Volume: 09 Number: 01 Category: 01 Page: 37-44 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 09 Sayı: 01 Kategori: 01 Sayfa: 37-44

FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN KAPULA AİLESİ, BAZI GENİŞLETMELERİ VE BİR UYGULAMA

Irmak ACARLAR* **Harun KINACI****

ÖZET

Son yirmi yılda iki ya da daha fazla değişken arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesinde kapulalar oldukça önem kazanmıştır. Bu yüzden kapulaların matematiksel ve istatistiksel özellikleri üzerine yapılan araştırmaların sayısı gün geçtikçe artmaktadır ve uygulama alanı da aynı doğrultuda genişlemektedir. Bu çalışmada Huang ve Kotz (1999) ve Lai ve Xie (2000) tarafından önerilen FGM ailesinin bazı genişletmeleri Türk Lirası bazında Amerikan Doları ve altın fiyatları üzerinden incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: FGM kapula ailesi, İki değişkenli dağılım, Pozitif bölge bağımlılığı.

1. GİRİŞ

Yirminci yüz yılın başlarından itibaren rasgele değişkenlere ilişkin çok değişkenli dağılım fonksiyonu ile bu değişkenlerin tek değişkenli marjinalleri arasındaki ilişki istatistikçiler tarafından oldukça ilgi duyulan bir konu olmuştur. Bu konu ile ilgili Frechet (1951) ve Dall'Aglio (1959) sabit marjinallere sahip ve bağımlı olan rasgele değişkenlerin iki ve üç değişkenli dağılım fonksiyonları üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bağımlı rasgele değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonuna ilişkin Sklar (1959) bağımlılık yapısını destekleyecek bir teorem geliştirmiştir ve bağımlılık fonksiyonlarına ilişkin çalışmaların çoğu bu teoreme dayalı olarak yapılmıştır. Kapula (copula) olarak tanımlanan bu fonksiyonlar için genel bir tanım, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını bir değişkenli marjinal dağılım fonksiyonlarına bağlayan fonksiyonlar olarak verilebilir (Çelebioğlu, 2007). Kapula "bağ" anlamına gelen Latince kökenli *copulare* kelimesinden türemiştir.

$I^2 = [0,1]^2$ birim karesinde tanımlı iki değişkenli bir C kapulası marjinalleri standart tek düze olan iki değişkenli birikimli bir dağılım fonksiyonudur ve (Nelsen, 2006) de verilen üç özelliği sağlar.

$\forall x, y \in \Re$ için iki değişkenli dağılım fonksiyonu H ve marjinalleri F ve G ile tanımlansın. C bir kapulayı ifade etmek üzere $\forall x, y \in \Re$ için $H(x,y) = C(F(x),G(y))$ eşitliği sağlanır (Nelsen, 2006; Sklar, 1959). Sklar (1959) tarafından verilen bu eşitlik çok değişkenli dağılım fonksiyonunun kapulalar yardımıyla oluşturulmasında temel teşkil etmektedir.

*Araş. Gör., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: irmakacarlar@gazi.edu.tr
**Araş. Gör., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: hkinaci@gazi.edu.tr

Ortak dağılım fonksiyonu H ve marjinaller sırasıyla F ve G olmak üzere $\forall x, y \in \Re$ için $H(x,y) - F(x)G(y) \geq 0$ ise X ve Y rasgele değişkenleri *pozitif bölge bağımlılığı*'na (positive quadrant dependence, PQD) sahiptir. Bu durumda X ve Y rasgele değişkenlerinin C kapulası $\forall u, v \in [0,1]$ olmak üzere $C(u,v) \geq uv$ özelliğini sağlar (Nelsen, 2006).

Literatürde çok çalışılan bir kapula olan Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapula ailesi ikinci dereceden bir kapuladır. FGM kapulası ilk kez Eyraud (1938) tarafından önerilmiştir. Daha sonra Morgenstern (1956) bu aileyi ele alarak Cauchy marjinalleri için incelemiş, Gumbel (1960) benzer bir şekilde üstel marjinaller üzerine çalışmış ve Farlie (1960) de bu ailenin genel bir formunu oluşturmuştur (Nelsen, 2006). Bazı kaynaklarda bu kapula ailesi Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern olarak da isimlendirilmiştir. İkinci dereceden bir kapula olan FGM kapula ailesi,

$$C_\theta^{FGM}(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v) \tag{1}$$

ile verilir ve C_θ^{FGM}, $\theta \in [-1,1]$ olduğu sürece 2-artandır (Nelsen, 2006). u ve v yerine sırasıyla X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinalleri olan $F(x)$ ve $G(y)$ alınırsa FGM kapulası ile oluşturulan ortak dağılım fonksiyonu

$$H_\theta(x,y) = F(x)G(y) + \theta F(x)G(y)[1-F(x)][1-G(y)] \quad -1 \leq \theta \leq 1 \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Birliktelik parametresi olarak da adlandırılan θ için uygun bir değer marjinallere ilişkin korelasyon katsayısından elde edilebilir. Literatürde θ'nın tahminleri için genellikle korelasyon katsayısının sağlam alternatifleri olan ve birliktelik ölçüsü olarak da adlandırılan Spearman'ın Rho'su ve Kendall'ın Tau'sunun kullanılması önerilmektedir. Bu iki birliktelik ölçüsü için formülasyonlar sırasıyla,

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v)\,du\,dv - 3 \tag{3}$$

ve

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v)\,dC(u,v) - 1 \tag{4}$$

eşitlikleri ile verilir (Nelsen, 2006). FGM kapula ailesi için birliktelik ölçülerinden Spearman'ın Rho'su $\rho_S \in [-1/3, 1/3]$ kapalı aralığında değer aldığı için Eşitlik (1) zayıf bir bağımlılığın modellenmesine izin vermektedir. Bundan dolayı daha güçlü bir bağımlılığı modellemek amacıyla FGM kapula ailesinin genişletmeleri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde FGM kapula ailesinin iki genişletmesi olan Huang ve Kotz ailesi ve Lai ve Xie ailesi tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde FGM kapula ailesi, Huang ve Kotz ailesi ve Lai ve Xie ailesi'ne ilişkin bir uygulamaya yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise bulunan sonuçlar tartışılmıştır.

2. FGM KAPULA AİLESİNİN BAZI GENİŞLETMELERİ

FGM ailesinin genişletmeleri daha yüksek pozitif bağımlılığın modellenmesini sağladığı için oldukça çalışılan bir konudur. Bu aile için pozitif bölge bağımlılığı (1) eşitliğinde sağ tarafta yer alan

$$w(u,v) = \theta uv(1-u)(1-v) \geq 0 \tag{5}$$

olması durumunda söz konusudur. FGM ailesinin genişletmeleri $w(u,v)$ fonksiyonu üzerinde yapılan değişikliklerden hareketle elde edilir. Bu bölümde FGM ailesinin bazı genişletmelerinden Huang ve Kotz (1999) tarafından önerilen iki kapula ve Lai ve Xie (2000) tarafından önerilen kapula tanıtılmıştır.

2.1. FGM Kapula Ailesinin Huang ve Kotz Genişletmeleri

Daha güçlü pozitif bölge bağımlılığını elde etmek amacıyla Huang ve Kotz (1999) FGM kapulasının çekirdek (kernel) genişletmeleri üzerine çalışmışlardır. Önerdikleri iki aileden biri $(1-u)^{\gamma}$ türünden çekirdek genişletmeye dayalıdır. Bu aile,

$$C_{\theta,\gamma}^{HK1}(u,v) = uv\left(1+\theta(1-u)^{\gamma}(1-v)^{\gamma}\right) \qquad \gamma>0, \quad 0<u,v<1 \tag{6}$$

biçimindedir[Huang ve Kotz, 1999]. Bu genişletme için ortak olasılık fonksiyonu,

$$h_{\theta}(u,v) = 1+\theta(1-u)^{\gamma-1}(1-v)^{\gamma-1}\left[1-(1+\gamma)u\right]\left[1-(1+\gamma)v\right] \tag{7}$$

ile verilir. Burada θ parametresi için değer aralığı $-1 \leq \theta \leq \left[(\gamma+1)/(\gamma-1)\right]^{\gamma-1}$ ile tanımlanır. $C_{\theta,\gamma}^{HK1}$ için tekdüze marjinal dağılımlar arasındaki korelasyon katsayısı,

$$\rho = 12\left(\frac{1}{(\gamma+2)(\gamma+1)}\right)^{2}\theta \tag{8}$$

ile verilmiştir[Huang ve Kotz, 1999].

FGM kapula ailesinin Huang ve Kotz (1999) tarafından önerilen diğer bir genişletmesi $1-u^{\gamma}$ tipi çekirdek genişletmedir. Bu kapula,

$$C_{\theta,\gamma}^{HK2}(u,v) = uv\left[1+\theta\left(1-u^{\gamma}\right)\left(1-v^{\gamma}\right)\right] \qquad \gamma>0, \ 0<u,v<1 \tag{9}$$

ile verilir[Huang ve Kotz, 1999]. Burada da θ parametresi değer aralığı $-\{\max(1,\gamma)\}^{-2} \leq \theta \leq \gamma^{-1}$ ile tanımlanır. Bu kapula için birliktelik ölçüsü ise,

$$\rho = 3\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^2 \theta \tag{10}$$

ile verilmiştir[Huang ve Kotz, 1999]. Bu iki aile ile ilgili özellikler Huang ve Kotz (1999)' da mevcuttur.

2.2. FGM Kapula Ailesinin Lai ve Xie Genişletmesi

Literatürde yer alan FGM kapula ailesinin genişletmelerinden bir diğeri Lai ve Xie (2000) tarafından önerilmiştir. Bu kapula,

$$C^{LX}_{\theta,p,q}(u,v) = uv + \theta u^p v^p (1-u)^q (1-v)^q \qquad p \geq 1,\ q \geq 1,\ 0 \leq \theta \leq 1 \tag{11}$$

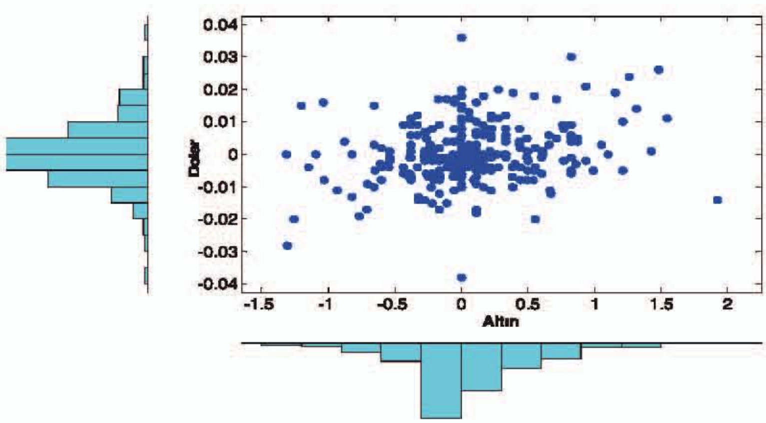
biçimindedir. Lai ve Xie ailesine ilişkin korelasyon katsayısı $\rho = 12\theta[\mathrm{B}(p+1, q+1)]^2$ ile verilir (Lai ve Xie, 2000). Burada $B(a,b)$ beta fonksiyonudur.

3. UYGULAMA

Uygulama kısmında FGM kapulası ile FGM kapulasının genişletmeleri bir veri seti üzerinden ki-kare istatistiği yardımıyla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada ki-kare istatistiğinde yer alan beklenen frekansların hesaplanması için bunlara karşılık gelen ortak olasılıklar, ele alınan kapulalarla belirlenmiştir. Uygulama için 01.01.2010 ve 01.01.2011 tarihleri arasındaki TL bazında altın ve dolar fiyatları verisi ele alınmıştır (www.altinkaynak.com, erişim tarihi:12.01.2011). TL bazında altın fiyatındaki değişim miktarları ve dolar fiyatında değişim miktarları arasındaki bağımlılık yapısı kapula yöntemi ile incelenmiştir.

Kapula tahmin yöntemleri parametrik, yarı parametrik ve parametrik olmayan yöntemler olmak üzere üç başlık altında toplanır. Parametrik ve yarı parametrik yöntemler için ilgili değişkenlerin dağılımlarının biliniyor olması gereklidir. Fakat parametrik olmayan yöntemler dağılıma bağlı olmayan yöntemler olduğundan ilgili kapulanın parametrelerinin tahmininde marjinallere ilişkin bir bilgiye ihtiyaç duyulmaz.

Bu çalışmada ele alınan kapulaların parametrelerinin tahmini için Spearman ρ_S değerine dayalı olan parametrik olmayan yöntem kullanılmıştır (Çelebioğlu, 2007). Bu yöntemin kullanılmasının nedeni hem bu yöntemin mevcut yöntemlere nazaran hesaplama kolaylığı sağlaması hem de dağılıma bağlı olmayan bir yöntem olduğundan marjinal dağılımlara ihtiyaç duyulmamasıdır (Çelebioğlu, 2007). 01.01.2010 ve 01.01.2011 tarihleri arasındaki TL bazında altın ve dolar fiyatlarındaki değişim miktarları arasındaki bağımlılık yapısı incelenirken önce bu iki dizi arasındaki serpme diyagramı oluşturulmuş ve serpme diyagramı Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. TL bazında altın ve dolar fiyatlarındaki değişim miktarlarına ilişkin serpme diyagramı

Şekil 1'den de görüldüğü üzere altın ve dolar fiyatları arasındaki ilişki aynı yönlü fakat güçlü değildir. Bu iki değişken arasındaki birliktelik ölçüsü de $\hat{\rho}_s = 0.22$ olarak elde edilmiştir. Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının kapulalarla modellenmesinde doğru kapulanın seçilmesi oldukça önemlidir. $\hat{\rho}_s$'nin bu değeri için belirlenen iki değişken arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesinde FGM kapula ailesinden yararlanılabilir. Bu uygulamada ele alınan altın ve dolar değişkenlerine ilişkin birliktelik ölçüsü tahmini $\hat{\rho}_s$, FGM kapula ailesine ilişkin birliktelik ölçüsü olan ρ_s'nin $[-1/3, 1/3]$ aralığında olmasından dolayı FGM kapula ailesi kullanılabilir. X ve Y rasgele değişkenlerine uygulanan monoton artan dönüşümler C kapulasının değerini değiştirmemektedir (Nelsen, 2006). Buradan hareketle genelliği bozmaksızın ele alınan iki diziye sıra sayıları atanmış ve bu sıra sayılarına dayalı olarak sınıf sayısı 4 olacak biçimde sınıflama yapılmıştır. Sınıflama yapılan veri için gözlenen frekanslar Tablo1'deki gibidir.

Tablo 1. TL bazında dolar ve altın fiyatlarındaki değişim miktarlarına ilişkin gözlenen frekanslar

		TL bazında Dolar fiyatlarındaki değişim				
	Değişkenler	$Y_{(74)}$	$Y_{(148)}$	$Y_{(222)}$	$Y_{(295)}$	TOPLAM
TL bazında Altın fiyatlarındaki değişim	$X_{(74)}$	26	17	16	14	73
	$X_{(148)}$	23	24	18	16	81
	$X_{(222)}$	13	18	18	18	67
	$X_{(295)}$	17	12	19	26	74
	TOPLAM	79	71	71	74	295

Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4'te FGM kapulası, Huang ve Kotz (1999) tarafından önerilen iki kapula ve Lai ve Xie (2000) tarafından önerilen kapulaların farklı durumları için $\hat{\theta}$ tahminleri, beklenen frekanslar ve χ_h^2 değerleri verilmiştir.

Tablo 2. C_{θ}^{FGM}, $\gamma=2$ **için** C_{θ}^{HK1} **ve** C_{θ}^{HK2} **, *p=q*=2 için** C_{θ}^{LX} **kapulaları ile elde edilen** $\hat{\theta}$, χ_h^2 **ve beklenen frekanslar**

Kapula	$\hat{\theta}$	Beklenen Frekanslar	χ^2
C_{θ}^{FGM}	0,6612	27 20 15 11 24 20 19 18 16 15 17 19 13 16 20 25	5,4456
C_{θ}^{HK1}, $\gamma=2$ için	2,6449	35 15 9 13 19 20 21 21 10 17 20 19 15 19 21 20	16,5435
C_{θ}^{HK2}, $\gamma=2$ için	0,2939	25 19 17 12 25 21 19 16 17 16 16 18 13 14 19 20	4,9514
C_{θ}^{LX} , *p*=*q*=2 için	16,5308	26 22 13 12 27 23 16 16 13 13 20 21 13 14 22 25	7,4185

Tablo 3. $\gamma=3$ **için** C_{θ}^{HK1} **ve** C_{θ}^{HK2} **, *p=q*=3 için** C_{θ}^{LX} **kapulaları ile elde edilen** $\hat{\theta}$, χ_h^2 **ve beklenen frekanslar**

Kapula	$\hat{\theta}$	Beklenen Frekanslar	χ^2
C_{θ}^{HK1}, $\gamma=3$ için	7.3470	44 7 6 16 11 24 25 22 8 21 21 18 17 19 19 19	61,1898
C_{θ}^{HK2}, $\gamma=3$ için	0.2041	23 20 17 13 25 22 19 15 18 16 16 17 13 13 18 30	5,5381
C_{θ}^{LX} , *p*=*q*=3 için	360.0046	25 23 11 14 29 27 11 14 11 9 25 23 15 12 24 23	25,9843

Tablo4. $\gamma=1.5$ **için** C_{θ}^{HK1} **ve** C_{θ}^{HK2} **, *p=q*=1.5 için** C_{θ}^{LX} **kapulaları ile elde edilen** $\hat{\theta}$, χ_h^2 **ve beklenen frekanslar**

Kapula	$\hat{\theta}$	Beklenen Frekanslar	χ^2
C_{θ}^{HK1}, $\gamma=1,5$ için	1.4063	31 18 12 12 22 20 19 20 12 16 19 20 13 18 21 22	8,3600
C_{θ}^{HK2}, $\gamma=1,5$ için	0.4000	25 19 16 12 24 21 19 17 16 15 17 19 13 15 20 27	5,0232
C_{θ}^{LX} , *p*=*q*=1,5 için	3.3879	27 21 14 12 26 21 18 27 14 14 18 20 13 15 21 25	5,4249

Genelde en uygun kapulanın belirlenmesi işlemi hesaplanan χ^2 değerlerinden en küçüğüne karşılık gelen kapula ailesi seçilerek sonuçlandırılır (Çelebioğlu, 2007). Bu bilgi doğrultusunda χ^2 kritik değerinin $\chi^2_{9,0.99} = 21{,}6660$ olduğu durumda uygunluğu belirlenen kapulalar arasında en küçük χ^2_h değerine karşılık gelen kapula $\gamma = 2$ iken Huang ve Kotz (1999) tarafından önerilen ikinci kapula olan C_θ^{HK2}' dir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak FGM kapula ailesi ve Huang ve Kotz aileleri ile Lai ve Xie ailesi kısaca tanıtılmıştır. Sonra 01.01.2010 - 01.01.2011 tarihleri arasında altın ve dolar fiyatlarındaki değişimler alınarak bu iki değişken arasındaki bağımlılık yapısı incelenmiştir. Sonra farklı kapulalarla elde edilen beklenen değerlerden hesaplanan χ^2 değeriyle bunlara ilişkin kritik değer karşılaştırılmış ve bu veri seti için uygun kapulalar belirlenmiştir. Sonuç olarak bu veri seti için FGM kapulası, γ' nın 1.5 ve 2 değerleri için Huang ve Kotz' un birinci kapulası, γ'nın 1.5, 2 ve 3 değerleri için Huang ve Kotz' un ikinci kapulasının uygunluğu gözlenmiştir. Bununla birlikte γ'nın 3 değeri için Huang ve Kotz'un birinci kapulası ile p ve q'nun 1.5 , 2 ve 3 değerleri için Lai ve Xie'nin kapulasına ilişkin $\hat{\theta}$ tahmini, bu parametre ile ilgili sınırların dışında bir tahmindir. γ=2 için Huang ve Kotz'un ikinci kapulası, en küçük χ^2 değerine sahip olduğundan bu kapula beklenen frekansların elde edilmesi bakımından en uygun olduğu sonucuna varılır.

5. KAYNAKLAR

Çelebioğlu, S., 2007. Üretici Fiyat Endeksi ve Tüketici Fiyat Endeksi Arasındaki Bağımlılık Yapısı Üzerine Bir Çalışma. 16. İstatistik Araştırma Sempozyumu Bildiriler Kitabı, 55-66.

Dall'Aglio, G., 1959. Sulla Compatibilit`a Dele Funzioni di Ripartizioni Doppia. Rend. Mat., 5,385–413.

Eyraud, H., 1938. Les Principes de la Mesure Des Correlations. Ann Univ Lyon Series., A1: 30-47.

Farlie D. J. G., 1960. The Performance of Some Correlation Coefficients for a General Bivariate Distribution. Biometrika, 47:307-323.

Frechet, M., 1951. Les Tableaux de Corr´elation Dont Les Marges Sont Donn´ees, Ann. Univ., Lyon, 9 (Sec. A), 53–77.

Gumbel E. J., 1960a. Bivariate Exponential Distributions. J. Amer. Statist. Assoc., 55:698-707.

Huang J. S., Kotz S., 1999. Modifications of the Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions. a Tough Hill to Climb. Metrika, 49:135–145.

Lai C. D., Xie, M., 2000. A New Family of Positive Quadrant Dependent Bivariate Distributions. Stat. Probab. Lett., 46:359–364.

Morgenstern D., 1956. Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen. Mitteilingsblatt fur Mathematische Statistik, 8:234-235.

Nelsen, R. B., 2006. An İntroduction to Copulas 2nd.edn. Springer Series.

Sklar, A., 1959. Fonctions de r′epartition a n dimensions et leurs marges. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8, 229–231.

www.altinkaynak.com (erişim tarihi: 12.01.2011).

FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN COPULA FAMILY, SOME EXTENSIONS AND AN APPLICATION

ABSTRACT

In the last twenty years, the copulas gained a considerable importance in investigating the dependence structure between two or more random variables. Therefore the number of researches on the mathematical and statistical properties of copulas increases from year to year, and hence the application area for copulas becomes so widespread in the same direction. In this study, some extensions of FGM family, proposed by Huang and Kotz (1999) and Lai and Xie (2000) are examined on the Turkish Lira basis of changes in American Dollar and gold prices.

Keywords: FGM copula family, Bivariate distributions, Positive quadrant dependence.