

Polinomal Diferansiyel Quadrature (PDQ) Metodu ile Dikdörtgen Plakların Statik, Dinamik ve Burkulma Hesabı

Ömer CİVALEK *, Kasım Armağan KORKMAZ **, Fatih B. ALTUNSOY *

Özet

Çalışmada Homojen ve izotrop dikdörtgen plakların iki ve üç boyutlu eğilme, burkulma ve serbest titreşim analizi diferansiyel quadrature metoduyla yapılmıştır. Diferansiyel quadrature metodundaki ağırlık katsayıları; kuvvet, Chebyshev ve Lagrange polinomları ile hesaplanmıştır. Plak diferansiyel denklemleri yani yönetici denklemler (esas denklemler ve sınır koşulları) diferansiyel quadrature metodu vasıtasıyla çözüm bölgesindeki düğüm noktalarında bilinmeyen fonksiyon değerleri olarak tanımlanmış bir lineer denklem takımına veya standart özdeğer problemine indirgenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut değerler ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Sonuçlar mühendislik analizi kapsamında yeter hassasiyette bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Stabilite, Burkulma, Plak, Polinomal Diferansiyel Quadrature

Static, Dynamic and Buckling Analysis of Rectangular Plates by the Method of Polynomial based Differential Quadrature (PDQ)

Abstract

In the study, two and three-dimensional bending, buckling, and free vibration analysis of homogenous and isotropic rectangular plates are made by the method of differential quadrature. The weighting coefficients for differential quadrature are obtained using the power, Chebyshev and Lagrange polynomials. The governing differential equations (constitutive equations and boundary conditions) are reduced to a linear algebraic equations or a standard eigenvalue equation in terms of the unknown function values at the grid points in the field domain via differential quadrature method. The obtained results are then compared with the other results in the related literature. It is found that the obtained results are suitable in point of view the engineering analysis concept.

Key words: Stability, Buckling, Plate, Polynomial Differential Quadrature

1. GİRİŞ

Yaygın olarak bilinmektedir ki, mühendislikte ve diğer uygulamalı bilimlerde karşılaşılan gerçek fiziksel sistemleri tanımlayacak matematik modeller büyük bir çoğunlukla adi veya kısmi türevli bir diferansiyel denklem olmaktadır. Analizi yapan mühendis; uygun sınır

* Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, E-posta: civalek@yahoo.com

** Süleyman Demirel Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, E-posta: armagan@mmf.sdu.edu.tr

* Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, E-posta: fatihaltunsoy@hotmail.com

ve/veya başlangıç koşulları altında elde edilen bu türevsel denklemlerin çözümü ile ilgilenir. Kapalı matematik çözüm yani analitik çözüm çoğu uygulamalı bilim dalında ve mühendislik problemlerinde ulaşılmak istenen ideal çözümdür. Ancak analitik çözüm, problemlerin çeşitli karakteristikleri nedeniyle çoğu kez imkânsız olur. Bazen mevcut malzeme bileşenlerinin doğrusal olmayan bünye denklemleri, bazen problemin başlangıcında problemi gerçekleşmesi gereken başlangıç değerlerinin karmaşıklığı veya özdeş denklemlere götürmesi yada temas yani dokunma (sıvı-yapı, zemin-yapı etkileşim problemlerinde olduğu gibi) problemlerinde olduğu gibi sınır koşullarının lineer olmaması gibi nedenlerle kapalı matematik çözüm imkansız olup, tek çözüm sayısal yaklaşım kurmaktır. Mevcut bu sayısal çözümlerin biri birlerine ve problem tiplerine göre bazı üstünlükleri veya bazı olumsuzlukları olabilir. Yeter doğrulukta çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi önerilmiştir. Özellikle 1960 yıllarından sonra bilgisayar teknolojisinde ortaya çıkan gelişmeler sayısal yaklaşım yöntemlerinin gelişmesine katkı sağlamıştır. Bunlar arasında; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Galerkin vb. yöntemler genel olarak bilinen ve kullanılan metotlardır.

Daha hassas sonuçların daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilebilmesi ve böylelikle daha az bilgisayar ihtiyacı, sonuçların daha kısa sürede elde edilebilmesi yani daha ekonomik çözümler elde edilebilme imkânının araştırılması çalışmaları yeni yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu metotlar içinde, Richard Bellman tarafından geliştirilen [1,2] ve ilk defa “Differential Quadrature” terimi ile tanımlanan bu metot herhangi bir sistemin diferansiyel formda elde edilmiş yönetici denklemlerini mevcut sınır/başlangıç koşullarını da denklemlere dahil ederek çözümünü önerir. Metodun literatürdeki yapı mekaniği ve yapı mühendisliği alanındaki ilk uygulaması Bert ve ekibi tarafından giriş ve plakların titreşim hesabıdır [4]. Bununla birlikte Shu ve Richards tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadratur Metodu (GDQM) adıyla genel bir formülasyonun önerilmesinden sonra 1992 yılından itibaren diferansiyel quadratur metodu ve genelleştirilmiş diferansiyel quadratur metodu ile ilgili çalışmalar büyük bir hız kazanmıştır [31,24,26,36,37]. Bu tarihten sonra yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği gibi uygulamalı mekanik alanında diferansiyel quadratur metodu ve genelleştirilmiş diferansiyel quadratur metodu kullanılarak yapılmış pek çok çalışma mevcuttur [6,8,12,13,22]. Düzlem Plakların diferansiyel quadrature metoduyla çözümü yani iki boyutlu çözümü literatürde mevcuttur [9,17]. Ancak üç boyutlu analiz için sonlu elemanlar [11] ve diğer sayısal yaklaşım yöntemleri yaygın olarak kullanılsa da diferansiyel quadrature yöntemleriyle kısıtlı sayıda çalışma vardır [16,39]. Plakların klasik teorileri ile ilgili temel bilgiler Timoshenko ve Krieger [35] ayrıca Uğural [14] tarafından yazılmış kitaplara başvurulabilir. Bu çalışmalarda ağırlık katsayılarının hesabında geleneksel diferansiyel quadrature yönteminin önerdiği matrisler kullanılmıştır ve gerilme analizi yapılmıştır. Bu çalışmada bunlardan farklı olarak plakların deplasman değerleri hesaplanmış ve çeşitli tipteki polinomlar ağırlık matrislerinin hesabında kullanılmıştır. Hem iki ve hem üç boyutlu analiz yapılarak sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. DİFERANSİYEL QUADRATUR (DQ) METODU

Diferansiyel quadrature metodu; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıktaki sonuçlar elde etmek için daha az sayıda grid kullanan diferansiyel quadrature metodu; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Diferansiyel quadrature metodunun uygulanması sırasında ortaya çıkan en önemli kavram ağırlık katsayılarının hesabıdır. Bu amaçla test fonksiyonu olarak çeşitli tipte polinomlar ve fonksiyonlar önerilmiştir. Spektral

yöntemlere benzer olarak çeşitli tipteki orthogonal polinomların (Chebyshev, Lagrange, Legendre vb.) kullanıldığı Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ), kuvvet fonksiyonlarının kullanıldığı orijinal Diferansiyel Quadrature (DQ) veya son zamanlarda yapılan bazı çalışmalarda gördüğümüz harmonik fonksiyonların kullanılmasını öneren Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) metotları literatürde bilinen ve kullanılan yöntemlerdir. Kuvvet polinomlarının kullanılması ile tek boyutlu (Çizelge 1) bir $\psi(x)$ fonksiyonun birinci türevini $x_i (i=1,2,\dots,N)$ noktalarında N ayrık nokta için göz önüne alırsak i .nci ayrık nokta için birinci türev

$$\psi_x(x_i) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \psi(x_j) \quad ; \quad i = 1,2,\dots,N \quad (1)$$

olacaktır. Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları, $\Psi(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, ve A_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir.

2.1. Kuvvet Polinomları ile Ağırlık matrisinin hesaplanması

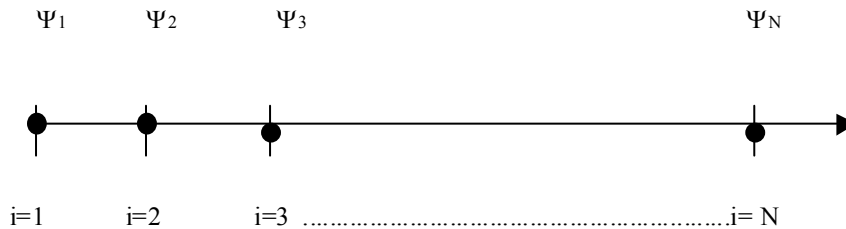
Kuvvet polinomları kullanımında (1) denklemi tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak (N-1) veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için;

$$\Psi_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1,2,\dots,N \quad (2)$$

verilen denklem (1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (3)$$

$i = 1,2,\dots,N$ ve $k = 1,2,\dots,N$ için



Şekil 1. Tek boyutlu sistem için tanımlanan grid(düğüm) noktaları

Denklem (3) aşağıdaki formda da verilebilir.

$$\left\{ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right\}_i = [A_{ij}] \left\{ \Psi(x) \right\}_j \quad (4)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla derecen türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için metot

$$\psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

olarak verilir. Burada B_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (5) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

$$\Psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} \Psi(x_k); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

olarak yazılır. Denklem (2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanırsa ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (7)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (3) denkleminde benzer yaklaşımla çözülür. Eğer spesifik yani özel olarak hesap yapılmak istenen bir nokta var ise bu noktaya göre düzenlenmiş eşit olmayan aralıklı grid nokta seçimi de benzer olarak yapılır.

Bununla birlikte N grid sayısı 22 den büyük olunca elde edilen yukarıdaki denklemde x in kuvvetlerinden oluşan matris bir Vandermonde matrisi olup sistemin çözümü tek olur ve matrisin tersini almak bir hayli güçleşir. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak Hamming'in önerdiği metotla [27] yada Vandermonde denklemleri için Bjorck ve Paryra'nın önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak çözülebilir [10]. İşte bu tekilliği gidermek ve ağırlık katsayılarının hesabında daha kullanışlı bir formülasyon elde edebilmek için bazı araştırmacılar [33,31] ağırlık katsayıları için analitik ifadeler elde etmişlerdir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , aşağıdaki formda hesaplanır

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj}; \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj}; \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (8a, 8b, 8c)$$

2.2. Lagrange polinomları ile ağırlık katsayı matrislerinin hesabı

Ağırlık katsayılarının hesaplanmasında yukarıda anlatılan kuvvet polinomları ve Legendre polinomlarının kullanılması bilinen ilk yöntemdir ve $N \leq 20$ olduğu durumda kuvvet polinomları uygun olup diğer durumlarda Legendre polinomları kullanılır. Benzer olarak Lagrange polinomları kullanılarak bu ağırlık katsayılarını elde edelim. Bağımlı u değişkeni

$$u(\bar{x}) = c_0 + c_1 \bar{x} + c_2 x^2 + \dots + c_{n+2} x^{n+2} \quad (9)$$

olsun. Burada x değişkeninin \bar{x} ile ifade edilmesinin nedeni $[-1,1]$ aralığında lokal koordinatlarda işlem yapılmasıdır. Global koordinatlardan lokal koordinatlara dönüşüm

$$\bar{x} = \frac{2}{(x_j - x_i)}(x - x_i) - 1$$

ile gerçekleştirilir. Burada x_i ve x_j global koordinat sisteminin uç noktalarıdır. Böylece (9) denklemi

$$u(\bar{x}) = [b]\{c\} \quad (10)$$

olarak yazılır. Burada

$$[b] = [1 \quad \bar{x} \quad \bar{x}^2 \quad \dots \quad \bar{x}^{n+1} \quad \bar{x}^{n+2}]$$

$$\{c\} = \left\{ c_0 \quad c_1 \quad c_2 \dots c_n \quad c_{n+1} \quad c_{n+2} \right\}^T$$

ile tanımlıdır. Böylece bağımlı değişken u

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u'_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n-1} \\ u_n \\ u'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_0^n & \bar{x}_0^{n+1} & \bar{x}_0^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & \cdot & \cdot & n\bar{x}_0^{n-1} & (n+1)\bar{x}_0^n & (n+2)\bar{x}_0^{n+1} \\ 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_1^n & \bar{x}_1^{n+1} & \bar{x}_1^{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_{n-1}^n & \bar{x}_{n-1}^{n+1} & \bar{x}_{n-1}^{n+2} \\ 1 & \bar{x}_n & \bar{x}_n^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_n^n & \bar{x}_n^{n+1} & \bar{x}_n^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \cdot & \cdot & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n & (n+2)\bar{x}_n^{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{Bmatrix}$$

yada

$$\{u\} = [N_0]\{c\} \quad (11)$$

olarak yazılır. Bu denklemde

$$\{\bar{u}\} = \left\{ u(\bar{x}) \quad u'(\bar{x}) \quad \dots \dots u(\bar{x}) \dots \dots u(\bar{x}) \quad u'(\bar{x}) \right\}^T \quad (12)$$

ve

$$[N] = \left\{ [b][b'] \dots \dots [b] \dots \dots [b'] \right\}^T \quad (13)$$

Denklem (11) den hareket ederek

$$\{c\} = [N_0]^{-1} \{u\} \quad (14)$$

yazabiliriz. Bu denklemdeki c değerleri (9) polinomundaki sabitlerdir. Denklem (11) ve (14) den

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{x}} \{\bar{u}\} &= \left(\frac{d}{d\bar{x}} [N] \right) [N_0]^{-1} \{u\} + [N] \frac{d}{d\bar{x}} \left([N_0]^{-1} \{u\} \right) \\ &= \left(\frac{d}{d\bar{x}} [N] \right) [N_0]^{-1} \{u\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece 1'den n ' e kadar belirli ayırık noktalar için

$$\frac{d}{d\bar{x}} \{u\} = [A] \{u\}$$

yazılır. Bu denklemde

$$[A] = [N'_0][N_0]^{-1}$$

ile tanımlı olup N_0 matrisinin türevi

$$[N'_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & \dots & n\bar{x}_0^{n-1} & (n+1)\bar{x}_0^n & (n+2)\bar{x}_0^{n+1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)\bar{x}_0^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_0^{n-1} & (n+2)(n+1)\bar{x}_0^n \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_1 & \dots & n\bar{x}_1^{n-1} & (n+1)\bar{x}_1^n & (n+2)\bar{x}_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \dots & \bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n & (n+2)\bar{x}_n^{n+1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)\bar{x}_n^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_n^{n-1} & (n+2)(n+1)\bar{x}_n^n \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bu matriste

$$x_i = \frac{2i-n}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formülüyle verilir. Böylece Lagrange polinomları kullanılarak elde edilen ağırlık katsayı matrisi birinci dereceden türev için

$$[A] \equiv \left[\frac{d}{dx} \right]$$

olur. İkinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevler için ağırlık matrisleri

$$[B] \equiv \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] = \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] = [A][A]$$

$$[C] \equiv \left[\frac{d^3}{dx^3} \right] = \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] = [A][A][A] \equiv [B][A]$$

$$[D] \equiv \left[\frac{d^4}{dx^4} \right] = [B][B] \equiv [C][A]$$

şeklinde hesaplanır.

2.3. Chebyshev Polinomları ile ağırlık matrisinin hesabı

Yukarıdaki işlemlere benzer olarak bağımlı değişken u

$$u(\bar{x}) = c_0 T_0(\bar{x}) + c_1 T_1(\bar{x}) + \dots + c_{n+1} T_{n+1}(\bar{x}) + c_{n+2} T_{n+2}(\bar{x}) \quad (15)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemdaki T_n 'ler birinci tür Chebyshev polinomları olup;

$$T_n(\bar{x}) = \cos(n \cos^{-1} \bar{x}) \quad (16)$$

ile tanımlıdır. Böylece bunların örneğin ilk dördü

$$T_0(\bar{x}) = 1, \quad T_1(\bar{x}) = \bar{x}, \quad T_2(\bar{x}) = -1 + 2\bar{x}^2 \quad \text{ve} \quad T_3(\bar{x}) = -3\bar{x} + 4\bar{x}^3$$

olarak tanımlıdır. Buradan ağırlık katsayısı matrisi Lagrange polinomlarında hesaplandığı gibi, örneğin birinci dereceden türev için ağırlık katsayısı matrisi;

$$[A] = [N'_0][N_0]^{-1}$$

verilebilir. Bu denklemdaki $[N_0]$ matrisi $T_n(\bar{x})$ lerden oluşan

$$[N'_0] = \begin{bmatrix} T_0(\bar{x}_0) & T_1(\bar{x}_0) & \dots & \dots & T_{n+1}(\bar{x}_0) & T_{n+2}(\bar{x}_0) \\ T'_0(\bar{x}_0) & T'_1(\bar{x}_0) & \dots & \dots & T'_{n+1}(\bar{x}_0) & T'_{n+2}(\bar{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_0(\bar{x}_n) & T_1(\bar{x}_n) & \dots & \dots & T_{n+1}(\bar{x}_n) & T_{n+2}(\bar{x}_n) \\ T'_0(\bar{x}_n) & T'_1(\bar{x}_n) & \dots & \dots & T'_{n+1}(\bar{x}_n) & T'_{n+2}(\bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

ve

$$[N'_0] = \frac{d}{dx} [N_0]$$

2.4. Düğüm (Grid) Noktaları Sayısı Ve Seçimi

Diferansiyel quadrature metodunda çözümün hassasiyeti bazı problem türlerinde sınır koşullarına bağlı olsa da (sınır değer problemlerinde) genelde bu hassasiyet düğüm (grid) noktalarının seçimine ve sayısına bağlıdır. Daha önce yapılan çalışmalarda gösterilmiştir ki; lineer türden denklemler ve homojen sınır koşullarına sahip problemlerde eşit aralıklı seçilen düğüm noktaları çözüm hassasiyeti açısından yeterlidir.

Bazı durumlarda ise örnek noktaların sayısı verilen bağıntıların performansında yani ağırlık katsayılarının hesabında etkili değildir. Hesap performansını geliştirmek açısından önemlidir. Bundan başka, bazı durumlarda bu noktalar çözümün doğruluğunu

etkileyebilmektedir. Örneğin eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir, ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı bazı tür problemlerde azalır bazılarında artar. Grid noktalarının seçimi ile ilgili ayrıntılı bilgi Striz ve arkadaşları [34], Bert ve Malik [5], Jang ve diğ.[28] ve Du ve diğ. [25] nin çalışmalarında bulunabilir. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metotlar bu kısımda sırasıyla takdim edilecektir.

a) Her doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen grid dağılımı.

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}; \quad y_j = \frac{j-1}{N_y-1}; \quad z_k = \frac{k-1}{N_z-1} \quad (17a,17b,17c)$$

$$i = 1,2,\dots,N_x; \quad j = 1,2,\dots,N_y; \quad k = 1,2,\dots,N_z$$

olarak verilir.

b) Sınıra yakın noktalar için yani bitişik noktalar için bilinen çok küçük değerler atanarak işlem yapılabilir. Örneğin eşit ve eşit olmayan aralıklı δ bitişik (adjacent) noktalı örnekleme modeli aşağıda tanımlanmıştır.

i) eşit aralıklı bitişik- δ nokta dağılımı

$$x_1=0, \quad x_2=\delta, \quad x_{i-1}=1-\delta \quad \text{ve} \quad x_i=1 \quad (18a)$$

$$y_1=0, \quad y_2=\delta, \quad y_{j-1}=1-\delta \quad \text{ve} \quad y_j=1 \quad (18b)$$

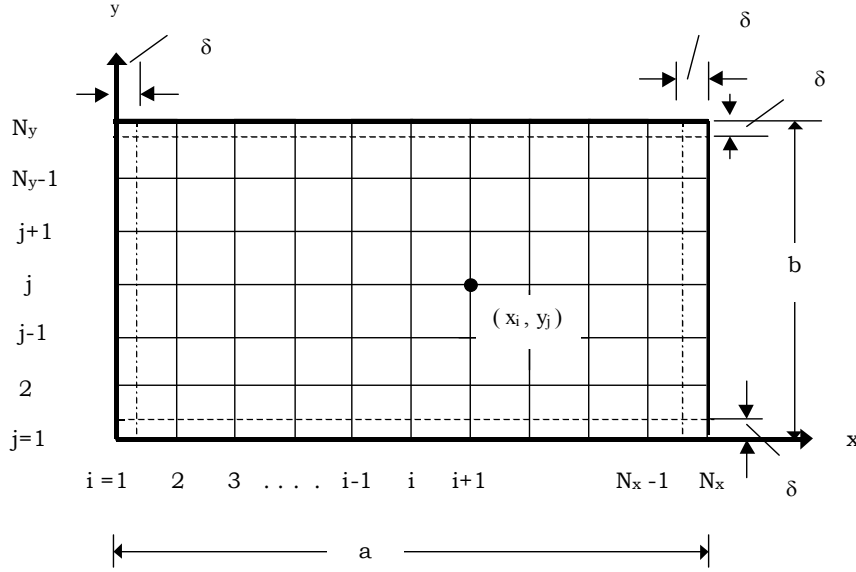
$$z_1=0, \quad z_2=\delta, \quad z_{k-1}=1-\delta \quad \text{ve} \quad z_k=1 \quad (18c)$$

olmak üzere diğer noktalar için yani sınıra yakın olmayan noktalar için

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-3}; \quad y_j = \frac{j-1}{N_y-3}; \quad z_k = \frac{k-1}{N_z-3} \quad (18d, 18e, 18f)$$

$$i = 3,4,\dots,(N_x-2); \quad j = 3,4,\dots,(N_y-2) \quad \text{ve} \quad k = 3,4,\dots,(N_z-2)$$

şeklinde olur. Burada δ değeri çok küçük bir değer olup sınırın hemen bitişik komşuluğundadır. Pek çok uygulamada genel olarak $\delta \approx 10^{-5}$ alınır. Bu teknik kiriş ve plak problemlerinde ankastre mesnet ve basit mesnet gibi çift sınır koşulu olan uygulamalarda iyi sonuç verir. Yani her bir mesnette iki sınır koşulu olup toplam dört denklem elde edilir. Bu sınır koşullarının esas yönetici denklem ile dikkate alınması sırasında teknik uygundur. Örnek olarak plağın iki boyutu için bu tarz gösterim Çizelge 2’de verilmiştir.



Şekil 2. İki boyutlu bölge için δ bitişik noktalı quadrature düğüm noktaları

3. HOMOJEN İZOTROP DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÜÇ BOYUTLU HESABI

En genel anlamda, mühendislik problemleri, süreksiz ve sürekli ortam problemleri olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel veya integral denklem veya denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği halde, serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü lineer denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir. Sonsuz serbestlik dereceli sistemlerinin çözümünde çeşitli matematik güçlükler ortaya çıkmakta buna karşın süreksiz ortam problemlerinin çözümünde gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi artmaktadır. Bunlardan başka mühendislik problemleri evrensel bir yaklaşımla; kararlı durum problemlerini içeren denge problemleri, kararlı durum problemlerindeki bazı parametrelerin kritik değerlerinin bulunmasını gerektiren özdeğer problemleri ve başlangıç değer formundaki problemleri içeren propagasyon problemleri olarak üç temel gruba da ayırmak mümkündür [3]. Bu tarz bir sınıflandırmada da elde edilen denklem; kapalı yada açık sınır ve/veya başlangıç değerine sahip kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklem yada lineer bir denklem takımı olarak elde edilir.

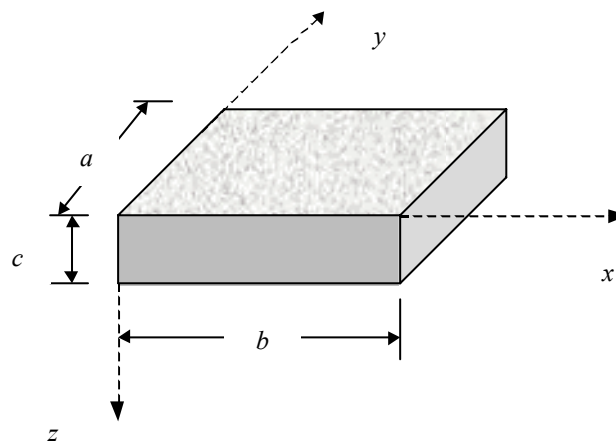
Yapılan modellemenin gerçek modeli yansıtıp yansıtması, gerçek fiziksel olay ile uyumluluk derecesiyle ölçülür. Bu modellerin büyük bir çoğunluğu, sınır değer formundaki diferansiyel denklemlerdir. Bu matematik denklemlerin fiziksel modele en yakın sunuş biçimi ise varyasyonel problemlerdir. Giriş verileri üzerine konulan süreklilik ve türevlenebilirlik koşulları açısından, varyasyonel problem kendi özdeşi olan sınır değer problemiyle karşılaştırıldığında, uygulama alanı daha geniş olan problemler sınıfına hitap eder. Matematik modelleme işleminin, modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması, hesaplayıcıya tanıtımı uygun olan ayrık modelin oluşturulmasıdır. Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık problemin bilgisayarda çözülmesi açısından en kapsamlı ve bilinen yöntem Sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden başlıca ayırt edici özelliği, sonlu elemanlar yöntemi sınır değer problemini değil varyasyonel problemi temel alır.

Lineer bir diferansiyel denklem takımını sağlayan fonksiyonların bir bölgedeki değerleri tayin edilirken, bazı matematik güçlüklerle karşılaşılır. Bunun için bu hallerde, önce bu fonksiyonların verilen bölgenin sonlu uzunluktaki bazı noktalarına ait değerleri aranır. Daha sonra, bu değerler kullanılarak diğer bilinmeyen noktalardaki değerler elde edilir. Bu şekilde sürekli bir ortam yerine, cebirsel bir denklem takımının çözümünü gerektiren ayrık bir ortam alınmış olur. Hızlı ve yüksek kapasiteli hesaplayıcıların gelişmesi, ve kullanımının yaygınlaşması nedeniyle sürekli ortam yerine süreksiz ortam modeli üzerinden işlem yapmaya elverişli yöntemler artmıştır. Bu yöntemler içinde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar günümüzde yaygın olarak kullanılabilir. Karakteristik büyüklüklerin ortam içinde değişmesini ifade edebilmesi ve karmaşık sınır şartlarının çözüme katılabilmesine olanak vermesi bakımından sonlu elemanlar daha yaygındır.

Plakların üç boyutlu analizi onların sürekli ortam kabulüne göre çözümünü gerektirir. Sürekli ortamlar mekaniği ise; kütle dağılımı sürekli kabul edilebilen maddesel cisimlerin mekanik davranışlarını belirlemekle uğraşan bir bilim dalıdır [7]. Evrensel bir yaklaşımla; sürekli bir ortamın fiziksel davranışını ifade eden matematik denklemler yani yönetici denklemler; alan (divergence= field) denklemleri, gradient denklemleri, esas yada kurucu (constitutive) denklemler ve bunlara ilaveten sınır ve/veya başlangıç koşullarını tanımlayan denklemlerdir. Alan denklemleri denge yasalarının bir integral denklem aracılığıyla genel bir formda ifadesi ile verilebileceği gibi ayırt edilebilir veya kesin olarak tanımlanmış şartlar altında lokal (diferansiyel) formda da verilebilir. Esas denklemler; lokal olmayan esas davranışı içermeyen ve belirli kurallar ile değişmez (invariant) şartlar altında tanımlanmış bir türev formunda da verilebilir. Bunların dışında kalan esas denklemlerin hemen hepsi diferansiyel formda tanımlanırlar. Bununla birlikte esas denklemlerin; varyasyonel prensibin Euler-Lagrange denklemi olacak şekilde varyasyonel formda bir integral ve/veya türev denklem olarak da verilmesi literatürde bilinen bir tarzdır. Bütün bu integral, türev veya varyasyonel formlar pek tabii olarak eşdeğer olup her biri bir diğerinden elde edilebilecek şekilde uyumludur [23]. Ancak, bazı durumlarda probleme ait sadece fonksiyonel mevcut olabilir. Bir fiziksel olaya ait fonksiyonel belli ise bu olaya ait diferansiyel denklem ve sınır koşullarını hesaplamak mümkündür [29].

3.1. Üç boyutlu Doğrusal Statik Analiz

Çizelge 3'de geometrisi ve koordinat yönleri verilmiş dikdörtgen plağı göz önüne alalım.



Şekil 3. Plak için üç boyutlu temel koordinat sistemi ve ilgili doğrultudaki boyutlar

3.2. Temel Denge Denklemleri

3.2.1. Statik Hesap

Kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği elastik izotrop ve homojen bir dikdörtgen plak için üç boyutlu denge denklemleri

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0 \quad (21)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu denklemdeki u, v, w değişkenleri, sırasıyla x, y ve z doğrultusundaki deplasmanları ve ν ise Poisson oranını belirtir. Bu denklemleri boyutsuz formda elde etmek için ; $X=x/a, Y=y/b, Z=z/c; U=u/a, V=v/b, W=w/c$ olarak tanımladığımız değişkenleri denklemlere dahil edelim. Böylece denklem (19), (20) ve (21);

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) \frac{1}{a} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \frac{1}{a} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \frac{a}{b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \frac{a}{c^2} \right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} \right) \frac{1}{a} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Z} \right) \frac{1}{a} = 0 \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \frac{1}{b} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \frac{b}{a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \frac{1}{b} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \frac{b}{c^2} \right] + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right) \frac{1}{b} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} \right) \frac{1}{b} = 0 \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) \frac{1}{c} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \frac{c}{a^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \frac{c}{b^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \frac{1}{c} \right] + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z} \right) \frac{1}{c} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \right) \frac{1}{c} = 0 \quad (24)$$

olarak elde edilir. Benzer olarak gerilme-deplasman bağıntıları boyutsuz formda direkt olarak yazılırsa;

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial U}{\partial X} + \nu \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{a}{c} \nu \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \quad (25)$$

$$\sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial U}{\partial X} + (1-\nu) \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{a}{c} \nu \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \quad (26)$$

$$\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial U}{\partial X} + \nu \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{a}{c} (1-\nu) \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \quad (27)$$

$$\tau_{xy} = G \left[\frac{a}{b} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{b}{a} \frac{\partial V}{\partial X} \right] \quad (28)$$

$$\tau_{xz} = G \left[\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{a}{c} \frac{\partial U}{\partial Z} \right] \quad (29)$$

$$\tau_{yz} = G \left[\frac{b}{c} \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{a}{b} \frac{\partial W}{\partial Y} \right] \quad (30)$$

bağıntıları elde edilir. Elde edilen bu bağıntılara DQ formülleri tatbik edilirse sırasıyla (22), (23) ve (24) ile verilen denge denklemleri

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \sum_{l=1}^{N_x} B_{il}^x U_{ljk} + (1-2\nu) \left[\frac{1}{a} \sum_{l=1}^{N_x} B_{il}^x U_{ljk} + \frac{a}{b^2} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^y U_{imk} + \frac{a}{c^2} \sum_{n=1}^{N_z} B_{kn}^z U_{ijn} \right] \\ & + \frac{1}{a} \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{lmk} + \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ljn} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^y V_{imk} + (1-2\nu) \left[\frac{b}{a^2} \sum_{l=1}^{N_x} B_{il}^x V_{ljk} + \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^y V_{imk} + \frac{b}{c^2} \sum_{n=1}^{N_z} B_{kn}^z V_{ijn} \right] \\ & + \frac{1}{b} \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y U_{lmk} + \frac{a}{bc} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ljn} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a}{c^2} \sum_{n=1}^{N_z} B_{kn}^z W_{ijn} + (1-2\nu) \left[\frac{1}{a} \sum_{l=1}^{N_x} B_{il}^x W_{ljk} + \frac{a}{b^2} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^y W_{imk} + \frac{a}{c^2} \sum_{n=1}^{N_z} B_{kn}^z W_{ijn} \right] \\ & + \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z U_{lmk} + \frac{1}{c} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z V_{ljn} \end{aligned} \quad (33)$$

olarak yazılır. Benzer olarak gerilme-deplasman bağıntıları için tanımlı denklemlerin DQ analogları yazılırsa;

$$\sigma_x = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + \nu \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} \right] \quad (34)$$

$$\sigma_y = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[\nu \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + (1-\nu) \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} \right] \quad (35)$$

$$\sigma_z = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[\nu \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + \nu \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} (1-\nu) \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} \right] \quad (36)$$

olarak denklemler elde edilir.

3.2.2. Serbest Titreşim Hesabı

Statik analize benzer olarak kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği elastik izotrop ve homojen bir dikdörtgen plak için hareket denklemleri

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\rho(1-2\nu)}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (37)$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{\rho(1-2\nu)}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (38)$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{\rho(1-2\nu)}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (39)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu hareket denklemlerini serbest titreşim için

$$u(x,y,z,t) = u_j(x,y,z) e^{i \omega_j t}$$

$$v(x,y,z,t) = v_j(x,y,z) e^{i \omega_j t}$$

$$w(x,y,z,t) = w_j(x,y,z) e^{i \omega_j t}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon kabulü aşağıdaki şekilde zamandan bağımsız olarak ve $X=x/a$, $Y=y/b$, $Z=z/c$; $U=u/a$, $V=v/b$, $W=w/c$ için boyutsuz formda yazıp bazı düzenlemeler yapılmıca

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (1-2\nu) \left[\frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Z} \right] = \frac{\rho U a^2 (2\nu-1)}{G} \omega^2 \quad (40)$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + (1-2\nu) \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} \right] = \frac{\rho V b^2 (2\nu-1)}{G} \omega^2 \quad (41)$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} + (1-2\nu) \left[\frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \right] = \frac{\rho W c^2 (2\nu-1)}{G} \omega^2 \quad (42)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin DQ formunda ifadeleri sırasıyla;

$$2(1-\nu) \sum_{l=1}^{N_x} B_{il}^x U_{ljk} + (1-2\nu) \left[\frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^y U_{imk} + \frac{a^2}{c^2} \sum_{n=1}^{N_z} B_{kn}^z U_{ijn} \right] + \left[\sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{lmk} + \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ljn} \right] = \frac{\rho a^2 (2\nu-1)}{G} U_{ijk} \omega^2 \quad (43)$$

$$2(1-\nu) \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^y V_{imk} + (1-2\nu) \left[\frac{b^2}{a^2} \sum_{l=1}^{N_x} B_{il}^x V_{ljk} + \frac{b^2}{c^2} \sum_{n=1}^{N_z} B_{kn}^z V_{ijn} \right] + \left[\sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y U_{lmk} + \sum_{l=1}^{N_x} A_{jm}^y \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{imn} \right] = \frac{\rho b^2 (2\nu-1)}{G} V_{ijk} \omega^2 \quad (44)$$

$$2(1-\nu) \sum_{n=1}^{N_z} B_{kn}^z W_{ijn} + (1-2\nu) \left[\frac{c^2}{a^2} \sum_{l=1}^{N_x} B_{il}^x W_{ljk} + \frac{c^2}{b^2} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^y W_{imk} \right] + \left[\sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x \sum_{m=1}^{N_z} A_{kn}^z U_{ljn} + \sum_{l=1}^{N_x} A_{jm}^y \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z V_{imn} \right] = \frac{\rho c^2 (2\nu-1)}{G} W_{ijk} \omega^2 \quad (45)$$

ifadelerine ulaşılır.

3.2.3. Burkulma Analizi

En genel durum için yani her iki esas doğrultuda (x ve y doğrultularında) P_x ve P_y kuvvetlerinin etkimesi durumunda ilgili denklemler direkt olarak boyutsuz bir formda yazılırsa

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Z} \right) - \frac{2P_x}{E} (1-\nu)(1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{P_y}{P_x} \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right] = 0 \quad (46)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + (1-2\nu) \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} \right) - \frac{2P_x}{E} (1-\nu)(1-2\nu) \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{P_y}{P_x} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] = 0 \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right) + (1-2\nu) \left[\frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right] + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \right) - \frac{2P_x}{E} (1-\nu)(1-2\nu) \left[\frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{P_y}{P_x} \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right] = 0 \quad (48)$$

denklemleri elde edilir. DQ metodunun bu denklemlere tatbik edilmesi ile

$$\sum_{l=1}^{N_X} B_{il}^x U_{ljk} + (1-2\nu) \left[\sum_{l=1}^{N_X} B_{il}^x U_{ljk} + \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1}^{N_Y} B_{jm}^y U_{imk} + \frac{a^2}{c^2} \sum_{n=1}^{N_Z} B_{kn}^z U_{ijn} \right] + \sum_{l=1}^{N_X} A_{il}^x \sum_{m=1}^{N_Y} A_{jm}^y V_{lmk} + \sum_{l=1}^{N_X} A_{il}^x \sum_{n=1}^{N_Z} A_{kn}^z W_{ljn} - \frac{2P_x}{E} (1-\nu)(1-2\nu) \left[\sum_{l=1}^{N_X} B_{il}^x U_{ljk} + \frac{P_y}{P_x} \frac{a^2}{b^2} \sum_{l=1}^{N_Y} B_{jm}^y U_{imk} \right] = 0 \quad (49)$$

$$\sum_{m=1}^{N_Y} B_{jm}^y V_{imk} + (1-2\nu) \left[\frac{b^2}{a^2} \sum_{l=1}^{N_X} B_{il}^x V_{ljk} + \sum_{m=1}^{N_Y} B_{jm}^y V_{imk} + \frac{b^2}{c^2} \sum_{n=1}^{N_Z} B_{kn}^z V_{ijn} \right] + \sum_{l=1}^{N_X} A_{il}^x \sum_{m=1}^{N_Y} A_{jm}^y U_{lmk} + \sum_{m=1}^{N_Y} A_{jm}^y \sum_{n=1}^{N_Z} A_{kn}^z W_{imn} - \frac{2P_x}{E} (1-\nu)(1-2\nu) \left[\frac{b^2}{a^2} \sum_{l=1}^{N_X} B_{il}^x V_{ljk} + \frac{P_y}{P_x} \sum_{l=1}^{N_Y} B_{jm}^y V_{imk} \right] = 0 \quad (50)$$

$$\sum_{n=1}^{N_Z} B_{kn}^z W_{ijn} + (1-2\nu) \left[\frac{c^2}{a^2} \sum_{l=1}^{N_X} B_{il}^x W_{ljk} + \frac{c^2}{b^2} \sum_{m=1}^{N_Y} B_{jm}^y W_{imk} + \sum_{n=1}^{N_Z} B_{kn}^z W_{ijn} \right] + \sum_{l=1}^{N_X} A_{il}^x \sum_{n=1}^{N_Z} A_{kn}^z U_{ljn} + \sum_{m=1}^{N_Y} A_{jm}^y \sum_{n=1}^{N_Z} A_{kn}^z V_{imn} - \frac{2P_x}{E} (1-\nu)(1-2\nu) \left[\frac{c^2}{a^2} \sum_{l=1}^{N_X} B_{il}^x W_{ljk} + \frac{P_y}{P_x} \frac{c^2}{b^2} \sum_{l=1}^{N_Y} B_{jm}^y W_{imk} \right] = 0 \quad (51)$$

3.3. Sınır koşulları

i) Basit mesnet sınır koşulları (B)

$\sigma_x = 0$; $\nu = 0$; $w = 0$; $x = 0$ ve $x = a$ için

$\sigma_y = 0; u = 0; w = 0; y = 0$ ve $y = b$ için

ii) Ankastre mesnet sınır koşulları (A)

$u = 0; v = 0; w = 0; x = 0$ ve $x = a$ için ve $y = 0$ ve $y = b$ için

iii) Serbest kenar sınır koşulu (S)

$\sigma_x = 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; x = 0$ ve $x = a$ için

$\sigma_y = 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = 0; y = 0$ ve $y = b$ için

iv) Serbest yanal yüzey sınır koşulları

$\sigma_z = 0; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0; z = 0$ ve $z = c$ için

v) Simetrik yüklü yanal yüzey sınır koşulları

$\sigma_z = -\frac{q}{2}; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0; z = 0$ için

$\sigma_z = \frac{q}{2}; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0; z = c$ için

İlgili bağıntılar kullanılarak bu sınır koşulları boyutuz formda

a) Basit mesnet

$$(1-v)\frac{\partial U}{\partial X} + v\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{a}{c}v\frac{\partial W}{\partial Z} = 0; V = 0, \text{ ve } W = 0 \quad X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için}$$

b) Ankastre mesnet

$$U = 0; V = 0; W = 0; X = 0 \text{ ve } 1; Y = 0 \text{ ve } 1$$

c) serbest kenar (S)

$$(1-v)\frac{\partial U}{\partial X} + v\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{a}{c}v\frac{\partial W}{\partial Z} = 0; \quad X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için}$$

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} = 0; \quad X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için}$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{a}{c}\frac{\partial U}{\partial Z} = 0; \quad X = 0 \text{ ve } X = 1 \text{ için}$$

d) Serbest yanal yüzey sınır koşulları

$$v \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{a}{c} (1-v) \frac{\partial W}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{a}{c} \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} = 0$$

$$\frac{b}{c} \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{c}{b} \frac{\partial W}{\partial Y} = 0$$

e) simetrik yüklü yanal yüzey sınır koşulları (üst)

$$\sigma_Z = v \frac{2G}{(1-2\nu)} \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{2G}{(1-2\nu)} \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{a}{c} (1-\nu) \frac{2G}{(1-2\nu)} \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{q}{2}$$

$$\tau_{XZ} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{a}{c} \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

$$\tau_{YZ} = \frac{b}{c} \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{a}{b} \frac{\partial W}{\partial Y} = 0$$

şeklindedir. Bu denklemlerin DQ formları sırasıyla;

Basit mesnet için(B);

$$(1-\nu) \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + \nu \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} = 0 \quad (52a)$$

$$V_{ijk} = 0 \quad (52b)$$

$$W_{ijk} = 0 \quad (52c)$$

ankastre mesnet için(A);

$$U_{ijk} = 0; V_{ijk} = 0 \quad W_{ijk} = 0 \quad (53a,53b,53c)$$

serbest mesnet için (S);

$$(1-\nu) \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + \nu \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} = 0 \quad (54a)$$

$$\frac{b^2}{a^2} \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x V_{ljk} + \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y U_{imk} = 0 \quad (54b)$$

$$\sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x W_{ljk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z U_{ijn} = 0 \quad (54c)$$

serbest yanal yüzey sınır koşulu için

$$v \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + v \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} (1-v) \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} = 0 \quad (55a)$$

$$\sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x W_{ljk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z U_{ijn} = 0 \quad (55b)$$

$$\frac{b}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z V_{ijn} + \frac{c}{b} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y W_{imk} = 0 \quad (55c)$$

simetrik yüklü yanal yüzey sınır koşulları (üst; Z = 0)

$$v \frac{2G}{(1-2\nu)} \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + v \frac{2G}{(1-2\nu)} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} (1-v) \frac{2G}{(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} = -\frac{q}{2} \quad (56a)$$

$$\sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x W_{ljk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z U_{ijn} = 0 \quad ; \quad k=1 \text{ için} \quad (56b)$$

$$\frac{b}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z V_{ijn} + \frac{a}{b} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y W_{imk} = 0 \quad ; \quad k=1 \text{ için} \quad (56c)$$

ve simetrik yüklü yanal yüzey sınır koşulları (alt; Z = 1)

$$v \frac{2G}{(1-2\nu)} \sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x U_{ljk} + v \frac{2G}{(1-2\nu)} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y V_{imk} + \frac{a}{c} (1-v) \frac{2G}{(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z W_{ijn} = -\frac{q}{2} \quad (57a)$$

$$\sum_{l=1}^{N_x} A_{il}^x W_{ljk} + \frac{a}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z U_{ijn} = 0 \quad ; \quad k=N_z \text{ için} \quad (57b)$$

$$\frac{b}{c} \sum_{n=1}^{N_z} A_{kn}^z V_{ijn} + \frac{a}{b} \sum_{m=1}^{N_y} A_{jm}^y W_{imk} = 0 \quad ; \quad k=N_z \text{ için} \quad (57c)$$

4. Plakların iki boyutlu hesabı (İnce plak teorisi)

İnce, dikdörtgen bir plağın titreşim, eğilme ve burkulmasını yöneten diferansiyel denklemler sırasıyla;

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \rho c \omega^2 \frac{u}{D} \quad (58)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (59)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = P_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (60)$$

olarak verilirler. Burada; u plağın orta düzleminin deplasmanı, ρ plak malzemesinin kütle yoğunluğu, c plağın üniform kalınlığı, ω doğal frekans, D plağın eğilme rijitliği olup, $D = Ec^3 / 12(1-\nu^2)$ ile verilir, ν Poisson oranı, E malzeme elastisite modülüdür. Denklemler boyutsuz formda

$$\frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + 2k^2 \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial Y^2} + k^4 \frac{\partial^4 U}{\partial Y^4} = \Omega^2 U \quad (61)$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + 2k^2 \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial Y^2} + k^4 \frac{\partial^4 U}{\partial Y^4} = \frac{q a^4}{D} \quad (62)$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + 2k^2 \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial Y^2} + k^4 \frac{\partial^4 U}{\partial Y^4} = P_x \frac{a^2}{D} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (63)$$

şeklinde yazılır. Burada U titreşimin boyutsuz mod fonksiyonu, Ω boyutsuz frekans olup, $\Omega = \omega^2 a^4 \rho c / D$ ile verilir, $X = x / a$ ve $Y = y / b$ boyutsuz koordinatlar, a ve b plağın x ve y doğrultusundaki boyutları, $k = a / b$ plak kenarlarının oranı ve P_x plak kenarlarına etkiyen aksenal basınç yüküdür. Yukarıda boyutsuz formda verilmiş olan (61), (62) ve (63) denklemlerine DQ metodu uygulanarak

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} U_{kj} + 2k^2 \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} B_{ik} B_{jm} U_{km} + k^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} U_{ik} = \Omega^2 U_{ij} \quad (64)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} U_{kj} + 2k^2 \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} B_{ik} B_{jm} U_{km} + k^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} U_{ik} = \frac{q a^4}{D} \quad (65)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} U_{kj} + 2k^2 \sum_{k=1}^{N_x} B_{jm} \sum_{m=1}^{N_y} B_{ik} U_{km} + k^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} U_{ik} = a^2 \frac{P_x}{D} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} U_{kj} \quad (66)$$

Burada N_x ve N_y sırasıyla x ve y doğrultularındaki grid noktaları (Çizelge 1), ve D_{ik} , D_{ik} , B_{ik} , B_{jm} değerleri ise diferansiyel quadrature yaklaşımı için dördüncü ve ikinci dereceden ağırlık katsayılarıdır. Verilen bu (64), (65), ve (66) denklemleri dördüncü dereceden olup, stabilite, eğilme ve titreşim denklemlerine ilaveten her bir kenar için ilave iki sınır şartı yazılmalıdır.

4.1. Sınır Koşulları

i) Dört kenarı tutulmuş (A-A-A-A) : Deplasmanlar ve dönmelerin kenarlarda sıfır olması şartından

$$U(X,0) = U(X,1) = 0 \quad \text{ve} \quad U(0,Y) = U(1,Y) = 0 \quad (67a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(X,0) = \frac{\partial U}{\partial Y}(X,1) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial U}{\partial X}(0,Y) = \frac{\partial U}{\partial X}(1,Y) = 0 \quad (67b)$$

yazılır. DQ metodu bu sınır koşullarına uygulanırsa

$$U_{lj} = U_{Nj} = 0 \quad \text{ve} \quad U_{il} = U_{iN} = 0 \quad (68a)$$

$$U_{lj} = U_{Nj} = 0 \quad \text{ve} \quad U_{il} = U_{iN} = 0 \quad (68b)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} A_{1k} U_{kj} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{Nk} U_{kj} = 0 \quad (68c)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} A_{1k} U_{ik} = \sum_{k=1}^{N_y} A_{Nk} U_{ik} = 0 \quad (68d)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve} \quad j = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad \text{için}$$

ii) Dört kenar basit mesnetli (B-B-B-B) : Deplasman ve momentlerin kenarlarda sıfır olması şartından

$$U(X,0) = U(X,1) = 0 \quad \text{ve} \quad U(0,Y) = U(1,Y) = 0 \quad (69a)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}(X,0) = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}(X,1) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(0,Y) = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(1,Y) = 0 \quad (69b)$$

elde edilir. DQ metodu bu sınır koşulları için tekrar uygulanırsa

$$U_{lj} = U_{Nj} = 0 \quad \text{ve} \quad U_{il} = U_{iN} = 0 \quad (70a)$$

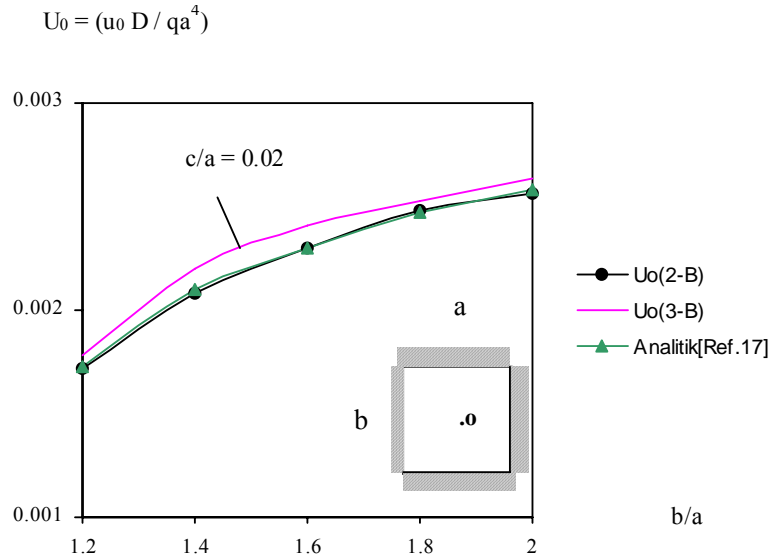
$$U_{lj} = U_{Nj} = 0 \quad \text{ve} \quad U_{il} = U_{iN} = 0 \quad (70b)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} B_{1k} U_{kj} = \sum_{k=1}^{N_x} B_{Nk} U_{kj} = 0 \quad (70c)$$

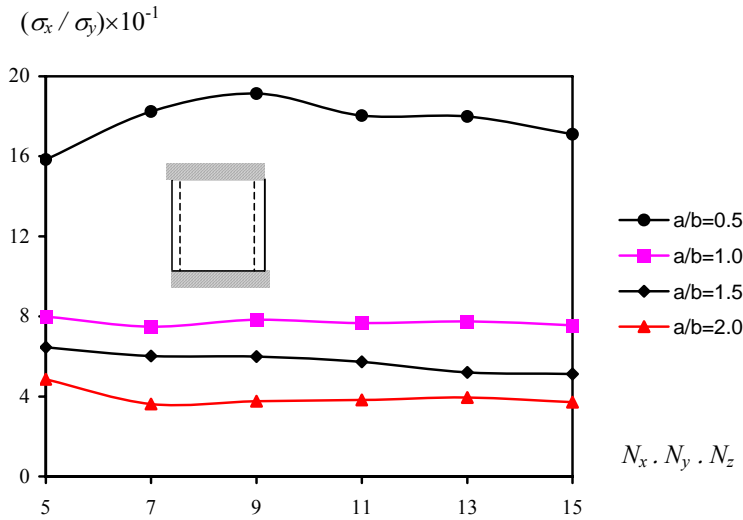
$$\sum_{k=1}^{N_y} B_{1k} U_{ik} = \sum_{k=1}^{N_y} B_{Nk} U_{ik} = 0 \quad (70d)$$

5. Sayısal uygulamalar

Bu bölümde; yukarıda iki ve üç boyutlu durumlar için verilmiş olan ve dikdörtgen plakların statik, serbest titreşim, burkulma olaylarını yöneten diferansiyel denklemler ve mevcut sınır koşulları kullanılarak sayısal uygulamalar yapılacaktır. Göz önüne alınan plak mesnet koşulları için mevcut denklemler ile birlikte problem statik hesap için bir lineer denklem takımının çözümüne indirgenir. Dört kenarından ankastre tutulmuş (A-A-A-A) plak için orta nokta deplasmanı iki ve üç boyutlu durum için hesaplanmıştır (Şekil 4). Çözümde Poisson oranı (ν) 0.3 olarak alınmıştır. Üç boyutlu çözüm (3-B) diğer iki boyutlu ve Du ve diğ. [17] tarafından verilen analitik sonuçtan biraz farklıdır. Plak kalınlığının plak boyuta oranı (c/a) artınca bu fark daha belirgin olmaktadır.



Şekil 4. Dikdörtgen plak orta nokta boyutsuz deplasmanı için iki ve üç boyutlu çözüm



Şekil 5. Farklı grid (düğüm) nokta sayıları için gerilme oranları
($\nu = 0.3$; $c/a = 0.1$; B-A-B-A dikdörtgen plak)

Burkulma yükünü bulmak için üç boyutlu çözümde (49), (50) ve (51) denklemleri ve iki boyutlu çözüm için (66) denklemini kullanılır. Plak mesnet koşulları için yazılmış sınır koşul denklemleri ile birlikte problem

$$([G] - \lambda^2[B])U = 0 \quad (73)$$

şeklinde bir özdeğer problemine indirgenir. Bu denklemdeki \mathbf{G} ve \mathbf{B} matrisleri burkulma için yazılan yönetici denklemlerden (49,50,51) ve göz önüne alınan sınır koşulları (mesnet koşulları) için yazılan denklemlerden elde edilir. Bu formülde ise deplasman vektörü olup $U = [U_{ijk} \ V_{ijk} \ W_{ijk}]^T$ şeklinde tanımlıdır. Bu problemde dört kenarı basit mesnetli olarak dikkate alınan plak için (52a,52b ve 52c) denklemleri kullanılmıştır. Bunlardan \mathbf{G} matrisini teşkil edenler yönetici (governing) denklemlerden ve \mathbf{B} matrisi sınır (boundary) koşullarıyla ilgili denklemlerden elde edilir. Elde edilen sonuçlar Tablo 1’de sunulmuştur. Literatürde c/b nin 0.05 olması durumu için Mindlin plak teorisi ile çözümler mevcuttur [38]. Bunlar da karşılaştırma amacıyla DQ ve PDQ ile birlikte sunulmuştur. Çizelgede P_x plağa x doğrultusunda etkiyen basınç kuvvetini D ise plak eğilme rijitliğini gösterir. Plak kalınlığı c olmak üzere bu eğilme rijitliği, $D = Ec^3/12(1-\nu^2)$ ile tanımlıdır.

Tablo 1. Dört Kenarı basit mesnetli (B-B-B-B) dikdörtgen plak için burkulma faktörü
 $\lambda = (P_x b^2 c) / D$

c/b	a/b	PDQ (13×13×13) Bu çalışma	DQ (11×11×11) [39]	Mindlin Plak Çözümü [38]
0.05	0.5	59.118	45.874	59.560
	1.0	38.802	35.913	38.922
0.20	0.5	40.450	-	-
	1.0	31.796	-	-

Plak serbest titreşim hesabı hem iki hem de üç boyutlu durum için yapılmıştır. Titreşim hesabı için dört kenarından Ankastre bağlı plak (A-A-A-A) mesnet koşulları dikkate alınmıştır. Üç boyutlu hesap için $c/b = 0.01$ olarak çözümlere dahil edilmiştir. Bu durumda burkulma hesabına benzer olarak problem bir özdeğer problemine indirgenir. Böylece çözüm

$$([G] - \Omega[B])U = 0 \quad (74)$$

şeklinde özdeğer problemine indirgenir. Burada Ω boyutsuz frekans değeri olup $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho c/D}$ şeklinde verilir. Bu formülde ω titreşim frekansı, ρ malzemenin kütle yoğunluğudur. İki boyutlu durum için serbest titreşim problemi

$$\begin{bmatrix} [S_{bb}] & [S_{bd}] \\ [S_{db}] & [S_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ U_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \Omega^2 \{u_d\} \end{Bmatrix} \quad (75)$$

şeklinde tanımlanır. Bazı düzenlemeler ve matris işlemlerinden sonra denklem

$$([S] - \Omega^2[I])\{u_d\} = 0 \quad (76)$$

halini alır. İki ve üç boyutlu plak çözümleri ile elde edilen ilk üç frekans Tablo 2'de Leissa tarafından verilen kesin sonuçlar ile birlikte sunulmuştur.

Tablo 2. Plak serbest titreşim hesabı için iki ve üç boyutlu analiz sonuçları (A-A-A-A Plak, Üç boyutlu çözüm için $c/b = 1/100$)

a/b = 1.0	Ω_1	Ω_2	Ω_3
2-B-PDQ (5x5) Eşit aralıklı grid	35.40	71.47	72.53
2-B-PDQ (7x7) Bitişik - δ noktalı grid	36.17	73.25	75.90
3-B-PDQ (5x5) Eşit aralıklı grid	36.12	72.47	73.96
3-B-PDQ (7x7) Bitişik - δ noktalı grid	35.05	73.54	73.12
Kesin değer Leissa [15]	35.99	73.41	73.41

$$(\text{Boyutsuz frekans} = \Omega^2 = \omega^2 a^4 \rho c/D)$$

6. Sonuç ve Tartışma

Çalışmada polinomal diferansiyel quadrature metodu dikdörtgen plakların iki ve üç boyutlu teorileri dikkate alınarak eğilme, burkulma ve serbest titreşim hesabına uygulanmıştır. Bu çalışmada ağırlık katsayılarının hesabında Chebysev ve Lagrange polinomları kullanılmıştır. Klasik ortogonal polinom kapsamında kalan diğer polinomlarda DQ metodlarında kullanılabilir yapıdadır. PDQ metodu daha az düğüm nokta sayısı ile daha hassas sonuçlar vermektedir. DQ metodu ise daha doğru sonuçlar için daha fazla sayıda düğüm noktasına ihtiyaç duymakta, ancak daha çok düğüm sayısı kullanılınca hesap süresi artmaktadır. PDQ metodu ile ağırlık katsayılarının hesabı cebirik bir formülasyon ile yapılabilen ve üniform

yâda ünüform olmayan grid dağılımı için uygun olabilmektedir. Sonuçlardan görüleceği üzere plakların iki ve üç boyutlu teoriye göre analizleri DQ yöntemleriyle ekstra bir güçlük doğurmamakta üç boyutlu analizde daha çok sayıda denklem olduğundan sadece çözüm süresi birkaç saniye artmaktadır. Sonuçların yaklaşıklığı, gerektirdiği hesaplayıcı kapasitesi ve uygulama alanının çeşitliliği dikkate alınca DQ metotlarının ve özellikle PDQ metodunun çeşitli tip yapıların statik, dinamik ve burkulma hesaplarında kullanılacak etkili bir metot olacağı ve bu işlemlerin lineer olmayan analiz için geliştirilebileceği söylenebilir.

Kaynaklar

- [1] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis and Application* 1971; 34: 235-238.
- [2] Bellman R, Kashef, BG, Casti, J. Differential Quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equation. *Journal of Computational Physics* 1972; 10: 40-52.
- [3] Crandall, S.H., *Engineering Analysis, A Survey of Numerical Procedures*, McGraw-Hill, Book Company, New York, 1956.
- [4] Bert CW, Jang SK, Striz AG. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. *AIAA Journal* 1987; 26 (5): 612-618.
- [5] Bert CW, Wang Z, Striz AG. Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates. *International Journal of Solids and Structure* 1993;30(13):1737-1744.
- [6] Bert CW, Malik M. Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: a semi- analytical approach. *Journal of Sound and Vibration* 1996;190(1): 41-63.
- [7] Şuhubi, E.S., *Sürekli Ortamlar Mekanikliği-Giriş*, İ.T.Ü. Yayınları, 1993, İstanbul.
- [8] Bert CW, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review. *Applied Mechanics Review* 1996;49(1):1-28.
- [9] Bert CW, Wang Z, Striz AG. Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica* 1994;102:11-24.
- [10] Björck A, and Pereyra V. Solution of vandermonde system of equations. *Mathematical computing* 1970; 24: 893-903.
- [11] Civalek Ö. *Finite Element analysis of plates and shells*. Elazığ: Fırat University, 1998(in Turkish).
- [12] Civalek Ö. Static, dynamic and buckling analysis of elastic bars using differential quadrature, XVI. National Technical Engineering Symposium. Ankara: METU, 2001.
- [13] Civalek, Ö., Çatal, H.H., *Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Stabilite ve Titreşim Analizi*, IMO Teknik Dergi, 2003; Cilt 14, Sayı 1, 2835-2852.
- [14] Ugural AC. *Stress in plates and shells*. Second Edition, Mc Graw Hill Companies, 1999.
- [15] Leissa AW. The free vibration of rectangular plates. *J. Sound and Vibration*,1973;31: 257-93.
- [16] Liew KM, Teo TM, and Han JB. Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for three- dimensional vibration analysis of rectangular plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999; 45: 1831-1848.
- [17] Du H, Lim MK, Lin, RM. Application of generalized differential quadrature method to structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1994; 37:1881-1896.
- [18] Shu C, Xue H. Explicit computations of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature. *Journal of Sound and Vibration* 1997; 204(3): 549-555.

- [19] Striz AG, Wang X, and Bert CW. Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica* 1995;111:85-94.
- [20] Civan F, Sliepcevich CM. Application of differential quadrature to transport process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 1983; 93: 206-221.
- [21] Civan F, Sliepcevich CM. Differential quadrature for multi dimensional problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 1984;101: 423-443.
- [22] Civan F, Sliepcevich CM. Solution of the Poisson equation by differential quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1983; 19: 711-724.
- [23] Altay Aşkar, G., Dökmeci, M.C., Some Variational Principles for linear coupled thermoelasticity, *Int. J. Solids and Structures*, 33(26); 3937-3948, 1996.
- [24] Du H, Lim MK, Lin RM. Application of generalized differential quadrature method to vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration* 1995;181(2):279-293.
- [25] Du H, Liew KM, Lim MK. Generalized differential quadrature method for buckling analysis. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 1996; 22(2):95-100.
- [26] Farsa J, Kukreti AR, Bert CW. Fundamental frequency analysis of laminated rectangular plates by differential quadrature method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1993;36: 2341-2356.
- [27] Hamming RW. *Numerical methods for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [28] Jang SK, Bert CW, Striz AG. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1989;28: 561-77.
- [29] Aköz, Y., Değişim (Varyasyon Yöntemleri), Şekil Değiştirebilen Cisimler Mekaniği, K.T.Ü., Trabzon, 1987.
- [30] Sherbourne AN, Pandey MD. Differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates. *Computers & Structures* 1991;40(4):903-913.
- [31] Shu C, Richards BE. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier -Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 1992;15:791-798.
- [32] Shu C, Chew YT. On the equivalence of generalized differential quadrature and highest order finite difference scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998;155: 249-260.
- [33] Quan JR, Chang CT. New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I analysis. *Computers in Chemical Engineering* 1989;13(7):779-788.
- [34] Striz AG, Chen W, Bert CW. Static analysis of structures by the quadrature element method. *International Journal of Solids and Structures* 1994;31(20): 2807-2818.
- [35] Timoshenko S, and Krieger WS. *Theory of plates and shells*. New York: 2nd Ed. McGraw-Hill, 1959.
- [36] Liew KM, and Teo TM. Three dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration* 1999; 220(4): 577-599.
- [37] Chen WL, Striz AG, and Bert CW. High-Accuracy plane stress and plate elements in the quadrature element method. *International Journal of Solids and Structure* 2000;37: 627-647.
- [38] Wang, C.M., Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai S., Buckling of rectangular Mindlin plates with internal line supports., *International Journal of Solids and Structures*, 1993,30, 1-17.

[39] Liew, K.M., Teo, T.M., and Han, J.-B., Three-dimensional solutions of rectangular plates by variant differential quadrature method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001,43, 1611-1628,