

## QR Algoritması Kullanarak Spektral Çizge Bölümleme

Mücahit Sülü<sup>1\*</sup>, Resul Daş<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Organize Sanayi Bölgesi MYO, Bilgisayar Programcılığı, İnönü Üniversitesi, 44280 Malatya, Türkiye

<sup>2</sup>Yazılım Mühendisliği, Teknoloji Fakültesi, Fırat Üniversitesi, 23119 Elazığ, Türkiye

\*<sup>1</sup>mucahit@inonu.edu.tr, <sup>2</sup>rdas@firat.edu.tr,

(Geliş/Received: 07/07/2022;

Kabul/Accepted: 24/08/2022)

**Öz:** Bu makale çalışmasında, sayısal metotlar kullanılarak hesaplanan ve çizge analiz yöntemlerinden olan spektral çizge bölümleme algoritmasının uygulaması gerçekleştirilmiştir. Uygulamada, 1963 yılından günümüze kadar 39 sezondur devam eden BBC yapımı Doctor Who televizyon dizisi verileri kullanılmıştır. Bu televizyon dizisinden elde edilen Doctor Who basit çizgesinde, düğümler karakterlerin dizideki isimlerini göstermektedir.  $i, j$  düğümleri arasındaki  $w$  ağırlığı ise karakterlerin aynı bölümde  $w$  kez beraber oynadığı yönsüz bir ayrıtı temsil edecek şekilde oluşturulmuştur. Bu veri setinde aynı bölümde beraber oynayan film oyuncularını, birlikte oynama yoğunluğuna göre iki gruba ayırmak istense nasıl bir ayrışma olurdu sorusundan yola çıkılmıştır. Bu verilerdeki ağırlıklı ilişkiler, çizge ile modellenerek, çizgenin Laplace matrisi hesaplanmıştır. Bu Laplace matrisine ait olan özdeğer ve özvektörler, QR algoritması yardımı ile elde edilmiş ve ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektör (Fiedler vektörü) satırındaki negatif ve pozitif değerler farklı gruplar oluşturacak şekilde çizge iki parçaya bölünmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Çizge bölümleme, Çizge teorisi, Çizge görselleştirme.

### Spectral Graph Partitioning Using QR Algorithm

**Abstract:** In this study, spectral graph segmentation algorithm, which is one of the graph analysis methods calculated using numerical methods, has been implemented. In practice, data from the BBC's Doctor Who television series, which continued for 39 seasons from 1963 to the present, were used. In the Doctor Who simple diagram from this television series, the nodes represent the characters' names in the series. The weight  $w$  between nodes  $i, j$  is created to represent an undirected edge where the characters play together  $w$  times in the same section. In this data set, the question of what kind of separation would be if the movie actors who played together in the same episode were to be divided into two groups according to the intensity of playing together was started. The weighted relations in these data were modeled with the graph, and the Laplace matrix of the graph was calculated. Eigenvalues and eigenvectors belonging to this calculated Laplace matrix were obtained with the help of QR algorithm and the graph was divided into two parts so that the negative and positive values in the eigenvector line corresponding to the second smallest eigenvalue (Fiedler vector) form different groups.

**Keywords:** Graph partitioning, Graph theory, Graph visualization.

## 1. Giriş

Çizge teorisi, çizge analizi, çizge ile derin öğrenme ve bunlara ait olan uygulamalara olan ilgi 21. yüzyılda büyük bir hızla artmaya devam etmektedir. Bu artışın birincil sebebi günlük hayatta karşılaştığımız ilişkiyel birçok probleme Çizge Teorisi ile çözüm bulunabilmesidir. Karşılaştığımız birçok problem, bir düğümler kümesi ve bu düğümleri birleştiren doğruların oluşturduğu ayrıtılar kümesi olarak ifade edilebilir [1]. Çizge analiz yöntemlerinden birisi olan çizge bölümleme, veri analizi ve paralel hesaplama gibi birçok alanda kullanılan bir yöntemdir. Çizge bölümlemede, çizgelerin nümerik olarak ifade edilip, hesaplama yapılması işlem kolaylığı sağlamaktadır. Birçok çizge bölümleme yöntemi vardır ve bunlardan yalnızca spektral çizge bölümleme yöntemi nümerik olarak çalışmaktadır. Gelişen bilgisayar teknolojisi ile birlikte, çizgelerden elde edilen büyük matrislerin hesaplanmasında kolaylıklar

\* Sorumlu Yazar: mucahit@inonu.edu.tr. Yazarların ORCID numarası: <sup>1</sup>0000-0002-4114-1390, <sup>2</sup>0000-0002-6113-4649,

sağlanmıştır. Bu matrislerin analiz edilmesinde kullanılan en iyi yöntemlerden birisi, o matrise ait olan özdeğer ve özvektörler üzerinde yapılan yorumlardır. Fiedler Laplace matrisine ait olan, ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektörü çizgenin cebirsel bağıllığı olarak isimlendirmiştir [2]. Özdeğerler bir matristeki en önemli nümerik ifadelerden birisidir ve özdeğer hesaplamak matematiksel olarak karmaşıktır. Özdeğer ve özvektör hesaplamada büyük kolaylık sağlayan QR algoritması 20.yüzyılın en iyi 10 algoritması arasında yer bulmuştur. QR algoritması 1950'lerin sonunda John G.F. Francis ve Vera N. Kublanovskaya tarafından birbirinden bağımsız olarak geliştirilmiştir [3]. QR algoritması büyük matrislerin özdeğer ve özvektör hesaplama işlemini kolaylaştırmıştır. Makale çalışmasının 2.bölümünde çizge bölümleme konusu ele alınmış, özellikle matematiksel denklemleri irdelenmiştir. 3.bölümde geliştirilen uygulamanın materyal ve metot kısımları sunulmuştur. 4. bölümde 1963 yılından günümüze kadar 39 sezondur devam eden BBC yapımı Doctor Who televizyon dizisi verileri kullanılarak düğümler karakterlerin dizideki isimleri,  $i, j$  düğümleri arasındaki  $w$  ağırlığı ise karakterlerin aynı bölümde  $w$  kez beraber oynadığı yönsüz bir ayrıtı temsil edecek şekilde oluşturulmuştur. Bu veri setinde aynı bölümde beraber oynayan film oyuncularını, birlikte oynama yoğunluğuna göre iki gruba ayırmak istense nasıl bir ayrışma olurdu sorusundan yola çıkılarak çizge bölümleme uygulaması adım adım gerçekleştirilmiş ve elde edilen çıktılar görsel olarak sunulmuştur. Son bölümde ise çalışmaya ait sonuç verilmiştir.

## 2. Çizge Bölümleme

Çizge bölümleme işlemi, çizge analiz metodlarından birisidir. Bazen bir çizgenin daha küçük bir çizge olarak ifade edilmesi işlem kolaylığı sağlar. Çizge kümeleme ile her kümenin kendi içerisinde analiz edilmesi kolaylaşır. Bir çizgedeki zayıf bağlantıları bulma, sosyal, patolojik ve biyolojik ağlardaki kliklerin kümelenmesi gibi problemler son dönemlerde önem kazanmıştır [4].

Bağlı ve yönsüz  $G = (V, E)$  çizgesini ele alalım. Çizgenin düğümlerini biri birinden ayrık, birden fazla alt kümeyle ayırma işlemine **çizge bölümleme** denir. Bu alt kümeler  $A$  ve  $B$  olarak ele alalım ( $A \cap B = \emptyset$ ), ( $A, B \subset G$ ).  $E(A, B)$  çizgenin ayracı olsun. Bölümlemenin kesme boyutu  $|E(A, B)|$  olur ve buna çizgenin ayracının boyutu olarak adlandırılır.

Çizge bölümleme zor bir problemdir ve pratik çözümler buluşsal yöntemlere dayanır. İki geniş yöntem kategorisi bulunmaktadır, bunlardan birisi yerel ve diğeri küreseldir. İyi bilinen yerel yöntemler, yerel arama stratejilerinin ilk etkili 2 yönlü kesimleri olan Kernighan-Lin algoritması ve Fiduccia-Mattheyses algoritmalarıdır. Bunların en büyük dezavantajı, nihai çözüm kalitesini etkileyebilecek olan düğüm kümesinin keyfi ilk bölünmesidir. Global yaklaşımlar, tüm çizgenin özelliklerine dayanır ve rastgele bir başlangıç bölümüne dayanmaz. En yaygın örnek, bir bölümün bitişiklik matrisinin yaklaşık özvektörlerinden türetildiği spektral bölümleme veya çizge Laplacian matrisinin öz vektörlerini kullanarak çizge düğümlerini gruplayan spektral bölümelemedir.

### 2.1 Spektral Çizge Bölümleme

Spektral çizge bölümleme yöntemi, nümerik metotlar ile yapılmaktadır. Bu nümerik metotlardan biriside reel-simetrik olan matrislerin özdeğerleri ve özvektörlerinin hesaplanması olarak tanımlanabilir [5]. Bir çizgenin Laplace matrisi reel ve simetrik olan bir matristir. Bölümleme yapılabilmesi için ilk olarak bu matrise ait olan özdeğer ve özvektörlerin hesaplanması gerekir. Bu hesaplama sonucunda ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektör çizgenin iki parçaya bölünmesinde kullanılır. Bu yöntem ilk olarak Fiedler tarafından kullanılmıştır. Fiedler Laplace matrisine ait olan, ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektörü çizgenin cebirsel bağıllığı olarak isimlendirmiştir. Fiedler' in bu çalışması ile,

burada elde edilen özdeğe matrisin Fiedler değeri ve özvektör ise Fiedler vektörü olarak adlandırılmıştır [2]. Bu vektör çizgenin en küçük ayırıcı yani en zayıf ayrılma noktasını verir.

Çizge bölümlene işleminde, çizge kesme boyutunun minimum olması beklenir. **Kesme oranı**  $\phi(A, B)$  Denklem 1 deki gibi hesaplanmaktadır.

$$\phi(A, B) = \frac{|E(A, B)|}{\min(|A|, |B|)} \quad (1)$$

Bir çizgenin beklenen en iyi kesme oranına o çizgenin **izoperimetrik sayısı** denir ve Denklem 2 deki gibi hesaplanmaktadır:

$$\phi(G) = \min_{|A| \leq \frac{n}{2}} \left( \frac{|E(A, B)|}{\min(|A|, |B|)} \right) \quad (2)$$

## 2.2 Laplace Matrisi ve Fiedler Vektörleri

Bir çizgenin **bitişiklik matrisi**  $|V| = n$  için, Denklem 3 ile verilen  $n \times n$  boyutunda bir kare matristir. Burada  $i$  düğümü  $j$  düğümüne bitişik ise 1, diğer durumlarda 0 ile işaretlenir [6].

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3)$$

Bir çizgenin **derece matrisi**  $n \times n$  boyutunda Denklem 4 ile verilen bir kare matristir. Burada  $i$  indeksi  $j$  indeksine eşit ise düğümün derecesi ile, diğer durumlarda 0 ile işaretlenir ve köşegen bir matris elde edilir [6].

$$D_{i,j} = \begin{cases} \text{deg}(v_i) & i = j \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (4)$$

Bir çizgenin bitişiklik matrisinden derece matrisinin çıkarılması ile elde edilen matris **Laplace matrisi** olarak adlandırılır, bu matris Denklem 5 teki gibi hesaplanmaktadır. Bu denkleme göre  $i$  indeksi  $j$  indeksine eşit ise düğümün derecesi,  $i$  indeksi  $j$  indeksine eşit değil fakat  $v_i$  düğümü  $v_j$  düğümüne bitişik ise -1 ve diğer durumlarda 0 ile işaretlenir [7].

$$L_{i,j} = \begin{cases} \text{deg}(v_i) & i = j \\ -1 & i \neq j \text{ } v_i v_j \text{ bitişik} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (5)$$

## 3. Materyal ve Metot

G çizgesine ait olan Laplace matrisinin Fiedler vektörü  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$  olsun, spektral çizge bölümlenmede  $s$  bölümlene değeri olmak üzere iki parçaya bölünen çizgede, bir parça için  $u_i > s$  ve diğer parça için  $s \leq u_i$  olur. Bu tip bir çizge kesmesine Fiedler kesmesi denir [1]. Bu Spektral bölümlene yöntemlerinden birisidir.

### 3.1 Matrislerin Özdeğer ve Özvektörünün Hesaplanması

Bir denklem sisteminde çözümün olabilmesi için, bu denklem sistemine ait katsayılar matrisi bulunduğundan sonra elde edilen vektörlerin bağımsız olması gerekir.  $U_1, \dots, U_n$  vektörleri lineer bağımsız ise;

$$c_1 U_1 + \dots + c_n U_n = 0$$

## QR Algoritması Kullanarak Spektral Çizge Bölümleme

eşitliğindeki  $c_1, c_2, \dots, c_n$  katsayıları için,  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  eşitliği sağlanır. Eğer en az bir tane  $c_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bulunabiliyor ise bu vektörler lineer bağımsız değildir denir.  $X$  bir vektör ve  $A$  katsayılar matrisi olsun;

$$AX = \lambda X$$

eşitliğindeki  $\lambda$ ,  $A$  matrisinin özdeğeri ve  $X$  ise  $\lambda$  ya karşılık gelen özdeğer vektörüdür. Buradan;

$$(A - \lambda I)X = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin determinantı hesaplandığında ise  $A$  matrisinin karakteristik polinomu elde edilmiş olur. Bu polinoma ait olan kökler  $A$  matrisinin özdeğerleridir[8]. Bir çok özdeğer hesaplama yöntemi vardır. Bu yöntemlerden bazıları *Kuvvet yöntemi*, *Jacobi yöntemi*, *Householder* olarak sıralanabilir. Kuvvet yöntemi ile en küçük özdeğere karşılık gelen özvektör hesaplanabilir. Jacobi yöntemi ile bütün özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen bütün özvektörleri hesaplayabiliriz. Householder yönteminde ise, reel simetrik olan bir matris tree-diagonal bir matrise dönüşmektedir. Jacobi yönteminde bütün özdeğerler ve özvektörler bulunabildiğinden, bu çalışmada, bu yöntem yer verilmiştir. Jacobi yöntemi simetrik matrisler için özdeğer ve özvektör hesaplamada kullanılmaktadır. Bir çizgenin Laplace matrisi de simetrik bir matristir ve Jacobi yönteminin kullanılması için uygundur.

### 3.2 QR Algoritması

Bir matristeki en önemli nümerik ifadelerden biriside özdeğerlerdir ve özdeğer hesaplamak gerçekten karmaşık bir süreçtir. QR algoritması 20.yüzyılın en iyi 10 algoritması arasında kendisine yer bulmuştur. QR algoritmasının 1950'lerin sonunda John G.F. Francis ve Vera N. Kublanovskaya tarafından birbirinden bağımsız olarak geliştirildiği bilinmektedir [3]. QR algoritması,  $A$  matrisini,  $A=QR$ ,  $Q$  üst köşegen ve  $R$  ortogonal matrisleri olmak üzere iki matrise ayrılarak ilerleyen bir takım işlemler dizisinden oluşur. 1960'ların ortalarından günümüze kadar QR algoritması büyük matrislerin özdeğer problemlerini kolaylaştırmış ve kolaylaştırmaya devam etmektedir.

#### 3.2.1 Gram-Schmidt yöntemi ile QR dönüşümü

Gram-Schmidt iterasyonu ile  $Q$  matrisini aşağıdaki adımları takip ederek elde edebiliriz.  $A = [a_1|a_2|, \dots, |a_n]$  matrisinin sütun vektörleri  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 & e_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_2 &= a_2 - (a_2^T e_1)e_1 & e_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{k+1} &= a_{k+1} - (a_{k+1}^T e_1)e_1 - \dots - (a_{k+1}^T e_k)e_k & e_k &= \frac{u_k}{\|u_k\|} \end{aligned}$$

$$A = [a_1|a_2|, \dots, |a_n] = [e_1|e_2|, \dots, |e_n] \begin{vmatrix} a_1 e_1 & a_2 e_1 & \dots & a_n e_1 \\ 0 & a_2 e_2 & \dots & a_n e_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n e_n \end{vmatrix}$$

$Q$  matrisi elde edildikten sonra  $A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T QR \Rightarrow R = Q^T A$  şeklinde  $R$  matriside elde edilebilir[9].

### 3.2.2 QR Algoritması ile Özdeğerler ve Özvektörlerin Hesaplanması

A matrisine ait olan özdeğer ve özvektörlerin QR ayrışımı ile hesaplayabilmek için önce A matrisi Q ortogonal ve R üst köşegen matrislere ayırmamız gerekir.

$$A = QR$$

Daha sonra elde ettiğimiz Q ortogonal ve R üst köşegen matrisler;

$$A_1 = RQ, S = Q$$

şeklinde çarpıldığında  $A_1$  ve S matrisleri elde edilir. Elde edilen bu  $A_1$  matrisi yeniden QR ayrışımı ile  $Q_1$  ortogonal ve  $R_1$  üst köşegen matrislere ayrılır. Daha sonra elde edilen  $Q_1$  ortogonal ve  $R_1$  üst köşegen matrisler;

$$A_2 = R_2Q_2, S_1 = QQ_1$$

şeklinde çarpıldığında  $A_2$  ve  $S_1$  matrisi elde edilir.

$$\begin{aligned} A &= QR \\ A_1 &= RQ & S &= Q \\ A_1 &= Q_1R_1 & S_1 &= QQ_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ A_n &= Q_nR_n & S_n &= QQ_1Q_2\dots Q_n \end{aligned}$$

Bu işlemler dizisi  $A_n$  matrisi köşegen matris oluncaya kadar devam ettirilir. Bu işlemler dizisi sonunda,  $A_n$  özvektörler ve  $S_n$  özdeğerler olarak elde edilmiş olur [10].

## 4. Çizge Bölümleme Uygulaması

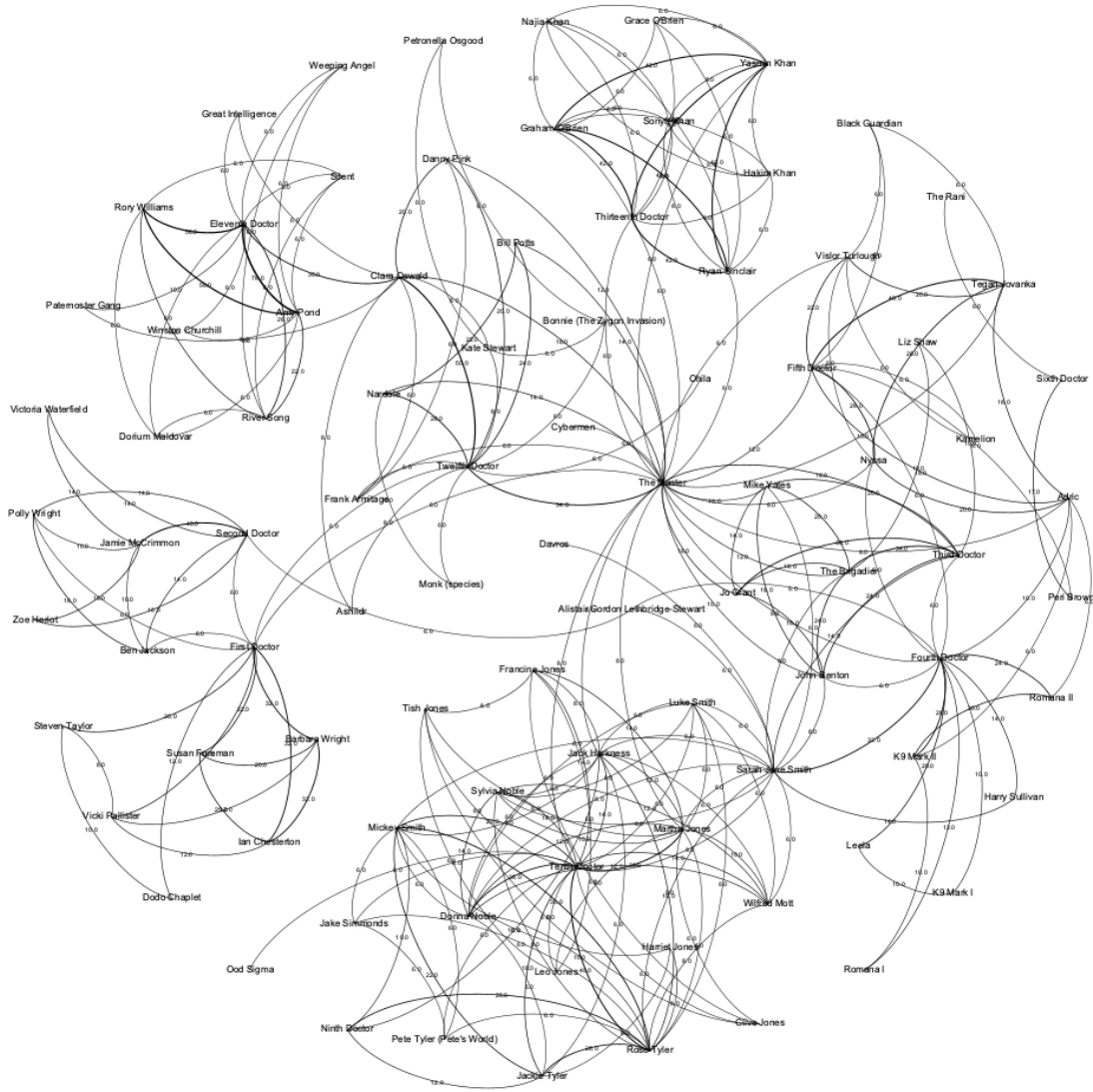
Doctor Who, 1963 yılından günümüze kadar uzanan 39 sezonluk, BBC yapımı televizyon dizisidir. Doctor Who basit çizgesinde, düğümler karakterlerin dizideki isimlerini ve i,j düğümleri arasındaki w ağırlığı ise karakterlerin aynı bölümde w kez beraber görüldüğü yönsüz bir ayrıtı temsil etmektedir[11]. Bu veri setinde  $w > 5$  olacak şekilde filtreleme yapılmış ve en çok beraber oynayan oyuncular iki gruba ayrılmak istenseydi bu gruplaşma nasıl olurdu sorusundan yola çıkarak çizge bölümleme algoritması uygulanmıştır. Veri setimiz 90 adet düğüm ve 252 adet ayrıtı içermekte olup, düğümler kümesi şu şekildedir;

Adric, Fifth Doctor, Fourth Doctor, K9 Mark II, Nyssa, Romana II, Tegan Jovanka, The Master, Alistair Gordon Lethbridge-Stewart, Sarah Jane Smith, Second Doctor, Amy Pond, Dorium Maldovar, Eleventh Doctor, River Song, Rory Williams, Silent, Weeping Angel, Winston Churchill, Ashildr, Clara Oswald, Twelfth Doctor, Barbara Wright, First Doctor, Ian Chesterton, Susan Foreman, Vicki Pallister, Ben Jackson, Jamie McCrimmon, Polly Wright, Bill Potts, Nardole, Black Guardian, Vislor Turlough, Bonnie (The Zygon Invasion), Kate Stewart, Petronella Osgood, Danny Pink, Frank Armitage, Great Intelligence, Paternoster Gang, Clive Jones, Francine Jones, Martha Jones, Tenth Doctor, Tish Jones, Cybermen, Davros, Dodo Chaplet, Steven Taylor, Donna Noble, Jack Harkness, Jackie Tyler, Luke Smith, Mickey Smith, Rose Tyler, Sylvia Noble, Wilfred Mott, Kamelion, Peri Brown, Harry Sullivan, John Benton, K9 Mark I, Leela, Romana I, Third Doctor, Leo Jones, Grace O'Brien, Graham O'Brien, Ryan Sinclair, Thirteenth Doctor, Yasmin Khan, Hakim Khan, Najia Khan, Sonya Khan, Harriet Jones, Ninth

## QR Algoritması Kullanarak Spektral Çizge Bölümleme

Doctor, Jake Simmonds, Pete Tyler (Pete's World), Victoria Waterfield, Zoe Heriot, Jo Grant, Mike Yates, The Brigadier, Liz Shaw, Monk (species), Ohila, Ood Sigma, Sixth Doctor, The Rani

Şekil 1 ile verilen ilişki çizgesi, oyuncuları gösteren düğümlerin diğer oyuncular ile w ağırlığı kez birlikte oynadığını gösterecek şekilde oluşturulmuş ve ağırlığı fazla olan ayrıtlar daha kalın olarak belirtilmiştir [12].



Şekil 1: Temizlenmiş verilerin ağırlıklı ilişki çizgesi

Şekil 1 ile verilen ilişki çizgesinin Laplacian matrisi Denklem 5 teki gibi hesaplandığında, Şekil 2 deki 90x90 boyutundaki matris elde edilir.







## Mücahit Sülü, Resul Daş

1.054093e-01	-4.619987e-02	1.606018e-02	3.773949e-02	-1.232141e-02	-7.622596e-03
1.619086e-01	-1.952787e-02	-4.597660e-02	-1.714107e-02	-1.521206e-02	4.506028e-03
3.495194e-04	-2.036769e-02	-4.926652e-02	3.873384e-02	-2.697107e-16	-9.727252e-05
3.856585e-03	1.777260e-02	5.414384e-02	5.086024e-04	9.974660e-18	-6.722053e-17
1.318390e-16	-2.112485e-02	1.786368e-02	2.820680e-02	-3.857684e-03	3.970917e-02
8.236011e-03	-1.043003e-03	-3.221791e-02	-6.731917e-18	-4.747378e-17	2.135484e-17
4.219579e-03	1.092434e-02	-3.773767e-04	-9.364315e-18	7.134620e-17	-6.372918e-16
5.342231e-18	-5.566974e-03	5.473404e-02	4.736564e-04	-2.409180e-03	2.539855e-03
1.498665e-17	-2.541955e-18	3.784398e-17	1.291367e-19	-9.707111e-18	-1.445207e-17
-8.252136e-18	-2.899542e-03	4.574246e-02	5.163993e-04	3.650649e-02	-2.460517e-18
-7.758347e-16	-8.283647e-17	-1.078719e-01	-1.099622e-04	7.535367e-02	-2.451067e-02
2.256952e-18	7.882018e-02	-1.931047e-02	-1.141856e-03	-7.937662e-02	-6.657660e-16
5.618327e-17	-6.862183e-17	3.989211e-17	-8.778140e-17	2.176594e-03	-9.492689e-02
1.051754e-03	4.057707e-03	-5.701786e-03	3.529843e-03	-4.189202e-02	3.930740e-03
8.883252e-03	9.129640e-01	-1.476338e-01	-1.828812e-01	5.242424e-02	6.252110e-02

İkinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektörleri, düğüm listemiz ile sıralı olarak eşleştirip pozitifleri bir grupta ve negatifleri diğer grupta toplayacak olursak, aşağıda listelendiği gibi, pozitifler ve negatifler grupları elde edilir.

Pozitifler grubu;

Adric,Fourth Doctor,K9 Mark II,Tegan Jovanka,Amy Pond,Dorium Maldovar,Rory Williams,Winston Churchill,Ashildr,Clara Oswald,Twelfth Doctor,Barbara Wright,Ian Chesterton,Vicki Pallister,Ben Jackson,Polly Wright,Bill Potts,Kate Stewart,Petronella Osgood,Danny Pink,Paternoster Gang,Francine Jones,Tenth Doctor,Tish Jones,Davros,Dodo Chaplet,Donna Noble,Jack Harkness,Sylvia Noble,Wilfred Mott,Kamelion,Romana I,Leo Jones,Grace O'Brien,Hakim Khan,Sonya Khan,Ninth Doctor,Pete Tyler (Pete's World),Victoria Waterfield,Jo Grant,The Brigadier,Liz Shaw,Monk (species),Sixth Doctor,The Rani

Negatifler grubu;

Fifth Doctor,Nyssa,Romana II,The Master,Alistair Gordon Lethbridge-Stewart,Sarah Jane Smith,Second Doctor,Eleventh Doctor,River Song,Silent,Weeping Angel,First Doctor,Susan Foreman,Jamie McCrimmon,Nardole,Black Guardian,Vislor Turlough,Bonnie (The Zygon Invasion),Frank Armitage,Great Intelligence,Clive Jones,Martha Jones,Cybermen,Steven Taylor,Jackie Tyler,Luke Smith,Mickey Smith,Rose Tyler,Peri Brown,Harry Sullivan,John Benton,K9 Mark I,Leela,Third Doctor,Graham O'Brien,Ryan Sinclair,Thirteenth Doctor,Yasmin Khan,Najia Khan,Harriet Jones,Jake Simmonds,Zoe Heriot,Mike Yates,Ohila,Ood Sigma

Bu ayrışma işlemine göre, yeni oluşan çizgemiz, pozitifler grubu yeşil renk ve negatifler grubu kırmızı renk ile işaretlenerek, Şekil 5'de verilmiştir.



## 5. Sonuç

Sayısal metotlar kullanılarak hesaplanan spektral çizge bölümlene algoritması çizge analizinde büyük kolaylık sağlamaktadır. Büyük verilerden elde edilen büyük matrisler ile yapılacak işlemler zor ve karmaşık gözükse de, günümüzde bilgisayarlar yardımı ile bu hesaplamalar rutin işlemlere dönüşmüştür. Uygulamamızda, 1963 yılından günümüze kadar 39 sezondur devam eden BBC yapımı Doctor Who televizyon dizisinden alınmış olan veriler kullanılmıştır. Bu televizyon dizisinden elde edilen Doctor Who basit çizgesinde, düğümler karakterlerin dizideki isimlerini göstermektedir.  $i, j$  düğümleri arasındaki  $w$  ağırlığı ise karakterlerin aynı bölümde  $w$  kez beraber oynadığı yönsüz bir ayrıtı temsil edecek şekilde oluşturulmuştur.  $w > 5$  olacak şekilde veri setinde filtreleme yapılmış, bunun sonucunda 90 adet düğüm ve 252 adet ayrıtı içeren bir veri seti elde edilmiştir. Bu veri setinde aynı bölümde beraber oynayan film oyuncularını, birlikte oynama yoğunluğuna göre iki gruba ayrılmak istense nasıl bir ayrışma olurdu sorusundan yola çıkılmıştır. Bu verilerdeki ağırlıklı ilişkiler, çizge ile modellenmiş ve bu çizgenin Laplace matrisi elde edilmiştir. QR algoritması ile bu Laplace matrisinin özdeğer ve özvektörleri elde edilerek ikinci en küçük özdeğere karşılık gelen özvektör (Fiedler vektörü) çizgenin iki parçaya bölünmesinde kullanılmıştır. Çizge bölmeleme algoritmaları, çizge analiz yöntemlerinden birisidir ve tüm ilişkiler veriler üzerinde analiz amaçlı kullanılır.[5]

## Kaynakça

- [1] N. Deo, *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Courier Dover Publications, 2017.
- [2] A. Kaveh, *Structural mechanics: graph and matrix methods*. Macmillan International Higher Education, 1992, vol. 6.
- [3] J. G. F. Francis, “The QR Transformation A Unitary Analogue to the LR Transformation—Part 1,” *The Computer Journal*, vol. 4, no. 3, pp. 265–271, Jan. 1961, ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/4.3.265. eprint: <https://academic.oup.com/comjnl/article-pdf/4/3/265/1080833/040265.pdf>. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1093/comjnl/4.3.265>.
- [4] A. Buluç, H. Meyerhenke, I. Safro, P. Sanders, and C. Schulz, “Recent advances in graph partitioning,” in *Algorithm Engineering: Selected Results and Surveys*, L. Kliemann and P. Sanders, Eds. Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 117–158, ISBN: 978-3-319-49487-6. DOI: 10.1007/978-3-319-49487-6\_4. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-49487-6\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-49487-6_4).
- [5] B. Hendrickson and R. Leland, “An improved spectral graph partitioning algorithm for mapping parallel computations,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 16, no. 2, pp. 452–469, 1995. DOI: 10.1137/0916028. eprint: <https://doi.org/10.1137/0916028>. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1137/0916028>.
- [6] T. Uçkan, C. Hark, E. Seyyarer, and A. Karcı, “Ağırlıklandırılmış çizgelerde tf-idf ve eigen ayrışımı kullanılarak metin sınıflandırma,” *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, vol. 8, no. 4, pp. 1349–1362, 2019, ISSN: 2147-3129. DOI: 10.17798/bitlisfen.531221.
- [7] R. Merris, “Laplacian matrices of graphs: A survey,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 197-198, pp. 143–176, 1994, ISSN: 0024-3795. DOI: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)90486-3](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90486-3). [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379594904863>.
- [8] A. Gusrialdi and Z. Qu, “Distributed estimation of all the eigenvalues and eigenvectors of matrices associated with strongly connected digraphs,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 1, no. 2, pp. 328–333, 2017. DOI: 10.1109/LCSYS.2017.2717799.

## QR Algoritması Kullanarak Spektral Çizge Bölümleme

- [9] R. T. Kobayashi and T. Abrão, “Stability analysis in gram-schmidt qr decomposition,” *IET Signal Processing*, vol. 10, no. 8, pp. 912–917, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1049/iet-spr.2016.0123>. eprint: <https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1049/iet-spr.2016.0123>. [Online]. Available: <https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1049/iet-spr.2016.0123>.
- [10] D. Watkins, “Understanding the qr algorithm, part ii,” *SIAM Review*, vol. 24, Oct. 1982. DOI: 10.1137/1024100.
- [11] M. Dileo. “Doctor Who dataset.” (), [Online]. Available: <https://www.kaggle.com/manueldileo/doctor-who-dataset>. (accessed: 06.06.2022).
- [12] M. Bastian, S. Heymann, and M. Jacomy, “Gephi: An open source software for exploring and manipulating networks,” 2009. [Online]. Available: <http://www.aaai.org/ocs/index.php/ICWSM/09/paper/view/154>.