2. *Aşağıdaki boşlukları doldurunuz ve modelleyerek gösteriniz.* *i) Payları eşit olan basit kesirler karşılaştırıldığında, paydası en büyük olan kesir en küçüktür. Çünkü…* *ii) Paydaları eşit olan basit kesirler karşılaştırıldığında, payı en büyük olan kesir en büyüktür. Çünkü…*	
Öğretmen Adayı	**Yanıtlar**
Cemre	i) Payları eşit olan kesirlerde paydası büyük olan kesir küçüktür çünkü; fazla parçalara ayrılmış bir bütünün parçası daha küçüktür. Örneğin; $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ parçası arttıkça parça başına düşen miktar azalır.  ii) Paydaları eşit olan kesirlerde payı en büyük olan kesir büyüktür çünkü; eşit parçalara ayrılmış iki bütün olduğundan parça sayısı fazla olan büyük olur. Örneğin; $\frac{6}{8}>\frac{5}{8}$ payı büyük olan daha büyük oldu." 
Berk	i) Çünkü pay ve paydayı $\frac{a}{b}$ şeklinde yazacak olursak..iki eşitliği kıyaslayalım. a, b, c $\in \mathbb{Z}^{+}$ $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}$ verilsin b>c olduğunda $\frac{a}{b}<\frac{a}{c}$ olur. Pizzalar eşit verilsin;  ii) a, b, c $\in \mathbb{Z}^{+}$ $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ verilsin;  $\frac{a}{b}>\frac{c}{b}$ olur.
Emel	i) Payları eşit olan basit kesirler karşılaştırıldığında, paydası en büyük olan kesir en küçüktür çünkü; verilen kesirde kesir parçalarının büyüklükleri farklı. Örneğin; $\frac{2}{5}$ kesiri ile $\frac{2}{4}$ kesirini ele alalım. İkisinde de aynı sayıda parça düşer ama parçaların büyüklükleri farklı olduğu için sonuç da farklı olur.  2 parça vardır her iki durumda da ancak büyüklük eşit olmadığından (parça büyüklüğü) paydası büyük olan küçüktür. Hem parçanın daha fazla parçalandığını gösterir. Bu durum da parçaların küçülmesine sebep olur. ii) Paydaları eşit olan basit kesirler karşılaştırıldığında, payı büyük olan büyüktür çünkü; parça büyüklüğü eşittir. Yani paya düşen her bir sayı için aynıdır. Örneğin; $\frac{3}{6}$ ile $\frac{2}{6}$ kesirlerini düşünelim. Parça büyüklüğü aynı olduğu için payı büyük olan büyüktür. Şöyle de düşünülebilir. Payda eşit=parça büyüklüğü eşit=1 tane elma $\frac{3}{6}$=1 tane elma, 2 tane elma, 3 tane elma→ $\frac{3}{6}$ tane elma $\frac{2}{6}$=1 tane elma, 2 tane elma→ $\frac{2}{6}$ tane elma Birim kesirler aynıdır ($\frac{1}{6}$). Doğal sayılar gibi sayılarak payı büyük olanın daha büyük olduğu anlaşılır.

Tablo 4 incelendiğinde Cemre, "..fazla parçalara ayrılmış bir bütünün parçası daha küçüktür." açıklamasıyla özelliği fark etme katmanındadır. Fakat düşüncesini "$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ parçası arttıkça parça başına düşen miktar azalır." örneği ile açıklaması nedeniyle görüntü oluşturma katmanına geçmiştir. Sonrasında doğru şekilde modelleyerek görüntüye sahip olma katmanında çalışmıştır.

Berk, paydası büyük olan basit kesirin daha küçük olduğunu matematiksel sembollerle ifade etmesi nedeniyle soyutlama katmanından başlamıştır. Daha sonra modelleme yaparak görüntüye sahip olma katmanına ulaşmıştır.

Emel de başlangıçta Cemre gibi özelliği fark etme katmanında çalışmıştır. İlk aşamada örneğini modellemeyi tercih etmesine rağmen sonrasında düşüncesini elma örneği ile sadeleştirmiştir. Dolayısıyla görüntüye sahip olmadan görüntü oluşturma katmanına dönmüştür.

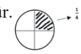
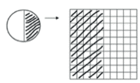
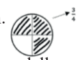
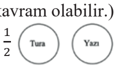
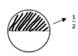
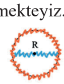
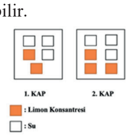
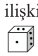
3. Üçüncü Soru Bağlamında Elde Edilen Bulgular

Öğretmen adaylarının rasyonel sayılar kavram testinin üçüncü sorusuna ilişkin açıklamaları aşağıda Tablo 5'te yer almaktadır.

Tablo 5

Öğretmen Adaylarının $\frac{a}{b}$ İfadesini İliştirdiği Kavramlara İlişkin Açıklamaları

Soru 3. *a, b ∈ $\mathbb{Z}^{+}$ ve b≠0 olmak üzere;*
i) $\frac{a}{b}$ ifadesi sizce ne ifade etmektedir? Bu ifadeyi matematiksel olarak hangi kavramlarla ilişkilendirebilirsiniz, ilişkilendirdiğiniz yapıları modelleyerek açıklayınız.
ii) $\frac{a}{b}$ ifadesini ortaokul matematik derslerinde hangi konularla ilişkilendirerek kullanma gereksinimi duyarsınız, nedenlerini modelleyerek açıklayınız.

Öğretmen Adayı	Yanıtlar
Cemre	i) Rasyonel sayıyı ifade etmektedir. Bu matematiksel ifade pay, kesir çizgisi ve paydadan oluşan kesir kavramıyla ilişkilendirilebilir. Kesire örnek olarak 4 dilime ayrılmış pastanın 1 dilimine karşılık gelen rasyonel sayı $\frac{1}{4}$'tür.  ii) $\frac{a}{b}$ ifadesi, rasyonel sayılar, tam sayılar, kesirler, yüzdeler ve ondalık sayılarla ilişkilendirilebilir. Çünkü bu konular birbiriyle bağlantılı, iç içe konulardır. Örneğin; Rasyonel sayı dediğim $\frac{a}{b}$ ifadesindeki a ve b tam sayılardan oluşmaktadır. Aynı zamanda bölüm anlamı taşıyıp kesirleri ifade eder. Kesirli sayıları da yüzdelik ve ondalık sayılarla ifade edebiliriz. Örneğin; $\frac{1}{2}$ (kesir) = %50 (yüzdelik) = 0,50 (ondalık gösterim) 
Berk	i) b≠0 olduğu için bu ifade bana kesirler ve rasyonel sayıları ifade etti. a, b ∈ $\mathbb{Z}^{+}$ için a=3, b=4 olsun. Bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü sorulsun.  ii) Kesirler ve rasyonel sayılar, modelleme olarak da i)'deki gibi aynı pizza örneğini kullanırdım.
Emel	i) $\frac{a}{b}$ ifadesi iki sayı arasındaki ilişkiyi ifade eder. Bu ilişkiyi açıklamak istersek kesir olabilir, bir bölme işlemi olabilir, rasyonel sayı olabilir, bir matematiksel oran olabilir. Matematiksel kavram olarak $\frac{a}{b}$ ifadesi kesir olabilir, bir bölme işlemi olabilir, olasılık olabilir, matematiksel kavram aslında verilen probleme göre değişkenlik gösterir. Örneğin; Bir paranın tura gelmesi: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ olsun. (Olasılık ile ilişkili bir kavram olabilir.) Bir paranın iki yüzü vardır. Tura yüzü 1tanedir. Tura gelme olasılığı: $\frac{1}{2}$  Bir pizzanın yarısı: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ olsun. (Kesir ile ilişkili bir kavram olabilir.)  ii) $\frac{a}{b}$ ifadesi 5. sınıf konularında yer alan "kesirler" ile ilişkilendirilebilir. Çünkü $\frac{a}{b}$ ifadesi bağıl bir ilişkidir. Kesirlerde de bağıl ilişki söz konusudur. Örneğin; Bir dairenin çeyreği:  $\frac{a}{b}$ ifadesi 6. sınıf konularında yer alan "çemberin çevresi" konusu ile ilişkilendirilebilir. $\frac{\text{çevre}}{\text{çap}}=\pi$ denkleminde $\frac{a}{b}$ ifadesini görmekteyiz. Örneğin; $\frac{\text{Çemberin Çevresi}}{\text{Çap}}=\pi$:  $\frac{a}{b}$ ifadesi 7. sınıflarda "oran-orantı" konusunda yer alan problemleri çözmede kullanılabilir. Hatta $\frac{a}{b}$ şeklinde öğrencilerin orantısal akıl yürütme becerisini geliştirebilecek örnekler problemlerde kullanılabilir. Örneğin;  1. kap: $\frac{2}{5}$ limon konsantresi 2. kap: $\frac{3}{6}$ limon konsantresi $\frac{2}{5}<\frac{3}{6}$ olduğu için 1. kap daha az yoğundur. $\frac{a}{b}$ ifadesi 8. sınıflarda olasılık konusu ile ilişkilendirilebilir. Örneğin; Bir zarın iki gelme olasılığı: $\frac{1}{2}$ 

Tablo 5 incelendiğinde Cemre, ilkel bilgiden başlamış ve örnekler vererek görüntü oluşturmaya, modelleme yaprak görüntüye sahip olmaya geçse de kavram görüntüsünün zayıf olmasından kaynaklı olarak ilkel bilgiye geri dönmüştür. Kavram görüntüsü net olmadığı için kavram görüntüsüne sahip olmadığı, ilkel bilgi katmanında çabaladığı, ilişkilendirme yapamadığı fakat farklı temsiller hakkında bilgisinin olduğu görülmektedir. Berk'in de Cemre gibi kavram görüntüleri zayıf ilkel bilgiden, örnek vererek görüntü oluşturma, modelleme ile görüntüye sahip olma ve oradan tekrar ilkel bilgiye geçtiği belirlenmiştir. Emel ise çoklu temsillerle $\frac{a}{b}$ ifadesini açıklayabildiği için özelliği fark etme katmanından soyutlama katmanına geçmiştir. Birinci soruya verdiği yanıtlardan dolayı bu soruda $\frac{a}{b}$ ifadesinin rasyonel sayılarla ilişkisini detaylandıramadığı düşünülmektedir. Emel'in soyutlama katmanında bulunmasının en büyük göstergelerinden biri olarak da ortaokulun farklı sınıf düzeylerinde bu ifadeyi modelleyebilmesi gösterilebilir.

3. Dördüncü Soru Bağlamında Elde Edilen Bulgular

Öğretmen adaylarının dördüncü soruya ilişkin açıklamaları aşağıda Tablo 6'da yer almaktadır.

Tablo 6

Öğretmen Adaylarının Rasyonel Sayılar Kavramlarını Karşılaştırmaya İlişkin Açıklamaları

***Soru 4.** $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ $b, d \neq 0$;* *i) $a<b$, $c<d$ ve $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ olmak üzere $\frac{a+c}{b+d}$ ifadesini $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ büyüklükleri ile nedenlerini açıklayarak karşılaştırınız.* *ii) $a>b$, $c>d$ ve $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ olmak üzere $\frac{a+c}{b+d}$ ifadesini $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ büyüklükleri ile nedenlerini açıklayarak karşılaştırınız.*	
Öğretmen Adayı	**Yanıtlar**
Cemre	i) Örneğin; a=1, b=3, c=1, d=2 olsun. $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ $\frac{a+c}{b+d}=\frac{2}{5}$ Büyüklük sıralaması $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ Nedeni: Pay ve paydalar kendi aralarında toplandığında payda eşitleme durumundan dolayı iki ifadenin arasında olmalıdır. ii) Örneğin; a=3, b=1, c=3, d=2 olsun. $\frac{3}{1}<\frac{3}{2}$ $\frac{a+c}{b+d}=\frac{6}{3}=2$ Büyüklük sıralaması $\frac{3}{2}<2<\frac{3}{1} \Rightarrow \frac{c}{d}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{a}{b}$ Nedeni: Yine aynı şekilde pay ve paydalar birlikte toplandığı için iki ifadenin arasında yer almaktadır.
Berk	i) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ $b, d \neq 0$ olsun. a=2, b=3, c=4, d=5 ise $\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$ ve $\frac{2+4}{3+5}=\frac{6}{8} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ ii) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ $b, d \neq 0$ olsun. a=5, b=4, c=3, d=2 ise $\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$ ve $\frac{5+3}{4+2}=\frac{8}{6} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$
Emel	i) $a<b$, $c<d$ ve $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ olmak üzere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ olduğu için eşitsizliklerde toplama yapabiliriz. $\begin{array}{r} a<b \\ +\ c<d \\ \hline a+c<b+d \end{array} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}<\frac{b+d}{b+d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}<1$ (Basit Kesir) $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ üçgen eşitsizliği mantığı gibi düşündüm. $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ise $a<b<c<d$ olur $\frac{a+c}{b+d}$ ifadesi de ikisinin arasında olmalı. ii) $\begin{array}{r} a>b \\ +\ c>d \\ \hline a+c>b+d \end{array} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}>\frac{b+d}{b+d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}>1$ (Bileşik Kesir) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow$ a=5, b=1, c=20, d=2 olsun. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{5+20}{1+2}=\frac{25}{3}$, $\frac{a}{b}=\frac{5}{1}$, $\frac{c}{d}=\frac{20}{2}$ $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ olur. Elde edilen $\frac{a+c}{b+d}$ iki ifadenin ortasında olur.

Tablo 6 incelendiğinde Cemre, matematiksel dili kullanarak yorum yapmak yerine sayısal değerleri tercih edip ifadenin üzerinde deneysel bir çalışma yapmasından dolayı görüntü oluşturma katmanındadır. Sorunun her iki şıkkında da benzer düşünceyle hareket etmiştir. Açıklama nedeninde ise kavramsal boyutta yeterli bilgiye sahip olmamasından dolayı eşitsizliğin sağlanma durumunu yeterince analiz edememiştir. Bu durumun nedeni, ön bilişsel bilgilerin yetersizliği (beklenilen düzeyde olmaması) olarak görülmektedir. Yarı-yapılandırılmış görüşmede, "*Konular bildiğim ve ifade edebildiğim konulardı ama dördüncü soruda zorlandım. a'ya, b'ye, c'ye ve d'ye değer vererek ifade etmeye çalıştım ama matematiksel olarak nedenini ifade edemedim."*(*1*) şeklindeki açıklamasından da ilkel bilgilerinde eksiklik olduğu çıkarımı yapılmaktadır.

Berk'in yarı-yapılandırılmış görüşmede "*Dördüncü soruda b ve d aynı sayılar olabilir mi diye düşündüm. Eğer aynı olmazsa* $a<b,\ c<d \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}$ *basit kesir olur. Sadece buraya ulaşabiliyorum. Bunun dışında sadece örnekle açıklayabiliyorum."*(*11*) şeklindeki ifadesi de göz önüne alınarak görüntüye sahip olmadan, görüntü oluşturma katmanında bilgisini yapılandırma ihtiyacı hissettiği görülmüştür. İfadesinde yer alan "*Sadece örneklerle açıklayabiliyorum.*" açıklaması, örneklerden soyut ifadelere geçemediğini, ön bilişsel bilgisinin beklenilen düzeyde olmadığını ve yeniden inşa edilmesi gerektiğini göstermektedir. Ayrıca Berk'in *"Geçmiş bilgilerimi geri getirdim."* (*17*) açıklamasından hareketle, ön bilgiye ihtiyaç duyduğu için ilkel bilgi katmanına geçtiğini fakat bilgi eksikliğinden dolayı ilerleyemediğini söyleyebiliriz.

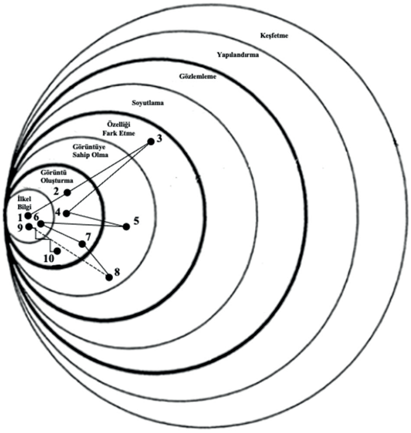
Emel'in sorunun her iki şıkkının da başlangıcında, sembolleri kullanarak eşitsizliği gösterme yönündeki çabası, bilgiyi soyutlama katmanında olduğunu belirtmektedir. Burada görüntüye sahip olma katmanından, soyutlama katmanına geçme aşamasındadır. Üçgen eşitsizliği ve örnek verme düşüncesinden hareketle, ilkel bilgi katmanına gittiği, oradan da belirli sorgulamalarla görüntüye sahip olma katmanına geçtiği görülmektedir. Yarı-yapılandırılmış görüşmedeki "*Dördüncü soruda zorlandım. İnsan arada ilişki kurmakta zorlanıyor, belki de yanlış kurdum. Belki farklı bir bakış açısından baktım. Sayı şeklinde verilmediği a'lı, b'li verildiği için bu şekildeki üç niceliği kıyaslamak biraz zorladı beni."* ve *"* $\frac{a+c}{b+d}<1$*'i bulduktan sonra basit kesir olduğunu yani, diğer soruda da bileşik kesir olduğunu bulduktan sonra kolaydı. Ancak bu noktadan sonra yaptıklarımdan emin değilim."* (*18*) şeklindeki açıklamalarından da anlaşılacağı üzere sorunun başlangıcındaki soyutlama çabasından sonra yaptıklarından emin olmadığını bildirmektedir.

4. Öğretmen Adaylarının Zihin Haritaları

Araştırmanın bu bölümünde Cemre, Berk ve Emel'in rasyonel sayılar kavramına ilişkin açık uçlu dört soruya verdikleri yanıtlar ve yarı-yapılandırılmış görüşmelerle elde edilen veriler kullanılarak Pirie-Kieren teorik modeline göre hazırlanan Tablo 2’ye göre zihin haritaları aşağıda yer alan Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4’teki gibi oluşturulmuştur. Ayrıca oluşturulan zihin haritalarında kullanılan aktivite türleri aşağıda yer almaktadır.

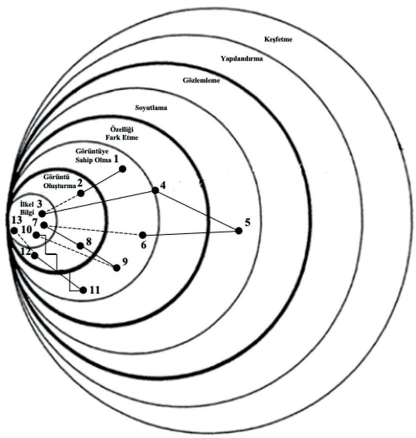
Şekil 2

Cemre’nin Zihin Haritası



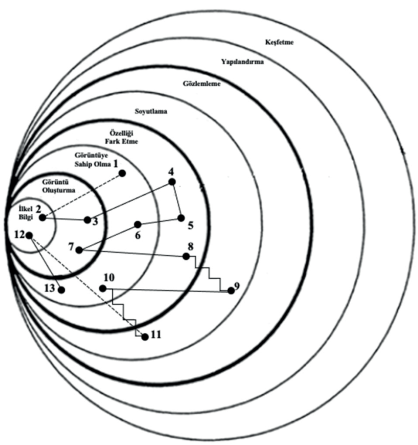
Şekil 3

Berk’in Zihin Haritası



Şekil 4

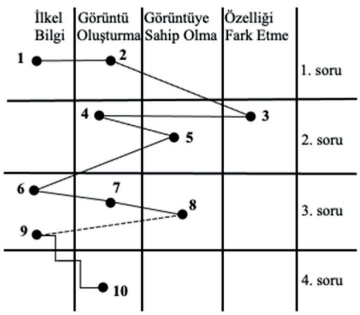
Emel’in Zihin Haritası



Bu araştırmada Pirie-Kieren teorik modelindeki anlama katmanları arasındaki geçişleri, soru bazında daha detaylı yansıtmak amacıyla Cemre, Berk ve Emel’in zihin haritaları, Towers (1998) tarafından önerilen haritalama yöntemiyle de aşağıda yer alan Şekil 5, Şekil 6 ve Şekil 7'deki gibi tasvir edilmiştir.

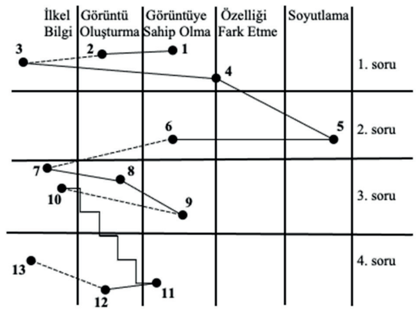
Şekil 5

Cemre'nin Zihin Haritası Tablosu



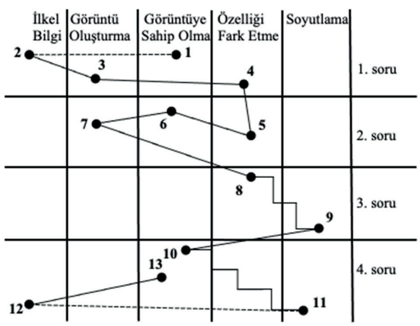
Şekil 6

Berk'in Zihin Haritası Tablosu



Şekil 7

Emel'in Zihin Haritası Tablosu



Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Borgen ve Manu (2002) öğrenci bir problemi mükemmel bir şekilde çözse bile konuyu kavramsal olarak yapılandırdığı anlamına gelmeyeceğini belirtmektedirler. Araştırmacılara göre öğrenci doğru algoritma ile bir problemi gerçekten anlamadan çözebilir. Ancak öğrencinin hangi düşünceler sonucunda bu çözüme ulaştığı, öğretmen tarafından çözüm sürecinin dikkatli analizi ile mümkün olabilir. Düzenli-Gökalp ve Bulut (2018) da öğrencilerin problemleri anlamadan da çözebildiklerini gözlemlemişlerdir. Dolayısıyla bu çalışmada, öğretmen adaylarının Pirie-Kieren teorik modeline göre zihin haritaları oluşturulurken yalnızca açık uçlu dört soru için yapılan çözüm değil; çözüm sürecinde nerelerde neden zorlandıkları ve bu zorlukları nasıl aştıkları, nelerin kolay geldiği ile ilgili görüşleri de göz önüne alınmıştır. Bu belirtilenler doğrultusunda, öğretmen adaylarının Pirie-Kieren teorik modelinin katmanlarındaki davranışları ile oluşturulan zihin haritaları, ilgili alan yazın ile tartışılmış ve elde edilen sonuçlara yönelik öneriler aşağıda sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının temel matematik kavramlarından rasyonel sayılar ve ilişkili olarak kesirler kavramlarıyla ilgili zihin haritalarına göre, Pirie-Kieren katmanlarından en fazla soyutlama katmanına çıkabildikleri, bu arada sık sık üst katmanlardan iç katmanlara doğru geriye katlama davranışında bulundukları görülmüştür. Bunun sebebi olarak da öğretmen adaylarından Berk'in de "*Birinci soru beni zorladı. Hem kendim hem öğrenci açısından düşünecek olursam kesirin ve rasyonel sayının ne olduğunun bilinmesi gerekiyor. Hafızamdan bilgileri geri çekmeye çalıştım."*(*9*) şeklinde belirttiği gibi ilkel bilgilerindeki temel kavramların iyi yapılandırılmaması gösterilebilir. Pirie-Kieren teorisine göre öğrenciler, mevcut anlamaları ile üstesinden gelemeyecekleri bir sorundan dolayı geriye katlama yaparlar (Gülkılık vd., 2015; Martin, 2008). Ayrıca yapılan çalışmalarda (Lawan, 2011; Nopa vd., 2019) da öğrencilerin yaptıkları geriye katlamaların, onların matematiksel anlamalarının derin bir şekilde anlaşılmasını sağlamlaştırdığı ifade edilmektedir. Bu durum da öğretmen adaylarının davranışlarıyla örtüşmektedir. Newton (2008) da çalışmasında öğretmen adaylarının temel kesir kavramları bilgilerini değerlendiren problemlerdeki başarılarının, beklenilen düzeyde olmadığını ifade etmektedir. Şengül ve Argat (2015) ise öğrencilerin çoğunlukla kavramların öğretiminde yeterli ön bilgiye sahip olmaması nedeniyle kendilerine sunulan bilgileri anlamakta zorlandıklarını; bu sebeple de öğretmenlerin yeni bir konuyu öğretmeye başlamadan önce öğrencilerin yeni bilgileri kavramsallaştırmaları için gerekli altyapı ve ön bilgilere sahip olup olmadıklarını kontrol etmelerini önermektedirler. Bu kapsamda öğrencilerin ön bilgilerini kontrol edecek olan öğretmenin, ön bilgilerinde eksiklik ya da hata olmaması gerektiği, bunun oluşmasını engellemenin yolunun ise öğretmen eğitiminden geçtiği düşünülmektedir.

Öğretmen adaylarının ileride bu kavramları öğrencilerin kazanmalarında rehberlik edecek kişiler olarak ön bilgilerinde eksikliklerin olması, öğrencilerde de kavram yanılgılarının oluşmasına neden olabilir. Buna yönelik olarak Pouta vd. (2021) öğrencilere kavramları, anlamlı şekilde öğretebilmek için öğretmenlerin kendi olası kavram yanılgılarını gidermeleri gerektiğini ifade etmektedirler. Newton (2008) da matematik eğitimcilerinin, öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram yanılgılarının farkında olmaları gerektiğini belirtmektedir. Dolayısıyla katılımcıları oluşturan öğretmen adaylarının üniversite üçüncü sınıfta oldukları ve bir sonraki yıl mezun olacakları göz önüne alındığında, tespit edilen eksikliklerini gidermeye yönelik eğitimlerin yapılması önerilmektedir.

Simon (2002, 2006) görüntü oluşturma katmanının matematiksel anlamanın anahtarı olduğunu ifade etmektedir. Bu bağlamda yapılan çalışmada öğretmen adayları görüntü oluşturma katmanına göre değerlendirildiğinde; üç öğretmen adayının kesir/rasyonel sayı kavramlarını uygun örneklerle açıklayarak görüntü oluşturabildikleri belirlenmiştir. Bu da öğretmen adaylarında matematiksel anlamanın gelişimi adına önemli bir sonuç olarak görülmektedir.

Gülkılık vd. (2015) çoklu temsillerin, öğrencilerin matematiksel anlamalarını güçlendirmelerine ve daha ileri seviyelere geçmelerine yardımcı olduğunu açıklamaktadırlar. Ayrıca ortaokul matematik öğretim programının özel amaçlarından biri *"Öğrenci, kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade edebilecektir."* şeklinde bildirilmektedir (MEB, 2018). Bu bağlamda öğrencilerin matematiksel anlamalarını güçlendirmelerine yardımcı olacak öğretmenlerin, temel matematiksel kavramları, matematiksel dili de kullanarak modelleyebilmesinin Pirie-Kieren teorik modelindeki görüntüye sahip olma katmanı ile ilişkili olduğu düşünülmektedir. Öğretmen adayları, kesir/rasyonel sayılarla ilgili model oluşturmada zorlanmamalarına rağmen kesrin bir gösterim/bağıl ilişki olduğunun farkında olma ve rasyonel sayıların, kesirlerin bir denklik sınıfı olduğunu bilme noktasında yeterli bilgiye sahip olmadıkları ifade edilebilir. Bu sonuç, öğretmen adaylarında üniversitede sayıların öğretimi dersini de almış olmalarına rağmen daha küçük yaşlarda aldıkları eğitimden kaynaklanan eksikliklerin hala devam ettiği şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca Düzenli-Gökalp ve Sharma (2010) öğrencilerin sembolik açıklama gerektiren problemleri sözlü açıklama gerektiren problemlere göre daha başarılı bir şekilde çözdüklerini saptamışlardır. Bu sonuç yapılan çalışmada, her bir öğretmen adayının matematiksel bir durumu uygun bir şekilde modelleyebilirken sözlü olarak açıklayamamasıyla benzerlik göstermektedir.

Lamon (2007) kesirleri ve rasyonel sayıları şu şekilde karşılaştırmaktadır: i) kesirler $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilirken rasyonel sayılar $\frac{a}{b}$ dışında farklı şekilde de yazılabilir (ondalıklı sayılar, yüzdeler gibi), ii) kesirler pozitifken rasyonel sayılar negatif de olabilir, iii) her kesir için birbirine denk sonsuz çoklukta kesir yazılabilirken her kesirin yalnızca bir rasyonel sayı karşılığı vardır. Bu tarz bir karşılaştırma ise Pirie-Kieren teorisinin özelliği fark etme katmanına karşılık geldiğinden öğretmen adayları özelliği fark etme katmanına göre değerlendirildiğinde birinci soruda Cemre ve Berk'in kesir ve rasyonel sayı kavramlarını birbirinden ayırt edemediği, Emel'in ise rasyonel sayılarda pay ve paydanın aralarında asallık özelliğinin farkında olmasından hareketle, iki kavramı ayırt edici sadece bir durumun farkında olduğu görülmüştür. Sonuçta, öğretmen adaylarının ikisi özelliği fark etme katmanına geçemezken bir öğretmen adayı ise bu katmanda sınırlı bilgi düzeyine sahiptir diyebiliriz. Gülkılık vd. (2015) güçlü ilkel bilgi ve uzamsal yeteneğe sahip olan öğrencilerin, özelliği fark etme katmanında sıklıkla çalıştıklarını belirlemişlerdir. Bu noktada ilkel bilgisinde eksiklik olan Cemre ve Berk'in bu katmana gelemediği, Emel'in ilkel bilgisinin ise özelliği fark etme katmanı için yeterli olmadığı görülmüştür. Bu bağlamda araştırmanın sonuçları benzerlik göstermektedir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının bilgilerini kavramsal anlama düzeyinde yapılandıramadıkları söylenebilir. Bu duruma ilişkin Ma (1999) öğretmen adaylarının, öğretecekleri matematiğe ilişkin daha derin bir anlayış kazanamadıklarında, Brownell'in (1947) "anlamsız aritmetik" şeklinde belirttiği döngüye devam edeceklerini ifade etmektedir. Bu noktada öğretmen eğitiminde kavramsal öğrenmeye yönelik çalışmaların yapılması önerilmektedir. Ayrıca rasyonel sayıların öğrenilmesinde ön koşul olarak görülen kesir kavramının özelliklerine ilişkin ikinci soruda Cemre ve Emel'in özelliği fark etme katmanında bulundukları, Berk'in ise özelliği fark etme katmanında bulunmamasına rağmen soyutlama katmanında bulunduğu görülmüştür.

Çalışmada ulaşılan bulgular soyutlama katmanına göre değerlendirildiğinde ikinci soruda Berk ve dördüncü soruda Emel, kesir/rasyonel sayı kavramının özelliklerini matematiksel dil ve sembolleri kullanarak açıklayabildikleri ayrıca üçüncü soruda Emel'in gerektiğinde kesir/rasyonel sayı kavramını öğrenci seviyesine göre modelleyebildiği görülmüştür. Soyutlama katmanına ikinci soruda ulaşan Berk, yarı-yapılandırılmış görüşmede, *"Bana kolay gelen soru ikinci soru oldu. Günlük hayattan örneklerle açıklanabildiği için kolay geldi."* açıklamasını yapmıştır. Dolayısıyla öğretmen adayının rasyonel sayılar kavramının alt öğrenme kavramlarından olan kesirler konusunda daha başarılı olduğu tespit edilmiştir. Bu sonuca yönelik Pinto ve Tall (1996) çalışmalarında, kesirlerin genellikle "gerçek dünya" kavramları olarak görüldüğü, rasyonel sayıların ise daha teknik kavramlar olarak görüldüğünü belirlemişlerdir. Bu bağlamda çalışma sonuçları benzerlik sergilemektedir. Ayrıca Emel dördüncü soruda bu katmana ulaşsa da bu katmanda yeterince çalışamamıştır. Yarı-yapılandırılmış görüşmelerde dördüncü soruda zorlandığını ifade etmekle birlikte başlangıçta ilerleyip devamında yaptıklarından emin olmadığına yönelik açıklamaları (*13, 14, 15*), öğretmen adayının ön bilgilerindeki eksikliğin farkında olduğunu göstermektedir. Zorluğu hangi kritik eşikle geçtiği sorulduğunda ise negatif sayılarla çalışılsaydı başlangıçta yaptığı akıl yürütmeyi de yapamayacağını (*18*) ifade etmiştir. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının negatif sayılara ilişkin algılarının araştırılması önerilmektedir.

Çalışmada ulaşılan bulgular gözlemleme katmanına göre değerlendirildiğinde öğretmen adayları kesir ve rasyonel sayı arasındaki bağlantıyı yansıtamamışlardır bu nedenle üç öğretmen adayı da gözlemleme katmanına geçememiştir. Bu durumun bir sonucu olarak öğretmen adaylarının rasyonel sayılar kavramına ilişkin matematiksel anlama düzeylerinin yapılandırma ve keşfetme katmanlarına çıkamayacağı söylenebilir. Düzenli-Gökalp ve Sharma (2010) da ortaokul altıncı sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerine ilişkin anlama düzeylerini belirlemeye yönelik yaptıkları çalışmada, öğrencilerin yapılandırma ve keşfetme katmanlarında zorlandıkları sonucunu elde etmişlerdir. Bu kapsamda öğretmen adaylarının belirtilen katmanlara erişememesi, ortaokulda var olan kavram eksikliklerinin geçen süre içerisinde telafi edilemediğinin bir göstergesi olarak kabul edilebilir.

Öğretmen adaylarının akademik başarı durumlarını gösteren GANO'larına göre Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4'te yer alan rasyonel sayılara ilişkin zihin haritaları incelendiğinde, Emel'in (Şekil 4) özelliği fark etme ve soyutlama katmanlarında Cemre ve Berk'e göre daha fazla sorgulama yaptığı görülmektedir. Dolayısıyla akademik başarısı en yüksek öğretmen adayı olan Emel'in (3.28) zihin haritasının daha zengin olduğunu söyleyebiliriz. Fakat Cemre ve Berk'i kıyasladığımızda, Berk'in Cemre'ye göre daha sık geriye katlama davranışında bulunduğu, özellikle ikinci açık uçlu soruyu cevaplarken daha fazla sorgulama yaparak soyutlama katmanına ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla Berk'in zihin haritasının, Cemre'nin zihin haritasına kıyasla daha zengin olduğu belirlenmiştir. Buradan hareketle, öğretmen adaylarının GANO'larına göre zihin haritalarının zenginleştiğini söyleyemeyiz. Bu bağlamda, öğretmenlerin de öğrencilerinin bir kavramı anlamlı öğrenme çabasına ilişkin akademik başarılarına göre karar vermelerinin hatalı olacağı düşünülmektedir. Öğrencilerin akademik başarılarının, onların öğrenme çabalarına ilişkin ön yargı oluşturma ihtimalinin yüksek olacağı düşünüldüğünde, bu sonuç önemli görülmektedir. Gelecek araştırmalarda, öğretmen adaylarının rasyonel sayılara ilişkin zihin haritalarının, farklı duyuşsal değişkenler (öz-yeterlik, öz-benlik, tutum gibi) bağlamında incelenmesi önerilmektedir.

Yapılan bu çalışmanın matematik eğitimi için önemli iki sonucu olduğu görülmektedir. Birincisi, katılımcıları oluşturan öğretmen adaylarının kesir ve rasyonel sayı kavramlarını ayırmada net bir fikre sahip olmadıkları ve bu kavramlara ait tanımları yapılandırırken matematiksel dili kullanmada zorluk yaşadıkları belirlenmiştir. Bunun sebebi olarak kendilerine bilgiyi sunan öğretmenlerde var olabilecek kavramsal eksiklikler veya birincil kaynakları olan ders kitaplarında bu kavramlara ilişkin bilgilerin, matematiksel doğruluğu tam yansıtmaması gösterilebilir. Bu nedenle kavramların tarihsel gelişim süreçleri göz önüne alınarak kavramlara ait kesinleştirilmiş tanımların yapılması ve bu tanımların öğrenci seviyelerine uygun hiyerarşik bir şekilde öğrencilere yansıtılması önerilmektedir.

İkinci olarak öğretmen adaylarının kavramları daha iyi yapılandırmalarının bu kavramlara ilişkin öğretim sürecinde ortaya çıkacağı düşünülmektedir. Özellikle eğitim fakültelerinde bu kavramların öğretimine yönelik teorik derslerin öğretmen adayları tarafından uygulama sürecine nasıl yansıtıldığının gözlemlenmesi önemli görülmektedir. Bu nedenle öğretmen adaylarının bu kavramları öğretmenlik uygulaması gibi derslerde birebir sınıf ortamında uygulamalarının gözlemlenerek daha detaylı durum tespitine gidilmesi önerilmektedir.

Kaynakça

Alajmi, A., and Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *65* (5), 77-94. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9042-4

Behr, M., Lesh, R., Post, T., and Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), In *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). Academic Press.

Borgen, K. L., and Manu, S. S. (2002). What do students really understand?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21* (2), 151-165. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00115-3

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Elementary School Journal*, *47* (5), 256-265. https://doi.org/10.1086/462322

Coe, R., and Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*, 41-53. https://doi.org/10.1080/0141192940200105

Çelik, B. (2006). *Temel matematik*. Nobel.

Düzenli-Gökalp, N., and Bulut, S. (2018). A new form of understanding maps: Multiple representations with Pirie and Kieren model of understanding. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *26* (6), 1-21.

Düzenli-Gökalp, N., and Sharma, M. D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *2* (2), 5168-5171. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.840

Ellerbruch, L. W., and Payne, J. N. (1978). A teaching sequence for initial fraction concepts through the addition of unlike fractions. In M. Suydam (Eds.), In *Developing computational skills*. National Council of Teachers of Mathematics.

Glaser, R. (1991). The maturing of the relationship between the science of learning and cognition and educational practice. *Learning and Instruction*, *1* (2), 129-144. https://doi.org/10.1016/0959-4752(91)90023-2

Gülkılık, H., Uğurlu, H. H., and Yürük, N. (2015). Examining students' mathematical understanding of geometric transformations using the Pirie-Kieren model. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *15* (6), 1531-1548.

Hakim, F., and Murtafiah, M. (2022, 8 December). *Undergraduate students' levels of understanding in solving mathematical proof problem: The use of Pirie-Kieren* *theory*. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2575, No. 1). AIP Publishing. https://doi.org/10.1063/5.0108699

Healy, L., and Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (4), 396-428. https://doi.org/10.2307/749651

Kamii, C., and Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(4), 365-378. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90035-7

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Eds.), In *Number and measurement: Papers from a research workshop*, (pp. 101-144). ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1981). *Five faces of mathematical knowledge building*. Department of Secondary Education, University of Alberta.

Kilpatrick, J., Swafford, J. O., and Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (5), 379-405. https://doi.org/10.2307/4149959

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for Research. In F. K. Lester (Eds.), In *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and ınstructional strategies for teachers* (4. Ed.). Newgen Publishing UK.

Lawan, A. (2011, 11-15 Jully). *Growth of students'understanding of part-whole sub-construct of rational number on the layers of Pirie-Kieren theory* [Long Papers]. 17. National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA) (pp. 69-80), University of the Witwatersrand, Johannesburg.

López-Martín, M. D. M., Aguayo-Arriagada, C. G., and García López, M. D. M. (2022). Preservice elementary teachers' mathematical knowledge on fractions as operator in word problems. *Mathematics*, *10* (3), 423. https://doi.org/10.3390/math10030423

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understandings of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, *26* (5), 422-441. https://doi.org/10.2307/749431

Martin, L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(1), 64-85. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.04.001

Martin, W. G., and Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20* (1), 41-51. https://doi.org/10.2307/749097

Martinie, S. L. (2007). *Middle school rational number knowledge* [Unpublished doctoral dissertation]. Kansas State University.

Miles, M. B., and Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*. Sage.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı ve kılavuzu*. MEB Basımevi.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110. https://doi.org/10.3102/0002831208320851

Niven, I. (1961). *Numbers: Rational and irrational*. Mathematical Association of America.

Nopa, J. R., Suryadi, D., and Hasanah, A. (2019, February). *The 9th grade students' mathematical understanding in problem solving based on Pirie-Kieren theory*. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1157, No. 4), IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/4/042122

Peñaloza, J. A., and Vásquez, F. M. R. (2022). Understanding ratio through the Pirie-Kieren model. *Acta Scientiae*, *24* (4), 24-56. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6826

Pinto, M., and Tall, D. (1996). *Student teachers' conceptions of the rational numbers*. In Published in Proceedings of PME 20 (Vol. 4, pp. 139-146), Valencia.

Pirie, S., and T. Kieren (1991). *A dynamic theory of mathematical understanding: Some features and implications.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Pirie, S., and Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?. *Educational Studies in Mathematics*, *26* (2/3), 165-190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Pouta, M., Lehtinen, E., and Palonen, T. (2021). Student teachers' and experienced teachers' professional vision of students' understanding of the rational number concept. *Educational Psychology Review*, *33*, 109-128. https://doi.org/10.1007/s10648-020-09536-y

Reys, R. E., Reys, B. J., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., and Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan and the United States. *School Science and Mathematics*, *99*(2), 61-70. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17449.x

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 9-34. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1258

Simon, M. A. (2002). Focusing on key developmental understandings in mathematics. *Learning*, *24*, 990.

Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking & Learning*, *8* (4), 359-371. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_1

Stafylidou, S., and Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14* (5), 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Star, J. R., and Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 169-181. https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784828

Syafiqoh, N., Amin, S. M., and Siswono, T. Y. E. (2018, November). *Analysis of student's understanding of exponential concept: a perspective of Pirie-Kieren theory* [Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1108, No. 1, p. 012022)]. IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1108/1/012022

Şengül, S., and Argat, A. (2015). The analysis of understanding factorial concept processes of 7th grade students who have low academic achievements with Pirie Kieren theory. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *197*, 1263-1270. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.398

Şengül, S., and Göktepe Yıldız, S. (2016). An examination of the domain of multivariable functions using the Pirie-Kieren model. *Universal Journal of Educational Research*, *4* (7), 1533-1544. https://doi.org/10.13189/ujer.2016.040706

Şengül, S., Kaba, Y., and Argat, A. (2016, 13-15 July). *The analyis of understanding factorial concept processes of 7th grade students who have high academic achievements with Pirie-Kieren theory* [Tam metin bildiri]. International Conference on New Horizons in Education (INTE 2016) (pp. 730-737).

Towers, J. M. (1998). *Teachers' interventions and the growth of students' mathematical understanding* [Unpublished PhD thesis]. The University of British Columbia.

Trance, N. J. C. (2017). Evaluating preservice teacher cognition over student mathematics misconception. *The Science and Technology Research Journal*, *12* (1), 97-108.

Valcarce, M. C., Martín, M. L. D., Astudillo, M. T. G., and Pérez, M. C. M. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *31* (3), 135-154. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.963

Vula, E., and Kingji-Kastrati, J. (2018). Pre-service teacher procedural and conceptual knowledge of fractions. In G. J. Stylianides and K. Hino (Eds.), In *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers*, (pp. 111-123). Springer.

Warner, L. B. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27* (3), 206-227. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.07.002

Wearne, D., and Hiebert, J. (1988). Constructing and using meaning for mathematical symbols: The case of decimal fractions. In J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, (pp. 220-235). NCTM, and Lawrence Erlbaum Associates.

Yao, X. (2020). Characterizing learners' growth of geometric understanding in dynamic geometry environments: A perspective of the Pirie–Kieren theory. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*, 293-319. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00069-1

Yetim, S., ve Alkan, R. (2010). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin rasyonel sayılar ve bu sayıların sayı doğrusundaki gösterimleri konusundaki yaygın yanlışları ve kavram yanılgıları. *Fen Bilimleri Dergisi*, *11*, 87-109.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (5. Ed.). Sage.

Ekler

Ek 1.

Rasyonel Sayılar Kavram Testi (RSKT)

1) Kesir nedir, Rasyonel Sayı nedir? Tanımlayınız. Tanımlarınıza uygun örnek veriniz. Aralarında fark var mıdır? Varsa nelerdir açıklayınız.

2) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz ve modelleyerek gösteriniz.

i) Payları eşit olan basit kesirler karşılaştırıldığında paydası en büyük olan kesir en küçüktür. Çünkü..

ii) Paydaları eşit olan basit kesirler karşılaştırıldığında payı en büyük olan kesir en büyüktür. Çünkü..

3) a, b $\in \mathbb{Z}^+$ ve b≠0 olmak üzere;

i) $\frac{a}{b}$ ifadesi sizce ne ifade etmektedir? Bu ifadeyi matematiksel olarak hangi kavramlarla ilişkilendirebilirsiniz, ilişkilendirdiğiniz yapıları modelleyerek açıklayınız.

ii) $\frac{a}{b}$ ifadesini ortaokul matematik derslerinde hangi konularla ilişkilendirerek kullanma gereksinimi duyarsınız, nedenlerini modelleyerek açıklayınız.

4) a, b, c, d $\in \mathbb{Z}^+$ b, d≠0;

i) a<b, c<d ve $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ olmak üzere $\frac{a+c}{b+d}$ ifadesini $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ büyüklükleri ile nedenlerini açıklayarak karşılaştırınız.

ii) a>b, c>d ve $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ olmak üzere $\frac{a+c}{b+d}$ ifadesini $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ büyüklükleri ile nedenlerini açıklayarak karşılaştırınız.

Ek 2.

Yarı-Yapılandırılmış Görüşme Verileri

1. Bu çalışmada nerelerde zorlandınız, zorlanma nedenleriniz ile açıklayınız.

(Cemre (C) ve Araştırmacı (A) arasında geçen görüşme):

1 C: *Konular bildiğim ve ifade edebildiğim konulardı ama dördüncü soruda zorlandım. a'ya, b'ye, c'ye ve d'ye değer vererek ifade etmeye çalıştım ama matematiksel olarak nedenini ifade edemedim.*

2 A: *Peki dördüncü soruda zorlanma sebebin nedir?*

3 C: *Sanırım bu tarz sorulara çok fazla alışkın olmadığım, aşina olmadığım için olabilir. Pek tahminde bulunamadım o yüzden sonuca örnek vererek ulaşmaya çalıştım.*

4 A: *Anladım. Bu tarz bir soruyu ilk kez gördüğünü söylüyorsun.*

5 C: *Ortaokulda görmesem de lisede benzer bir soruyla karşılaşmışımdır ama nasıl bir yol izleyeceğimi bilemedim. Örnek verdim.*

6 A: *Örnek verebiliyorsun ama a'lı, b'li ifade edemediğini söylüyorsun, öyle mi?*

7 C: *Evet matematiksel olarak genelleyemiyorum.*

8 A: *Anladım. Genelleme yapamadığını düşünüyorsun.*

(Berk (B) ve A arasında geçen görüşme):

9 B: *Birinci soru beni zorladı. Hem kendim hem öğrenci açısından düşünecek olursam kesirin ve rasyonel sayının ne olduğunun bilinmesi gerekiyor. Hafızamdan bilgileri geri çekmeye çalıştım.*

10 A: *Kesir ve rasyonel sayıların tanımlarını yapmakta zorlandığını mı ifade ediyorsun?*

11 B: *Evet. Bir de dördüncü soruda b ve d aynı sayılar olabilir mi diye düşündüm. Eğer aynı olmazsa* $a<b,\ c<d \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}$ *basit kesir olur. Sadece buraya ulaşabiliyorum. Bunun dışında sadece örnekle açıklayabiliyorum.*

12 A: *Anladım. Genelleme yapmakta zorlandığını ifade ediyorsun.*

(Emel (E) ve A arasında geçen görüşme):

13 E: *Dördüncü soruda zorlandım. İnsan arada ilişki kurmakta zorlanıyor, belki de yanlış kurdum. Belki farklı bir bakış açısından baktım. Sayı şeklinde verilmediği a'lı, b'li verildiği için bu şekildeki üç niceliği kıyaslamak biraz zorladı beni.*

14 A: *Sayı olsaydı zorlanmazdım diyorsun, genelleme yapmak mı zordu?*

15 E: *Evet sayı olmadığı için zorlandım, genelleme yapmak zor.*

2. Zorlandığınız soruyu çözmenizde hangi kritik nokta fayda sağladı?

16 C: *"Sadece sorunun çözümüne odaklandım. Zaten örnek sorular verip gittiğim için verileri (sorudaki verilerden bahsediyor) kullandım. Mesela a<b diyor. Bunları kullanmak çözmemi sağladı. Bu durumları sağlayan kesirler kullandım. Kısacası sorudaki verileri kullandım."*

17 B: *"Geçmiş bilgilerimi geri getirdim."*

18 E: *"Pozitif sayı olması benim için avantajdı. Negatif sayı olsa hiç çözemezdim.* $\frac{a+c}{b+d}<1$*'i bulduktan sonra basit kesir olduğunu yani, diğer soruda da bileşik kesir olduğunu bulduktan sonra kolaydı. Ancak bu noktadan sonra yaptıklarımdan emin değilim."*

3. Bu çalışmanın kolay yönleri nelerdi, nedenleriniz ile açıklayınız.

19 C: *"İkinci soru çok kolaydı. İlkokuldan beri alışageldiğimiz bir durum ve açıklamasını da hep modellediğimiz için kolaydı."*

20 B: *"Bana kolay gelen soru ikinci soru oldu. Günlük hayattan örneklerle açıklanabildiği için kolay geldi."*

21 E: *"Üçüncü sorunun ikinci şıkkı (ii) ve ikinci soru kolaydı. İlkokuldan beri görüyoruz. Ama mantığını bu yıl "Sayıların Öğretimi" dersinde kavradım, yoksa ezberdi benim için. Bu dönem aldığım "Geometri ve Ölçme Öğretimi" dersi de bu sorularda yardımcı oldu bana."*