

# KAVRAMSAL VE İŞLEMSEL BİLGİ BAĞLAMINDA LİSE ÖĞRENCİLERİNİN CEBİR BİLGİLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Adnan BAKI\*

Taliha Kartal\*\*

## Özet

*Bu çalışma; lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasını, işlem ve kavram bilgisi bağlamında değerlendirmek amacı ile plânlanmıştır. Bu amaçla, bağıntı-fonksiyon-işlem, sayılar, polinomlar, çarpanlarına ayırma ve birinci dereceden denklemler gibi konuları içeren toplam 20 sorudan oluşan iki uzun cevaplı yazılı sınavı geliştirildi. Birinci sınavdaki sorularının çözümü ağırlıklı olarak işlem bilgisine ikinci sınavdaki soruların çözümü de ağırlıklı olarak kavram bilgisine dayanmaktadır. Bu sorulara verilen cevapların analizi için bir karakterizasyon ölçeği geliştirildi. Sınavlar beş ayrı lisede toplam 250 öğrenciye uygulandı. Öğrencilerin çözümleri, geliştirilen karakterizasyon ölçeğine göre gruplandırıldı, değerlendirildi ve yorumlandı. Verilerin analizinden çoğu öğrencinin cebirsel bilgilerinde kavram ve işlem bilgilerinin yetersiz olduğu ortaya çıkmıştır. Buradan öğrencilerin cebirsel bilgilerinin doğası, kavram ve işlem bilgilerinin dengeli olduğu kavramsal öğrenmeye değil, işlemsel bilgilerinin öne çıktığı bir matematiksel öğrenmeye dayandığı sonucuna varılmıştır. Matematik öğretirken işlemsel çözüm yollarından çok kavram ve ilişkilere öncelik verilirse sorun önemli ölçüde çözülecek ve öğrencilerin matematiksel öğrenmeleri daha kalıcı ve işlevsel olacaktır.*

**Anahtar sözcükler:** Matematik öğrenme, işlem ve kavram bilgisi

## Abstract

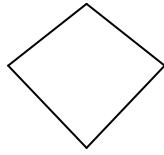
*The aim of the study is to characterize the nature of high school students' algebra knowledge in terms of procedural and conceptual knowledge. In order to do this, two writing exams including 20 questions selected from high school algebra curriculum which were developed and implemented to 250 students at grade ten and eleven. Students' answers and solutions were interpreted and analysed according to the scale developed for characterizing algebraic knowledge. As a result of analysis of data, it has been appeared that students' knowledge is not in balance. The nature of students' algebraic knowledge appeared to be heavily based on procedural knowledge. As we know mathematical learning is not just procedural. Current mathematics teaching should put emphasis on conceptual understanding rather than procedural. There should be a balance between procedural and conceptual mathematical knowledge for functional mathematical learning.*

**Key words:** Mathematical learning, procedural and conceptual knowledge

---

Yazışma adresi: \* Doç.Dr. Adnan Bâki, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon. \*\*Taliha Kartal, Kanuni Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni, Trabzon

Öğrenciler matematiği nasıl öğreniyorlar? Matematik nasıl öğretiliyor? Veya daha önemlisi öğrenciler matematik sorularının çözümünde ne tür bilgilerden, tekniklerden yararlanıyor? Bu soruların yanıtlarına işlemsel ve kavramsal matematik öğrenmeyi açıklayarak ulaşabiliriz. Kavram bilgisi sadece kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve adını bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmektir. Tek bir kavram kendi başına bir anlam ifade etmez. Kavram, kendisinin anlamını taşıdığı grupla ilişkilendirilirse söz konusu kavramla ilgili anlam ortaya çıkar. Kavramın taşıdığı anlam anlaşıldığı sürece kavram bilgisi gerçekleşir. İnsanlar yeni şeyler öğrenirken bunları daha önceki bilgileri üzerine inşa ederler. Benzer şekilde, matematiksel bilgiler de var olan eski bilgilere eklenir. Ne zaman ki yeni bilgi eski bilgi ile uygun bir şekilde ilişkilendirilebilir ve uzlaştırılabilir ise o zaman söz konusu kavramla ilgili anlama meydana gelir (Skemp, 1971). Zihinde ilişkilendirme gerçekleştiği an söz konusu kavramla ilgili öğrenme de gerçekleşmiş olur. Çok açık bilgi gibi tanımlanan kavram bilgisinde bilginin bağlı olduğu tüm bilgiler öğrenilir. Bilginin bağlı olduğu bilgi parçacıkları açık ve nettir. Kavram bilgisi çok çeşitli ve farklı kavramların ilişkileriyle birbirlerine zincirleme bağlıdır. Kavram bilgisini bir zincir halkasına benzetirsek, her bir halka bir bilgi içerir. Birbiriyle bağlantılı bilgi genişledikçe mensup olduğu zincir halkası genişleyecek, dolayısıyla bağlı olduğu bilgi parçası daha da güçlenecektir. Her bir halka daha anlamlı olacağından zincirin temsil ettiği kavram anlamlılık kazanacaktır (Hiebert ve Lefevre, 1986). Kavram bilgisinin genişlemesi bilgi parçaları arasındaki yapı bağlarının artmasıyla meydana gelir. Kavramlar soyutlaştıkça kavramlar arası ilişkileri birleştirme gücü artmaktadır. Örneğin, bir ilkokul öğrencisine;



“Bu nedir?” sorusu sorulduğunda öğrenci bunu daha önce bildiği kare veya dikdörtgene benzeterek onlardan birinin ismini söyleyebilir. Fakat, daha sonra ona bunun bir “deltoit” olduğu söylendiğinde, ilk başta bunu tereddütle karşılayarak şaşırabilir. Deltoitin özelliklerini öğrendikten sonra öğrenci artık deltoitle, kare ve dikdörtgen arasındaki farkı görecektir, deltoit hakkında soru sorulduğunda onu özellikleri ile beraber zihninde canlandırmayı başaracaktır. Zihinde ilişkilendirme gerçekleştiği an söz konusu kavramla ilgili anlamlı öğrenme de gerçekleşmiş olacaktır.

İşlem bilgisi onu meydana getiren iki ayrı kısım ile birlikte açıklanmaktadır. İşlem bilgisinin birinci kısmını matematiğin sembolleri ve dili oluşturur. Matematiksel semboller konunun yüzeysel özelliklerini verir fakat, anlamını vermez (Hiebert ve Lefevre, 1986). Fikirler sembolün anlamını belirtir. Sembol zihinde canlandırılan bir fikirdir. Bir düşünce ile ilişkilendirilmemiş bir sembol anlamsızdır. Buna rağmen aynı kavram farklı sembollerle gösterilebilir. Örneğin, “beş”, “5”, “V” benzer olarak  $(101)_2 = 5$  ve  $(8)_{10} = (10)_8 = (1000)_2$  gibi. Ayrıca, sembollerin öğrencinin nazarında anlam kazanması için belli fikirlerle eşleştirilmesi gerekmektedir. Örneğin, “+” sembolü birleştirmeyi gösterir. “Ali’nin üç elması var. Annesi ona beş tane daha verdi. Ali’nin elmaları kaç tane oldu?” eğer bu katılma fikri “+” ile birleştirilirse sembol, toplama işlemi anlamı kazanmış olur.

İşlem bilgisinin ikinci kısmı ise kuralları, matematiksel problemleri çözmek için kullanılan bağıntıları, somut nesnelere üzerindeki işlemleri, görsel diyagramları, zihinsel hayalleri veya matematiksel sistemin standart

olmayan diğer nesnelere içerir (Hiebert ve Lefevre, 1986). İşlem algoritmik bir yapıya sahiptir ve işlemin önemli bir özelliği de bir bütün olarak düşünülmesidir. İşlemler sıraya konularak mantıklı adımlarla yürütülür ve sonuca gidilir. Bir sonuca ulaşmak için önceki işlemin girdi ve çıktılarıyla oluşan sonuç, sırasıyla bir sonraki işlemin başlangıcı olacaktır. Bu sıra takip edilerek bir alt işlem, bir üst işleme eklenebilir. Bunu aşağıdaki gibi örneklebiliriz:

$$f(x) = x.f(x-1) - 3, f(1) = 2 \text{ ise } f(4) \text{ değerini bulunuz.}$$

$$x = 2 \text{ için; } f(2) = 2.f(1) - 3 = 2.2 - 3 = 1 \Rightarrow f(2) = 1$$

$$x = 3 \text{ için; } f(3) = 3.f(2) - 3 = 3.1 - 3 = 0 \Rightarrow f(3) = 0$$

$$x = 4 \text{ için; } f(4) = 4.f(3) - 3 = 4.0 - 3 = -3 \Rightarrow f(4) = -3 \text{ bulunur.}$$

Bu sorunun çözümünde matematiksel sembol ve ifadeler ve onların taşıdığı anlamlar bilerek çözüme gidildiği için buradaki işlem bilgisine anlamsız öğrenme denilemez. Çünkü yapılan her bir işlemde daha önceden kazanılan kavram bilgisi vardır.

Schoenfeld'e (1985) göre matematiğin resmî dilinde her sembol uygun kavramlarla anlamlı olmalıdır. Örneğin, iki ondalık kesrin çarpım kuralı "*Ondalık kesirler önce tam sayı gibi düşünülerek çarpılır. Daha sonra virgüllerden sonraki sayı adedi kadar virgül kaydırılarak sonuç yazılır.*" şeklinde verildiğinde bu anlamlı olmayan bir işlem bilgisidir. Kuralın nedenleri niçinleri açıklanmadığı veya anlaşılmadığı sürece bu, ezbere dayanan kuru bir işlem bilgisi olacaktır. Bu kuralın nedenleri niçinleri öğrenildiği zaman kavramsal öğrenme gerçekleşecektir. Bu nedenle kavramsal bilgi işlemsel bilgiler içerir. Kural unutulsa bile çıkarım yolu ondalık kesir sayılarının açılımı kullanılarak yeniden bulunur.  $1,2 * 0,57$  işleminin sonucunun bulunması örneğini ele alalım. Önce verilen sayılar bayağı kesir şeklinde yazılır ve sırasıyla işlem tamamlanır:  $1,2 * 0,57 = 12/10 * 57/100 = 684/1000 = 0,684$  buradaki her bilgi anlamlıdır. Ancak burada her bir bilgi daha önceden kazanılmış bir işlem bilgisini içermektedir. Bu işlem bilgilerinin temelinde de daha önceden kazanılmış kavram bilgileri yer alır. Bu örnekten de görüldüğü gibi kavram bilgisi içinde işlem bilgisi, işlem bilgisi içinde de kavram bilgisi yer almaktadır. Dolayısıyla, işlem ve kavram bilgisini ayıran kesin, kalın bir çizgi yoktur (Baki, 1998).

İşlem bilgisi nedenler ve niçinler araştırılmadan sadece kural niteliğinde ezberlenerek kazanıldığı için öğretimde de genellikle kavramlara değil işlemlere önem verilir. Ezberci öğrenmede öğrenci iyi bir aynadır. Kendisine gelenleri ustalıkla geriye yansıtır fakat kendisi herhangi bir şey üretmez. İşlemsel öğrenme görüşü matematiği öğrenciye doğrudan doğruya aktarılabilen bir bilgi kabul ederek öğretmeni kural ve yöntemleri bilen ve öğrenciye aktaran bir otorite olarak görmektedir (Cobb, 1986). Kavramsal öğrenmede ise kavram ve işlem bilgisine dengeli bir şekilde önem verilerek her iki tür bilgi de kullanılır (Baki, 1998). Kavramsal öğrenmede öğrenci, problem çözmede ve matematiksel bilgi üretmede kendi yaratıcılığını, sezgilerini ve yeteneklerini verimli bir şekilde kullanabilen bir problem çözücüdür. Bunun için kavramsal öğrenme yaklaşımı matematiği birbirine bağlı kavramlar ve düşünceler ağı olarak görür ve matematiksel kavramların ve düşüncelerin dışardan kopya edilmesi yerine öğrencinin bizzat kendisinin yapısallaştırmasını önerir (Bell ve Baki, 1997).

Baki'ye (1995) göre kavramsal öğrenme, mevcut sistemde sıklıkla görülmesi de matematiği ve fen'i daha iyi anlamının bir yoludur. Matematiksel problemler çözülürken iki tür çözücülerle karşılaşılır, usta ve çırak. Usta, problemi çözerken kavramsal özelliklere başvurarak çözüme ulaşırken, çırak karşılaştığı problemin daha önce çözdüğü problemlere benzeyip benzemediğini araştırır hatırlayabildiği çözüm yollarını yeni problem için uygulamaya çalışır. Kavramsal öğrenme görüşü matematiksel bilginin doğrudan öğretmen tarafından öğrenciye aktarılabilmesine karşı çıkarak gerçek matematiksel anlamaların bizzat öğrencinin kendi etkinliklerinden meydana gelebileceğini savunur (Cobb, 1986; Baki, 1995; Noss ve Baki, 1996).

### **Araştırmanın Amacı**

Matematiğin etrafımızdaki dünyayı anlamada bize yardım eden gizemli bir potansiyel sağladığını şimdi çok açık bir şekilde görebiliyoruz. Ancak, bu dramatik değişime rağmen değişmeyen bir şey vardır ki o da okullarda okutulan geleneksel matematik konuları ve matematiğin öğretilme şeklidir. Matematiğin öğretilme şekli değişmeden devam ediyor. Yüzyıllar öncesinden geldiği gibi günümüzde de çoğunlukla matematik öğrenmenin, kural ve yöntemlerin ezberlenmesinden ibaret olduğu bilinmektedir (Baki, 1996). Türkiye'de matematik eğitiminin başarısızlığının nedenleri farklı şekilde açıklanmaktadır. Matematik eğitiminin başarısızlık nedenlerinin bilimsel olarak tartışılabilmesi için öncelikle mevcut matematik öğretimi sürecinde öğrencilerin kazandıkları matematiksel bilgilerinin doğasının iyi bilinmesi gerekir. Mevcut matematik öğretimi, öğrencilere hangi bilgi ve becerileri kazandırmaktadır? Bu çalışma, söz konusu tartışmaya bilimsel bir katkıda bulunmak amacıyla orta öğretim öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasını, işlem ve kavram bilgisi bağlamında değerlendirmeyi amaçlamaktadır. Bu yapıldığında, başarısızlık nedenlerinin bilimsel tartışmasına katkıda bulunmuş olacaktır.

### **Araştırmanın Problemi**

Matematiği öğrenmek zihni sadece hazır bilgiyle doldurmak değildir. O bilgiyi kendi düşüncelerinizi ortaya çıkaracak şekilde ve problem çözmede kullanmaktır. Matematiği kavramsal yapısıyla birlikte düşünmeye başladığında öğrencinin başarısı da artmaktadır (Porter ve Masingila, 2000). Ancak, matematiğin yapısına uygun öğretimin mevcut okullarımızda arzu edilen düzeyde gerçekleştirilemediği bilinmektedir. Yaygın öğretim yaklaşımı sonucunda öğrencinin kafasında, ayrı ayrı öğrenilmesi gereken birbirleriyle ilişkisi olmayan formüllerin, kuralların ve algoritmaların yığını olan bir matematik canlanmaktadır. Öğrencilerin matematiği öğrenmelerinde yaşadıkları zorlukların kaynağında da matematiği daha çok işlemsel olarak algılamaları yatmaktadır. Öğrencilerin çoğu lise sıralarında işlemsel olarak algıladıkları matematiği; kavramları, kuralları ve algoritmaları ilişkilendirmeden öğrenme yoluna gitmekte ve bu yöntemle de ÖSS'de başarılı olmaktadır. Ancak, üniversitelerde ileri matematik konularında, kavramsal düşünmeyi gerektiren matematiksel problemlerde bu öğrenciler aynı başarıyı gösterememektedir (Baki, 1998). Bu nedenle, lise öğrencilerinin matematiksel bilgilerinin doğasından kaynaklanan eksiklerinin belirlenmesi onların üniversite yılları için de önemlidir. Lise yıllarında öğrencilerin nasıl bir matematiksel bilgiye sahip olduğunun belirlenmesi ilgililere öğrencileri matematiksel düşünmeyi, varsayımda bulunmayı ve genellemeyi gerektiren üniversite matematiğine hazırlama fırsatı verecektir. Bu da öğrencilerin matematiksel bilgilerinin doğasını anlamakla ilgili araştırmalarla olur.

Dolayısıyla, bu çalışmada öğrencilerin matematiksel bilgilerini genel olarak karakterize etmek yerine daha özel olarak onların matematiksel bilgilerinin bir parçası olan cebir alanı ile ilgili bilgileri irdelenmektedir. Bu amaca uygun olarak araştırmanın problemi “Öğrencilerin kendilerine sunulan problemler karşısında cebir bilgileri işlemsel ve kavramsal bilgi bağlamında nasıl ortaya çıkıyor?” şeklinde belirlenmiştir.

### **Araştırmanın Önemi:**

Matematik yalnızca anlatılmaktadır. Anlatmak her zaman öğretmekle eş anlamlı değildir, aynı sonuçları vermezler. Öğretmek, konunun duyumsatılması ve düşündürülmesiyle olur. Mevcut eğitim sistemimizde doğrudan anlatım yöntemiyle öğrencinin düşünebilme yeteneği yok edilmektedir. Daha korkuncu bu yöntemle öğrencinin yeteneğinin köreltildiği öğretmenler tarafından zor kabul edilir. Üniversiteye giriş sınavlarının şekillendirdiği matematik öğretiminde tıpkı Türkçe öğretimi adı altında gramer öğrettiğimiz gibi öğrencilere kurallar ve pratik algoritmalar sunulmaktadır. Bugün çoğu öğretmen matematikteki başarıyı formülleri, kural ve yöntemleri anında uygun bir şekilde kullanabilme olarak görmekte, hesaplamayı doğru icra edebilmeyi yeterli saymaktadır. Bunun tersine artık, matematiğe bir yığın formül, teknik bilgi ve teorem ispatı içeren soyut bir çalışma olmanın ötesinde bir düşünme yöntemi gözüyle bakılmaya başlanmıştır (Schoenfeld, 1985). Bir başka deyişle, öğrenciyi üretken bir şekilde donatmak, hayatında başarılı olacak şekilde eğitmek, yalnızca onun formülleri bilmesine, hesaplamaları doğru yapmasına değil matematiksel anlamasının ve matematiksel düşünmesinin gelişmesine bağlıdır. Bu da okul matematiğinde işlemsel çözüm yollarından çok kavram ve ilişkilere önem vererek öğrencinin işlem ve kavram bilgilerini dengelemekle mümkün olur (Baki, 1998). Bu nedenle, öğrencinin ağırlıklı olarak nasıl bir matematiksel bilgiye sahip olduğunun bilinmesi eğitimcilere, öğretmenlere söz konusu bu dengelemenin başarılmasında önemli ipuçları sağlayacaktır.

### **Yöntem**

Öğrencilerin cebir bilgisinin doğası zihinde nasılsa, kâğıt üzerindeki uygulamalarında da aynıdır. Çünkü, zihindeki düşünceler matematiksel bir çalışma veya problem çözme sırasında görüntü ya da sözcük olarak belirirler. Bu nedenle öğrencinin sahip olduğu matematiksel bilginin doğasını belirleyebilmek ve onu karakterize edebilmek için öğrenciler bir dizi matematik çalışma ve problem çözme etkinliği ile karşı karşıya getirilerek gözlemler yapıldı ve ortaya koydukları ürünler geliştirilen karakterizasyon ölçeğine göre yorumlandı. Araştırma bu niteliği ile bir özel durum çalışmasıdır. Bu yöntemin seçilmesinin sebebi, öğrencilerin matematik bilgisinin genel değerlendirilmesi değil, matematiğin bir parçası olan cebir bilgisinin doğasının değerlendirilmesinin amaçlanmasıdır.

### **Evren ve Örneklem**

Araştırmada kullanılan sorular lise müfredatından seçilen bağıntı-fonksiyon-işlem, sayılar, polinomlar, çarpanlarına ayırma ve birinci dereceden denklemler konularından seçilmiş her biri on’ar sorudan oluşan iki ayrı sınav hazırlanmıştır. Yazılı cevap gerektiren sorulardan oluşan bu sınavlar 1999-2000 eğitim-öğretim yılının birinci döneminde belli zaman aralığında Trabzon Lisesi, Affan Kitapçıoğlu Lisesi, Akçaabat Lisesi, Yomra

Lisesi ve Sürmene Lisesi olmak üzere Trabzon ilindeki 5 farklı genel lisede okuyan toplam 250 son sınıf öğrencisine uygulanmıştır.

### **Verilerin Toplanması ve Analizi**

Matematiğin bir alt dalı olan cebiri karakterize eden üç etkinlik vardır. Bu etkinliklerle öğrenci, hem matematik derslerinde hem de diğer fen derslerinde liseyi bitirene kadar iç içedir. Bu etkinlikler sırasıyla *denklem kurma*, *örüntüler bulma* ve *bunları genelleme* ve son olarak da *fonksiyonlarla çalışma* etkinlikleridir. Bu etkinlikleri yansıtacak şekilde öğrencilerin cebirsel bilgilerini işlemsel ve kavramsal bilgi bağlamında karakterize etmede kullanılacak 10'ar soruluk iki sınav hazırlandı. Veri toplama ölçeği olarak kullanılan 10'ar soruluk bu iki sınavın soru maddelerinin kapsam geçerliliğini belirlenmek amacıyla Fatih Eğitim Fakültesinden 4 öğretim elemanı ve farklı liselerde çalışan 6 matematik öğretmeninden oluşan 10 kişilik uzman grubunun görüşü alındı. Bu ön çalışmadan sonra soru maddelerine son şekli verildi. Esas çalışmaya başlamadan önce hazırlanan bu sınavlar Akçaabat Lisesinde 42 lise son sınıf öğrencisine belli zaman aralıklarında uygulandı. Toplam 20 soru maddesi ile ilgili Cronbach Alfa güvenirlik katsayısı 0,72 olarak bulundu. Pilot çalışma sonucunda elde edilen verilere göre sınavlara son şekli verildi (Bkz. EK 1 ve EK 2).

Esas çalışmada bu sınavlar belli zaman aralıklarında kullanıldı. Önce işlemsel bilgi gerektiren 10 soruluk sınav uygulandı. İki hafta sonra kavram bilgisi gerektiren 10 soruluk diğer sınav aynı öğrencilere uygulandı. Öğrencilerin bu iki sınava verdikleri yazılı yanıtlar geliştirilen karakterizasyon ölçeği yardımıyla yorumlanmaya çalışıldı. Karakterizasyon ölçeği konuyla ilgili literatürde (Skemp, 1971; Schoenfeld, 1985; Hiebert ve Lefevre, 1986; Ernest, 1991) yapılan işlemsel ve kavramsal bilginin tanımlarından ve sınıflamalarından yararlanılarak geliştirildi. İşlem bilgisini karakterize edecek olan kriter maddelerini belirlerken bu alanda öğrencinin düşebileceği yanılgılar ve yanlışlar kullanılmaya çalışıldı. Benzer şekilde kavramsal bilgiyi karakterize eden kriter maddelerinin belirlenmesinde de kavramsal alanda öğrencinin düşebileceği yanılgılar ve yapabileceği yanlışlar dikkate alındı. Bu plânlamanın ışığında karakterizasyon ölçeği aşağıda olduğu gibi kendi içinde üçe ayrılarak son şeklini aldı:

#### ***A: İşlem Bilgisini Karakterize Eden Kriterler***

- A1. *İşlemleri adım adım yapma.*
- A2. *Önceden öğrenilen matematik bilgilerini (teorem, tanım, önerme, özellik ve bağıntı) bilgi düzeyinde kullanma.*
- A3. *Cebirsel bağıntıyı kullanabilme ve temel işlemleri yürütebilme.*

#### ***B: Kavram Bilgisini Karakterize Eden Kriterler***

- B1. *Matematikteki temel kavramları ve bu kavramların anlamını bilme.*
- B2. *Sorunun özünü kavrayarak verilenle istenilen arasında mantıklı ilişki kurarak çözüm yolu bulma.*
- B3. *Önceden öğrenilen matematik bilgilerini (tanım, önerme ve teorem) kavrama veya uygulama düzeyinde kullanma.*
- B4. *Soruyu bir bütün olarak algılayarak verilen ipuçlarını yerinde ve doğru bir şekilde değerlendirme.*
- B5. *Problemi alt ve basit basamaklara ayırma.*

- B6. Karmaşık ve zor görünen bir probleme yardımcı olacak şekiller çizme veya genellemelerde bulunma.  
B7. Problemi verilen şekil ve grafikte eşleştirme.  
B8. Problemin özelliklerini ortaya koyarak problemi bu özellikleri içeren bilgilerle eşleştirme.

### C: İşlem ve Kavram Bilgisini Birlikte Karakterize Eden Kriterler

- C1. Matematiğin dilini oluşturan sembol ve ifadeleri anlama, kullanma, yazma, kısaltma ve sadeleştirme.  
C2. Problemi denkleme dönüştürüp denklemi çözme ve çözümlerin mantıklılığını yoklama.  
C3. Verilen bağıntıları kendi aralarında ilişkilendirerek başka bir bağıntıya dönüştürme.

### Bulgular ve Tartışma

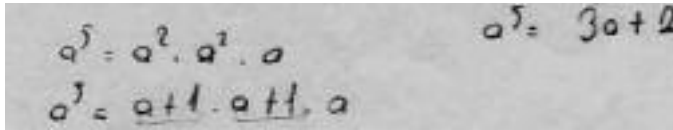
Bu çalışmada geçen öğrenci isimleri gerçek kişilere ait değil, takmadır. İki ayrı başarı testinin her bir sorusuna verilen cevaplar geliştirilen ölçeğe göre yorumlanarak elde edilen nitel veriler gruplandırıldı. Ayrıca, gruplandırmalardan yararlanılarak elde edilen çizelgelerin sağladığı nicel verilerden de araştırmanın problemine cevap teşkil edecek nitelikte bazı bulgulara ulaşılmıştır. Kısıtlığın hatırı için, işlem bilgisi gerektiren sorulardan sadece 1., 2. ve 4. sorular, kavram bilgisi gerektiren sorulardan sadece 2., 3. ve 6. sorular ve hem işlem hem de kavram bilgisi gerektiren sorulardan 5. soru ile ilgili öğrenci yanıtları karakterizasyon ölçeğine göre burada örneklendi. Diğer sorulardan elde edilen nitel veriler ve çizelgelerin yorumları, ilgili alt başlıklar altında literatür eşliğinde tartışıldı.

### İşlem Bilgisi Gerektiren Sorularla İlgili Bulgular ve Yorumları

Ağırlıklı olarak işlem bilgisi gerektiren 1., 2. ve 4. sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplardan bazıları aşağıda örnek olarak yer almaktadır:

**Soru 1:**  $a^2 = a + 1$  ise  $a^5$  in  $a$  cinsinden en sade değerini bulunuz.

Çalışmaya katılan öğrencilerden Başak işlem bilgisi içeren 1. soruda çarpma ve toplama ifadelerinin taşıdığı anlamı ve işlem sırasını bilmemektedir.

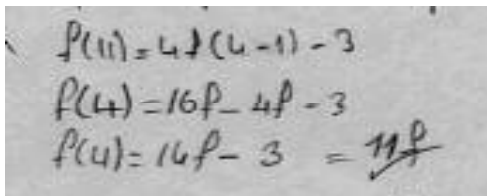


$a^5 = a^2 \cdot a^2 \cdot a$   
 $a^3 = a + 1 \cdot a + 1 \cdot a$

Başak örneğinde olduğu gibi çalışmaya katılan öğrencilerin çoğu (%41.2) bu soruyu cevaplarken matematiksel geçerliliği olmayan işlemler yapmıştır.

**Soru 2:**  $f(x) = x \cdot f(x-1) - 3$ ,  $f(1) = 2$  ise  $f(4) = ?$

Çalışmaya katılan öğrencilerinden Derya işlem bilgisi içeren 2. soruda uyguladığı çözüm yolunda, matematiğin dilini oluşturan sembol ve ifadeleri anlamlaştırma tamamen başarısızdır. Bunun yanında  $f$ 'i bilinmeyen olarak kabul ettiğini varsaysak bile bilinmeyenle bir sayıyı toplaması, çıkarması işlem bilgisinin eksik olduğunu göstermektedir.



$f(11) = 4 \cdot (4-1) - 3$   
 $f(4) = 16f - 4f - 3$   
 $f(4) = 16f - 3 = 11f$

Derya'nın çözümüne benzer şekilde birçok öğrenci (%40.), sorudaki  $f$ 'yi fonksiyon olarak değil de bir bilinmeyen olarak algılamıştır. Bu da öğrencilerin önemli bir kısmının semboller taşıdığı anlamla imgeleyememiş olduğunu göstermektedir (McCormick 1997). Semboller yanlış imgelediğinden matematiksel geçerliliği olmayan işlemler yapılmıştır.

**Soru 4:**  $\frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^2 - 64}{x^2 - 6x + 9}$  ifadesinin en sade biçimini bulunuz.

Öğrencilerden Ümit'in işlem bilgisi içeren 4. soruya verdiği cevapta; çarpma işleminde ve sadeleştirme yapmada yanlış ve eksik bilgiye sahip olduğu görülmektedir:

Ümit gibi birçok öğrenci (%27.2) yaptıkları işlemlerin arkasında yeterli kavram bilgisi olmadığı için sorunun çözümü sırasında matematiksel geçerliliği olmayan işlemler yapmıştır.

İşlem bilgisi gerektiren diğer sorulara verilen *yanlış ve yetersiz cevaplar* yukarıdaki örneklerde olduğu gibi karakterizasyon ölçeğinin kriterlerine göre tek tek yorumlanarak gruplandırıldı ve çizelgeler elde edildi. Bunlar aşağıdaki gibi özetlenebilir: Tablo 1'de her bir soru için yeterli düzeyde kriterleri *sağlayamayan* çözümlerin dağılımı gösterilmektedir:

**Tablo 1. İşlem bilgisi gerektiren sorular ve sağlanamayan kriterlerin dağılımları**

Kriterler	A1		A2		A3		C1		C2		C3	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
<b>1</b>	66	26,4	10	4	27	10,8	14	5,6				
<b>2</b>	30	12	65	26	6	2,4	98	39,2				
<b>3</b>	16	6,4	35	14	28	11,2	27	10,8			70	28
<b>4</b>	25	10					43	17,2				
<b>5</b>	54	21,6	101	40,4			39	15,6				
<b>6</b>	39	15,6	84	33,6			44	17,6			14	5,6
<b>7</b>	68	27	28	11,2			31	12,4			15	6
<b>8</b>	49	19,6	32	12,8								
<b>9</b>			14	5,6	53	21,2			18	7,2	41	16,4
<b>10</b>			86	34,4	38	15,2					24	9,6



3. soru için, öğrencilerin %6.4'ünün işlem hatası yaptıkları, %28'inin verilenleri istenilenler ile ilişkilendiremediği, %14'ünün verilen bağıntıyı kullanamadığı, % 11.2'sinin cebirsel işlemleri yürütemediği, %10.8'inin sorudaki sembolleri yanlış imgelediği görülmüştür. 5. soru için, öğrencilerin %40.4'ünün eksik ve yanlış bilgilere sahip olduğu, %21.6'sının çözüm sırasında matematiksel geçerliliği olmayan işlemler yaptığı, %15.6'sının işlemleri yürütmeye yeterli olmadığı görülmüştür. 6. soru için, öğrencilerin %15.6'sı işlem hataları yaptığı, %33.6'sının yanlış bilgiye sahip olduğu, %17.6'sının ifadelerin doğru açılımını yapamadığı, %5.6'sının soruda geçen sembolleri taşıdığı anlamla ilişkilendiremediği görülmüştür. 7. soru için öğrencilerin, %6'sı verilenleri ilişkilendirip doğru yapmasına rağmen %27'si istenileni bulmada dikkatsiz davranarak istenilen bağıntıyı tam kullanamamış, %11.2'si verilenleri kendi aralarında ilişkilendiremeyip verilenleri doğru ve yerinde kullanamamış, %12.4 oranında öğrenci de matematiksel sembolleri taşıdığı anlamla imgeleyememiştir. 8. soru için öğrencilerin, %19.6'sı işlemleri adım adım sonuçlandırmada işlem hataları yapmış, %12.8'i önceden öğrendiği bilgileri hatırlamayıp bağıntıların açılımını yanlış kullanmıştır. 9. soru için öğrencilerin, %7.2'sinin verilenleri ilişkilendirip yaptığı işlemleri bir bütün olarak değil de elde ettiği işlemin bir parçası ile işlemleri devam ettirdiği, %5.6'sının önceden öğrendiği bilgileri bilgi düzeyinde kullanamayarak bağıntıların açılımını yapamadığı, %21.2'sinin yetersiz bilgilere sahip ve cebirsel işlem yürütme becerilerinin olmadığı, %16.4'ünün verilenleri kendi aralarında ilişkilendiremeyip soruyu çözüme ulaştıracak etkin bir çözüm yolu bulamadığı gözlenmiştir. 10. soru için öğrencilerin, %15.2'sinin bağıntıların açılımını yapamadığı, %34.4'ünün yanlış bilgilere sahip olduğu ve %9.6'sının verilenleri diğer ifadede ilişkilendirerek sonuca gidemediği görülmüştür.

Öğrencilerin işlem bilgisi gerektiren sorulara verdiği cevaplardan, sorulara göre kriterleri *gerçekleştirme* dağılımları Tablo 2'de gösterilmiştir:

**Tablo 2. İşlem bilgisi gerektiren sorular ve gerçekleştirilen kriterlerin dağılımları**

Kriterler	A1		A2		A3		C1		C2		C3	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
1	35	14	114	45,6	30	12	30	12				
2	87	34,8			108	43,2	108	43,2				
3	55	22	55	22	71	28,4	71	28,4			55	22
4	154	61,6	154	61,6			154	61,6				
5	118	47,2	118	47,2			118	47,2				
6	123	49,2	137	54,8			137	54,8			113	45,2
7	153	61,2	153	61,2	168	67,2	128	51,2			95	38
8	133	53,2	133	53,2	133	53,2						
9	95	38	95	38	113	45,2			116	46,4	84	33,6
10	47	18,8	47	18,8	26	10,4					21	8,4

Öğrencilerin 1. soru için, %14'ü işlemleri adım adım takip edebilmiş, %45.6'sı bağıntıların açılımını yapabilmiş ve %12'si verilen bağıntıyı değişik yollardan kullanarak farklı açılımlar sergileyebilmiştir. Yine %12'si sembolleri doğru anlayabilmiş ve sadeleştirerek doğru sonuca ulaşabilmiştir. Öğrencilerin 2. soruda, %34.8'i yaptıkları işlemleri doğru olarak sonuçlandırmış, %43.2'si verilen bağıntıların yerinde kullanabilmiştir.

Öğrencilerin 3. soruda, %22'si işlemleri doğru sonuçlandırmış, %28.4'ü verilen bağıntıları kullanabilmiş ve bağıntıların açılımlarını bilgi düzeyinde yazabilmiştir. 4. soru için, %61.6'sı işlemleri doğru gerçekleştirmiş ve matematiksel bilgileri kullanabilmiştir. 5. soru için, %47.2'si işlemleri adım adım takip ederek matematiksel bilgileri kullanabilmiştir. 6. soru için, %49.2'si işlemleri doğru sonuçlandırmış, %54.8'i matematiksel bilgileri kullanabilmiştir. 7. soru için, %61.2'si matematiksel bilgileri yerinde kullanarak işlemleri adım adım gerçekleştirmiş ve %67.2'si verilen bağıntıyı kullanabilmiştir. 8. soru için, %53.2'si verilen bağıntıları ve matematiksel bilgileri bilgi düzeyinde kullanarak işlemleri adım adım takip edebilmiştir. 9. soru için, %38'i matematiksel bilgileri bilgi düzeyinde ve işlemleri yerinde gerçekleştirmiş, %45.2'si verilen bağıntıları kullanabilmiştir. 10. soruda ise öğrencilerin %18.8'i matematiksel bilgileri yerinde kullanarak işlemleri adım adım gerçekleştirmiş, %10.4'ü verilen bağıntıları kullanabilmiş ve %8.4'ü verilen bağıntıyı kendi arasında ilişkilendirerek başka bir bağıntıya dönüştürebilmiştir.

### Kavram Bilgisi Gerektiren Sorularla İlgili Bulgular ve Yorumları

Kavram bilgisi gerektiren 2., 3. ve 6. sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplardan bazıları aşağıda örnek olarak yer almaktadır:

**Soru 2:** Her ay sonunda kalan borcunun  $\frac{1}{5}$ 'ini ödeyen bir kimsenin 3 ay sonunda 16.000.000 lira borcu kalıyor. Bu kimsenin başlangıçta kaç lira borcu vardı?

Öğrencilerden Ali kavram bilgisi içeren 2. soruyu çözerken bu türden problemlerin çözümünde kullanılan daha önceden öğrendiği bir kuralı doğrudan uyguladığı anlaşılmaktadır. Ali'nin çözümünde niçin 125k'dan başlanıldığı açık değildir. Çözümüne bu yönüyle bakıldığında kavram bilgisinden çok daha önceden öğrenilen bir kuralın öğrenilmesi şeklinde işlemsel bilgi söz konusudur. Ancak verilenleri matematiksel olarak ilişkilendirmesi ve adım adım ilerleyerek  $64k = 16000000$  eşitliğini yazarak sonucu bulması da kavramsal bilgi göstergesidir.

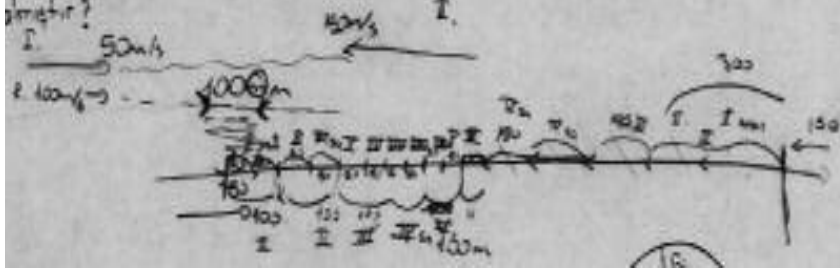
$$\begin{aligned}
 925k - 25k &= 100k \\
 100k - 20k &= 80k \\
 80k - 16k &= 64k \\
 64k &= 16.000.000 \\
 k &= \frac{16.000.000}{64} \\
 k &= 250.000 \\
 A &= 250.000 \cdot 125 \text{ U}
 \end{aligned}$$

Ali'nin örneğinde olduğu gibi öğrencilerin çok az bir kısmı daha önceden öğrendikleri kuralları kullanarak çözüme ulaşmıştır. Bunun yanında çalışmaya katılan öğrencilerin %16.8'i bu soruyu farklı denklemler kurarak verilenleri ve karmaşık yapıları ilişkilendirerek doğru sonuca gidebilmiştir. Buna karşın büyük çoğunluk (%53.6) ya herhangi bir denklem kuramamış ya da Özlem'in çözümünde olduğu gibi soruda geçen bilgileri cebirsel olarak ilişkilendiremediği için doğru denklem kuramamıştır:

$$\begin{aligned}
 3 - \frac{1}{5}x &= \frac{3}{5} \text{ öder...} \\
 \frac{2x}{5} &= 16.000.000 \\
 2x &= 80.000.000 \\
 x &= 40.000.000
 \end{aligned}$$

**Soru 3:** Hızları 50m/sn ve 150m/sn olan iki bisikletli 1000m uzaklıkta birbirlerine doğru, çarpışmak amacıyla, hareket ederler. Onlarla aynı anda 50m/sn hızlı bisikletlinin köpeği sahibinin yanından 100m/sn hızla II. bisikletliye doğru koşar. II.ye dokunduğu an tekrar I.ye doğru koşar. Sahibine değdiğinde II.ye doğru yönelir. Bu, iki bisikletin çarpışmasına kadar sürer. Bu çılgın köpek ne kadar yol almıştır?

Çalışmaya katılan öğrencilerinden Ayşe 3. soruda uyguladığı çözüm yolunda; köpeğin bisikletlilerin çarpışma anına kadar aldığı yolu her iki bisikletliye doğru koşarak aldığı yolları toplayarak bulmaya çalışmıştır. Ancak, bu çözüm yolu onu çok karışık bir durumla karşılaşmıştır. Çizdiği grafikler de ona yardımcı olamamıştır.



Ayşe'nin çözümüne benzer şekilde öğrencilerin çoğu (%15.2) soruyu bir bütün olarak algılayamayarak verilen ipuçlarını değerlendiremeyip geçerli çözüm yolu bulamamıştır. Ayrıca, öğrencilerin %5.6'sı problemin içerdiği bilgilerin taşıdıkları anlamları kavrayamamış ve taşıdıkları birimleri anlamlandıramamıştır. Bu durumu Aysun'un çözümü örneklemektedir.

$$1000 \text{ m} - 100 \text{ m/sn} = 900 \text{ m yol almıştır}$$

Aysun, soruda verilen yol ve hızla ait verilerin taşıdıkları anlamları bilmediği için hızı yol gibi kullanarak aralarında fark işlemi yapmıştır.

**Soru 6:** Bir babanın yaşı, iki kızının yaşları farkının 5 katıdır. 10 yıl sonra babanın yaşı, kızlarının yaşları farkının 6 katına eşit oluyor. Babanın şimdiki yaşı nedir?

Lise 3'ten Ahmet 6. soruda uyguladığı çözüm yolunda, soruda verilen çocukların yaşlarının farkının on yıl sonra değişmeyeceğini bilmeden bu şekilde denklemler oluşturmuştur. Denklemlerin çözümü sonucunda babanın yaşını çok büyük bir sayı bulması onu sonucun mantıklılığını yorumlamaya götürememiştir.

$$\begin{aligned} x &= 5(z-y) \\ x+10 &= 6(z+10-y+10) \\ x+10 &= 6(z-y+20) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} z-y &= \frac{x}{5} \\ -z+y &= \frac{x}{5} \\ x &= 5 \cdot \frac{x}{5} \end{aligned}$$

Ahmet gibi birçok öğrenci (%38.4) soruda verilenleri doğru ilişkilendiremeyip yanlış denklemler kurmuş ve yaptığı işlemler sonucunda bulduğu sonucun mantıklılığını tartışamadığı gözlenmiştir.

Kavram bilgisi gerektiren diğer sorulara verilen *yanlış ve yetersiz cevaplar* yukarıdaki örneklerde olduğu gibi ölçeklerin ışığı altında tek tek yorumlanarak gruplandırıldı. Öğrencilerin yetersiz cevaplarının kriterlere göre yorumu aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Öğrencilerden 1. soru için öğrencilerin %10.4'ü sorunun özünü anlamayarak soruda verilenleri kendi aralarında tam ilişkilendiremeyip verilen bilgileri uygulama düzeyinde kullanamadığı, %16 oranında öğrenci sorunun özünü anlamadığı ve bu soru için yanlış ve yetersiz bilgilere sahip olduğu görülmüştür. 4. soru için öğrencilerin %11.2'si soruyu bir bütün olarak algılayıp verilen şekil ile eşleştirip problemin özelliklerini içeren bilgiler ile birleştirmesine rağmen işlemleri adım adım yapmada işlem hataları yapmış, %28.4'ü şekilde verilenleri soruyla ilişkilendiremeyip gerekli olan bilgilerle eşleştirememiştir. 5. soru için, %35.2'si sembolleri taşıdıkları anlamlar ile imgeleyememiş ve soruyu grafikte eşleştirememiştir. 7. soru için, %1.6'sı problemi verilen grafikte eşleştirip problemin özelliklerini içeren bilgileri kavrama düzeyinde kullanmasına rağmen işlemleri adım adım yapmada işlem hataları yapmış, %49.2'si grafikte verileri soru ile anlamlaştıramamıştır. 8. soru için, %3.2'sinin sorunun özünü kavrayarak önceden öğrendiği bilgileri kavrama düzeyinde kullanmalarına rağmen işlemleri adım adım yapmada işlem hataları yaptıkları, %27.6'sının soruyu ait olduğu konu ile eşleştiremeyip soruda verilenleri anlamlaştırmayı ve ilişkilendirmeyi başaramayıp soruda verilen sayısal değerler arasında rastgele işlemler yaptıkları görülmüştür. 9. soru için, %2.8'i sorunun özünü anlayarak geçmişte öğrendikleri bilgileri kavrama düzeyinde kullanmalarına rağmen işlemleri adım adım yapmada işlem hataları yapmış, %1.6'sı soruda verilenleri ilişkilendirip kullanmalarına rağmen soruda istenileni bulamamış; %8.8'i sorunun özünü kavramasına rağmen önceden öğrendiği bilgileri hatırlayamamışlar, %17.6'sı sorunun özünü kavrayamamış ve geçmişte öğrendiği bilgileri yanlış kullanmıştır. 10. soru için, %2'si verilenleri ilişkilendirmesine rağmen daha sonra gerekli işlemlere devam etmemiş, %47.6'sı soruda geçen kavramları taşıdıkları anlam ile anlamlaştıramayıp verilenleri üstün körü kullanmıştır.

Öğrencilerin kavram bilgisi gerektiren sorulara verdiği cevaplardan, sorulara göre ölçekleri *gerçekleştirme* dağılımları Tablo 3'de gösterilmiştir:

**Tablo 3. Kavram bilgisi gerektiren sorular için gerçekleştirilen kriterlerin dağılımları**

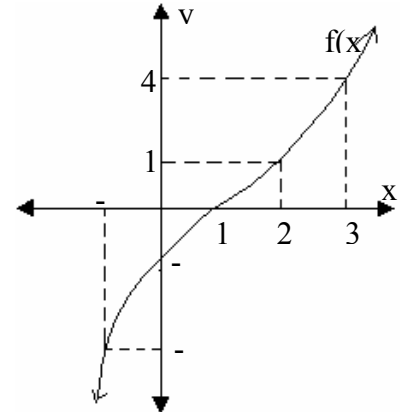
Ölçüt	B1		B2		B3		B4		B5		B6		B7		B8		A1		A2		C1		C2		C3			
	Soru	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	
1		22	8,8	22	8,8											27	10,8	5	2			22	8,8					
2		52	20,8					2	0,8	2	0,8					42	16,8					52	20,8					
3		34	13,6	34	13,6	34	13,6			34	13,6			34	13,6	34	13,6											
4					121	48,4					121	48,4	121	48,4	93	37,2	93	37,2										
5	71	28,4		71	28,4					71	28,4	71	28,4	71	28,4			71	28,4									
6		92	36,8		92	36,8									92	36,8					92	36,8						
7	55	22	55	22	55	22					48	19,2	55	22	51	20,4	55	22										
8		64	25,6	64	25,6	64	25,6	64	25,6						56	22,4												
9		124	49,6	95	38	98	39,2								91	36,4	91	36,4										
10	79	31,6			79	31,6									79	31,6								83	33,2			

Öğrencilerin 1. soru için, %8.8'i verilenler arasında mantıklı ilişki kurarak matematik bilgilerini kavrama düzeyinde kullanabilmiş ve % 10.8'i işlemleri adım adım gerçekleştirebilmiştir. 2. soruda öğrencilerin %20.8'i verilenleri ilişkilendirerek denklem oluşturabilmiş, %0.8'i karmaşık ve zor görünen probleme yardımcı olacak şekiller çizmiş veya genellemelerde bulunulup problemi alt ve basit basamaklara ayırabilmiş, %16.8'i işlemleri adım adım devam ettirebilmiş, %20,8'i problemi denkleme dönüştürebilmiştir. 3. soru için, %13.6'sı sorunun özünü kavrayarak verilen ile istenilen arasında mantıklı ilişki kurarak matematik bilgilerini kavrama düzeyinde kullanarak işlemleri adım adım gerçekleştirebilmiştir. 4. soru için, %48.4'ü problemi verilen şekil ve grafikte eşleştirebilmiş ve %37.2'si matematik bilgilerini bilgi düzeyinde kullanıp işlemleri adım adım gerçekleştirebilmiştir. 5. soru için, %28.4'ü matematik bilgilerini kavrama düzeyinde kullanıp işlemleri adım adım sonuçlandırabilmiştir. 6. soru için, %36.8'i verilen ile istenilen arasında mantıklı ilişki kurarak işlemleri doğru yapabilmiştir. 7. soru için, %22'si bilgileri kavrama düzeyinde kullanabilmiş, %19.2'si problemi verilen grafik ile eşleştirebilmiş, %20.4'ü işlemleri adım adım gerçekleştirebilmiştir. 8. soru için, %25.6'sı matematik bilgilerini kavrama düzeyinde kullanarak verilenleri yerinde değerlendirebilmiş ve problemi alt ve basit basamaklara ayırabilmiş, %22.4'ü işlemleri adım adım yapabilmiştir. 9. soru için, %49.6'sı verilenle istenilen arasında mantıklı ilişki kurabilmiş, %38'i matematik bilgilerini kavrama düzeyinde kullanabilmiş, %36.4'ü matematik bilgilerini bilgi düzeyinde kullanabilmiş ve işlemleri doğru yapabilmiştir. 10. soru için, %31.6'sı verilen ipuçlarını değerlendirerek işlemleri adım adım gerçekleştirebilmiş, %33.2'si verilen bağıntıları kendi aralarında ilişkilendirerek başka bir bağıntıya dönüştürebilmiştir.

### 3.3. Hem İşlem Hem de Kavram Bilgisi Gerektiren Sorularla İlgili Bulgular ve Yorumları

Gerçi Tablo 3'te görüldüğü gibi ikinci sınavın bütün soruları aynı zamanda işlem bilgisi de içermektedir. Ancak, 5. soru en açık bir şekilde hem işlem bilgisi hem de kavram bilgisi içermektedir.

**Soru 5:**  $f: R \rightarrow R$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;  $f(2)f(-1) + f^{-1}(4)f^{-1}(1) = ?$



Çalışmaya katılan öğrencilerden Ahmet'in fonksiyonun tersi kavramını tam olarak öğrenemediği için verilen grafikten yararlanarak,  $f^{-1}$  olan ters fonksiyonu grafikte eşleştirememiştir.  $f^{-1}(4)$  değeri için  $f(-4)$  değerini ve  $f^{-1}(1)$  değeri için  $f(-1)$  değerini kullanarak soruyu aşağıdaki gibi çözmeye çalışmıştır:

$$1. -4 + -1. -1 = -4 + 4 = 0$$

Duygu ise farklı bir kavram yanlışına düşmüştür. Çözümünden de anlaşılacağı gibi  $f^{-1}(4)$  için

$\frac{1}{f^{-1}(4)}$  ve  $f^{-1}(1)$  için de  $\frac{1}{f^{-1}(1)}$  ifadesini kullanmıştır:

$$1. -4 + \frac{1}{3}. \frac{1}{2} = -4 + \frac{1}{6} =$$

Ahmet ve Duygu gibi birçok öğrenci (%35.2) fonksiyonun tersi kavramını taşıdığı anlamla birlikte doğru olarak öğrenememiştir. Bu nedenle sembolleri taşıdıkları anlamlar ile imgeleyememiş, soruyu grafikte eşleştirememiştir. Bu durum, çalışmaya katılan öğrencilerin önemli bir kısmının işlemsel ve kavramsal bilgi bağlamında yetersiz olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin işlem ve kavram bilgisi gerektiren sorulara verdiği cevaplardan, sorulara göre ölçekleri doğru, yanlış ve cevap vermeme dağılımları Tablo 4'te gösterilmiştir:

**Tablo 4. İşlem ve kavram bilgisi gerektiren sorulara verilen cevapların dağılımları**

İşlem Bilgisi Gerektiren Sorulara Verilen Cevap Yüzdeleri							Kavram Bilgisi Gerektiren Sorulara Verilen Cevap Yüzdeleri						
Soru	Doğru		Yanlış		Boş		Soru	Doğru		Yanlış		Boş	
	$f$	%	$f$	%	$f$	%		$f$	%	$f$	%	$f$	%
1	30	12	153	61,2	67	26,8	1	27	10,8	66	26,4	157	62,8
2	87	34,8	101	40,4	62	24,8	2	42	16,8	134	53,6	74	29,6
3	55	22	113	45,2	82	32,8	3	34	13,6	52	20,8	164	65,6
4	154	61,6	68	27,2	28	11,2	4	93	37,2	99	39,6	58	23,2
5	118	47,2	101	40,4	31	12,4	5	71	28,4	88	35,2	91	36,4
6	123	49,2	112	44,8	15	6	6	92	36,8	96	38,4	62	24,8
7	153	61,2	74	29,6	23	9,2	7	44	17,6	127	50,8	79	31,6
8	133	53,2	81	32,4	36	14,4	8	56	22,4	77	30,8	117	46,8
9	95	38	127	50,8	28	11,2	9	91	36,4	77	30,8	82	32,8
10	47	18,8	124	49,6	79	31,6	10	79	31,6	124	49,6	47	18,8
<b>Ortalama</b>	39,8		42,2		18		<b>Ortalama</b>	25,2		37,6		37,2	

Tablo 4’te görüldüğü gibi en fazla boş bırakma yüzdesi kavram bilgisi gerektiren sorularda, buna karşın işlem bilgisi gerektiren sorularda boş bırakma yüzdesinin çok düşük olduğu gözlenmiştir. En fazla doğru yüzdesi ve yanlış yüzdesi işlem bilgisi gerektiren sorularda gözlenmiştir. Matematiksel bilgileri ağırlıklı olarak işlemsel nitelikte olan öğrenciler yukarıdaki çözümlerden de görüldüğü gibi çoğu zaman kullandıkları işlemlerin arkasında matematiksel kavramların olduğunu farkında olmazlar. Matematiği işlemsel olarak algılayan bu gruptan öğrencileri Schoenfeld (1985), matematiğin bir anlamı olduğundan habersiz bireyler olarak tanımlamaktadır. Bu tür öğrencilere göre matematik yapmak anlamsız işlemlerin, sembollerin ezberlenerek öğrenilmesi ve kullanılmasıdır. Bu da öğrencinin matematikte yaşadığı öğrenme zorluğunun matematikle ilgili algılamalarından kaynaklandığını göstermektedir.

### **Sonuçlar**

Lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasını işlem ve kavram bilgisi bağlamında değerlendirmek amacıyla yapılan bu çalışmada ortaya çıkan sonuçlar kısaca üç alt başlık altında toplanmıştır.

#### ***İşlem Bilgisinin Göstergeleri***

İşlemsel bilgiye sahip bir öğrenci problemde verilen bilgileri cebirsel olarak ilişkilendirebilir, bu ilişkiyi yansıtan sembolik ifadeleri kullanarak doğru denklem kurabilir ve denklemi geçerli işlem basamaklarını yürüterek çözebilir. İşlem bilgisini kısaca “*nasıl yapıldığını bilmek*” olarak tanımladığımızda işlemsel bilgi ile ilgili göstergeleri de karakterizasyon ölçeğinin kriterleri ışığında kolayca ortaya koyabiliriz. Öğrencilerin yanıtlarını bu yöntemle irdelediğimiz bulgular ve tartışma bölümünde ortaya çıkan işlemsel bilgi göstergeleri yorumlandığında aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

1. Öğrencilerin geçmiş tecrübelerindeki problem çözümlerini, sorgulamadan ve ilişkilendirmeden hatırladıkları kadarıyla yeni problemlerin çözümlerinde de kullanmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Çizelge 4’te işlem bilgisi gerektiren sorulara verilen yanlış ve yetersiz cevapların yüzdelik olarak ortalaması %42.2 ve boş bırakılanların yüzdelik olarak ortalaması %18 olduğu görülmektedir. Bu iki ortalama birlikte düşünüldüğünde araştırmaya katılan öğrencilerin yaklaşık %56’sının işlem yürütme becerilerinin yetersiz olduğu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, çoğu öğrencinin soruda verilen bağıntıların bir kez kullanılır gibi yanlış bir yargı geliştirmeleri ardışık düşünme yeteneklerinin de gelişmediğini göstermektedir. Benzer şekilde, cebir öğretiminde öğrencilerin güçlükleri ile ilgili yapılan bir araştırmada da öğrencilerin aritmetik işlem yapmada yetersiz oldukları ve ardışık düşünme becerisi geliştiremedikleri bulunmuştur (Ersoy ve Erbaş, 2000).

2. Öğrencilerin yanıtlarına bakıldığında çoğunun *matematiksel öğrenmeyi* kuralları, bağıntıları ve özellikleri bilip bunları bilgi düzeyinde kullanma olarak gördükleri ortaya çıkmaktadır. Bu öğrencilerin çoğunun müfredatta yer alan matematik bilgilerini hatırlayamadıkları, bağıntıları ve özellikleri yanlış kullanarak matematiksel geçerliliği olmayan işlemler yaptıkları gözlenmiştir. Bu sonuçlar, öğrencilerin matematiksel bilgileri yüzeysel ya da ezberleyerek öğrendiklerini ortaya koymaktadır. Bütün bu sonuçlar

ilgili literatürün sonuçlarıyla örtüşmektedir (Schoenfeld, 1985; McCormick, 1997; Jinfa, 1998).

### ***Kavram Bilgisinin Göstergeleri***

Öğrenciye matematiksel düşünme gücü kazandıran kavram bilgisini kısaca “işlemler arasındaki ilişkileri görebilmek ve onları ilişkilendirebilmek” olarak tanımlarsak kavramsal bilginin göstergeleri de kolayca ortaya çıkmış olur. Bu kriterlere göre öğrencilerin yanıtları yorumlandığında aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

1. Kavramları taşıdıkları anlamlarla ilişkilendirip öğrenemediklerinden dolayı öğrencilerde cebir bilgilerini içeren kavramlar hakkında yüksek oranda yanlışlar olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin problemin yapısıyla değil tipi ile ilgilenmeleri nedeniyle soruyu bir bütün olarak algılamada zorlandıkları, sayısal verileri ilişkilendirmeden rutin işlemler yapmaları nedeniyle de soruyu anlamlaştırmadıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin yanıtları nitel olarak değerlendirildiğinde cebir bilgisinin temelini oluşturan sayılar konusunda kavram yanlışlarına sahip oldukları anlaşılmaktadır. Benzer şekilde, McCormick de (1997) öğrencilerin önceden öğrenilen matematik bilgilerini, bağıntıları ve özellikleri, kavrama düzeyinde kullanamadıklarına ve bu bilgileri ilişkilendirerek öğrenemediklerine işaret etmektedir.

2. Genellemelerde bulunup farklı çözüm yollarıyla çözüme ulaşan çok az oranda öğrenci, bilgilerini uygulama düzeyinde kullanabilmiştir. Bu öğrencilerin hem işlem hem de kavram bilgisine sahip olmaları neticesinde bunu yapabildikleri anlaşılmaktadır. Buna rağmen öğrencilerin önemli bir kısmının grafiklerde verilenleri konu ile ilişkilendiremeyip grafikleri okuyamamaları, şekil ile verilenleri problemin özelliklerini içeren bilgilerle eşleştirememeleri kavram bilgilerinin yetersiz olduğunu göstermektedir.

### ***Hem İşlem Hem de Kavram Bilgisinin Göstergeleri***

1. Matematiğin dilini oluşturan sembollerin anlamlarının bilinmemesi ve yanlış imgelemesi öğrencilerin cebirsel yanlışlara sahip olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin işlem ve kavram yanlışlarının olması öğrencilerin bilgiyi aktarıldığı gibi değil kendilerine göre anlamlandırarak aldıklarını göstermektedir. Bazı öğrencilerin problemde verilenleri ilişkilendiremeyip rastgele çözüm yolları oluşturmaları geçmiş tecrübelerini yaşadıkları yeni durumlara taşıyamadıklarını göstermektedir. Bu öğrenciler aynı zamanda öğrendikleri bilgileri karşılaştıkları yeni durumlara uyarlamakta ve bu durumlarla ilişkilendirmekte zorluk çekmektedirler.
2. Tablo 4’te görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğrencilerin yaklaşık %75’i kavramsal bilgi gerektiren soruları ya yanlış cevaplamış ya da boş bırakmıştır. Bu sonuç çoğu öğrencinin cebirsel bilgilerinin kavramsal ve işlemsel bağlamda yetersiz olduğuna işaret etmektedir. Önemli oranda öğrencinin soruları cevapsız bırakması geçmiş tecrübelerini, yaşadıkları anlara taşıyamadıklarını ve geçmişte yaptıkları problem çözümleriyle yeni problemleri eşleştirmede zorlandıklarını göstermektedir.



Kavram bilgisi gerektiren soruların daha fazla oranda yanıtız bırakılması ve işlem bilgisi gerektiren soruların doğru ve yanlış yzdzelerinin yzksk olması, zđrencilerin işlem bilgisi gerektiren sorularda kendilerine daha zok gzyvendiklerini ortaya koymaktadır. Gzyrldzđđ gibi bu gzyven de tek başına işlem bilgisi gerektiren soruların doğru cevaplandırılmasına yetmemektedir. Bu sonuç zđrencilerin bzyzok zozunluğunun zđrenme zorluğu yařadđđını ve yzksk zđretimde matematik zalışmaya hazır olmadıklarını gzystermektedir. Işlem bilgisine gzyvenen zđrencilere gzyre matematik yapmak işlemlerin, sembollerin ezberlenerek zđrenilmesi ve ustalıkla kullanılmasıdır. Bu da zđrencinin matematikte yařadđđı zđrenme zorluğunun matematikle ilgili algılamalarından kaynaklandđđını gzystermektedir. Bunun anlamı kısaca şudur: Zđrencinin matematikle ilgili algıları, inançları başarısını doğrudan etkilemektedir.

## Zderiler

Zalışmada varılan sonuçlara dayanılarak bazı zderilerde bulunulabilir. Ancak bilinmelidir ki bu zderiler ZSS gerçeği dikkate alınmadan yapılmıştır. Zzknz, işlem bilgisini znn plana zıkaran ve sistem içinde her şeyi şekillendiren ZSS gerçeği ortada iken kavramsal zđrenmeyi znn plana zıkarak bir matematik zđretimi için nasıl zderilerde bulunulabilir ki. Ya onunla gideceksiniz ve bu zalışmanın sonuçlarını unutacaksınız. Ya da ZSS'yi unutacak bu zalışmanın sonuçlarına bakacaksınız. Bzylece, bu zderiler matematik eğitimcisi olarak ZSS ile yaşamak zorunda olmadđđımızın mesajını vermektedir.

1. Başkalarının zıkarımlarını ve zozzmlerini ezberlemeyi zozndiren bir matematik zđretimi yerine zđrencilere kendi zđrenmelerinde aktif olma, kendi zıkarımlarını ve zozzmlerini zreterek başkalarının bulguları ve zozzmleri ile karşılaştırma fırsatı sağlayan zđrenme ortamları sunulmalıdır. Bzylece, sorgulayan ve yorumlayan, mantıksal zıkarımda bulunabilen, bilgi parçacıklarını sentezleyerek anlamlı ve kullanılabilir bilgiler inşa edebilen zđrenciler yetiştirilmiş olacaktır.

2. Matematiksel anlama zđrencinin formzlleri bilmesi, hesaplamaları doğru yapması ile değil, kavramları, işlemleri anlamasına ve matematiksel dzyşnmesinin gelişmesine bağlıdır. Okullarımızda konuların birbirine benzeyen zok sayıda alıştırma tzyrnden zrnkler zozzmlere verilmesiyle zđrencinin işlemsel bilgisinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Bunun yerine kavramsal bilginin kazandırılması amaçıyla, nedenlerin niinlerin tartıřıldđđı yorum gzycynz artıracak, konunun zoznzy kapsayacak araştırma tzyrnden problemlere yer verilmelidir.

3. Bu araştırma, zđrencilerin cebirsel bilgilerinin işlemsel ve kavramsal bilgi bağlamında denge içinde olmadđđını ve ağırlıklı olarak işlemsel bilgiye dayandđđını buna bağlı olarak da kavramlarla ilgili yzyzeysel bilgilere sahip olduklarını ortaya koymuştur. Bu sonuç, zđrenilen bilgilerin doğasına bağlı olarak eğitim-zđretim szyrecinde bireysel farklılıkların oluştuğuna işaret etmektedir. Zđrencilerin sahip olduğu bilginin doğasına bağlı olarak zđrencinin zđrenme stilleri, matematiksel etkinliklere yznelişleri ve katılımları da şekillenmektedir (DiSessa, 1985). Kavramsal ve işlemsel bilgisi denge içinde olan zđrenci yeni bilgileri kısa szyrede zıbucaak ilişkilendirip yorumlayıp kullanabildiđđi gibi kavramsal bilgi yznden zayıf zđrencilerin bunu yapması ya oldukça zor olmakta ya da uzun zaman almaktadır. Matematik

öğretim programlarında çok sayıda konu kısıtlı zamanda hızlı bir şekilde öğrencileri bilgi bombardımanına tutarak öğretilmeye çalışıldığından öğrenciler kavramsal öğrenme yerine ezber yoluyla matematiksel işlemleri ve kuralları öğrenme yolunu tercih etmektedir. Dolayısıyla, bireysel farklılıklar dikkate alınarak işlemsel ve kavramsal bilgiye eşit oranda ağırlık veren uygun öğrenme ortamları tasarlanmalıdır. Kavramsal ve işlemsel bilginin dengelenmesi için eğitim-öğretim sürecinde çok sayıda konu ile ilgili yüzeysel öğrenme yerine, öğrencilere daha az konuda derinliğine kavramsal öğrenme olanağı sunulmalıdır. Bu da hedef odaklı öğretim programından kavram odaklı öğretim programına doğru bir değişimi gerektirmektedir.

4. Bu araştırma sadece 5 genel lisenin 250 son sınıf öğrencileri ile sınırlıdır. Bu konu ile yapılacak yeni bir çalışma Özel Liseleri, Fen ve Anadolu Liselerini de ele alarak farklı okullardaki öğrencilerin cebirsel bilgilerinin doğasını karşılaştırmalı olarak değerlendirebilir.

5. Bu çalışmada öğrencilerin sadece cebir bilgisi ele alınmıştır. Matematiğin kümeler, fonksiyonlar ve geometri gibi diğer konularında da benzer araştırmalar yapılarak öğrencinin matematiksel bilgisinin doğasını belirleyecek yeni ölçütler geliştirilmeli ve öğrencilerin matematiksel bilgileri ile ilgili daha bütüncül karakterizasyonlar yapılmalıdır.

#### Kaynaklar

- Baki, A. (1995). What Prospective Teachers Need to Know to Teach Conceptually in Mathematics? *The World Conference on Teacher Education*. Çeşme, Turkey.
- Baki, A. (1996). Okul Matematiğinde Ne Öğretelim Nasıl Öğretelim?, *Hacettepe Eğitim Dergisi*, 41-49.
- Baki, A. (1998). Matematik Öğretiminde İşlemsel Ve Kavramsal Bilginin Dengelenmesi. *Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu'na Sunulmuş Bildiri*.
- Bell, A. A.; Baki, A. (1997). *Ortaöğretim Matematik Öğretimi Cilt I.*, YÖK, Ankara.
- Cobb, P. (1986). Context, goals, beliefs, and learning mathematics, *For the Learning of Mathematics FLM*, 6. 2 - 9.
- DiSessa, A. (1985). Learning about knowing. In Klen, E. (Ed). *New Directions for Child Development*. San Francisco, Jossey-Basic Inc.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. The Flamer Press, London.
- Ersoy, Y.; Erbaş, A., (2000). Cebir Öğretiminde Öğrencilerin Güçlükleri –II: Yanlırlarla İlgili Öğretmen Görüşleri, *IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi 2000 Bildiriler*. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi. Ankara.
- Hiebert, J. ve Lefevre, P. (1986). Conceptual And Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis, *The Case of Mathematics*, 1-28.
- Jinfa, C. (1998). Exploring Students' Conceptual Understanding of The Averaging Algorithm. *School Science and Mathematics*, 98(2), 93-98.
- Kaynak, M.; Narlı, S.; Köroğlu, H.; Çelik, A. ve Alkan, H. (2000). 9., 10. ve 11. Sınıf Öğrencilerinin 9. Sınıf Matematik Dersinde Düşükleri Bazı Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi ve Çözümüne Yönelik Öneriler. *IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi 2000 Bildiriler*. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi. Ankara.

- McCormick, R. (1997). Conceptual and procedural knowledge. *International Journal of Technology and Design Education*, 2: 141-159.
- Noss, R. ve Baki, A. (1996). Liberating School Mathematics From Procedural View, *Journal of Education Hacettepe University*, 179-182.
- Porter, M. ve Masingila, J. (2000). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. *Educational Studies in Mathematics*. 42: 165-177.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando.
- Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Boks. Middlesex. England.

**EK 1: İŞLEMSEL BİLGİYİ KARAKTERİZE ETMEK İÇİN SORULAN 10 SORU VE KRİTERLERİN DAĞILIMI**

1.  $a^2=a+1$  ise  $a^5$  in a cinsinden en sade değerini bulunuz.  
(Kriterler : A1, A2, A3, C1)

2.  $f(x) = x.f(x-1) - 3$ ,  $f(1) = 2$  ise  $f(4) = ?$   
(Kriterler: A1, A3, C1)

3. Q (Rasyonel sayılar)'da  $\frac{1}{x\Delta y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  biçiminde " $\Delta$ " işlemi tanımlanıyor.  $(a\Delta 1)\Delta 6 = \frac{3}{5}$  olduğuna göre a kaçtır?  
(Kriterler : A1, A2, A3, C1, C3)

4.  $\frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 9} : \frac{x^2 - 64}{x^2 - 6x + 9}$  ifadesinin en sade biçimini bulunuz.  
(Kriterler : A1, A2, C1)

5.  $\frac{(-\frac{1}{2})^7 * (-2)^6}{(-2)^5 * (-2)^{-4}}$  işleminin sonucu kaçtır?  
(Kriterler : A1, A2, C1,)

6.  $\frac{\sqrt{(-2)^2 + \sqrt[3]{-8}} - \sqrt{(-5)^2}}{\sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt{4}}$  İşleminin sonucunu bulunuz.  
(Kriterler : A1, A2, C1, C3)

7.  $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$  ve  $a+b+3c=34$  olduğuna göre a.b.c çarpımının değeri nedir?  
(Kriterler: A1, A2, A3, C1, C3)

8.  $a=1,3$  ve  $b=4,3$  olduğuna göre  $\frac{(a+b)^2 - 4ab}{3a - 3b} = ?$   
(Kriterler: A1, A2, A3)

9.  $a+3b=2$ ,  $c+3b=10$  ve  $ac=14$  olduğuna göre  $a^2+c^2=?$   
(Kriterler: A1, A2, A3, C2, C3)

10.  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$  polinomu veriliyor.  $P(1 - \sqrt[3]{2}) = ?$   
(Kriterler: A1, A2, A3, C3,)

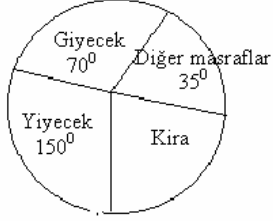
## EK 2: KAVRAMSAL BİLGİYİ KARAKTERİZE ETMEK İÇİN SORULAN 10 SORU VE KRİTERLERİN DAĞILIMI

1. Bir doğal sayı 5 ile bölündüğünde 3, 9 ile bölündüğünde 5 kalanını veriyor. Bunu sağlayan üç basamaklı kaç doğal sayı vardır?  
(Kriterler: A1, A2, B2, B3, C2)

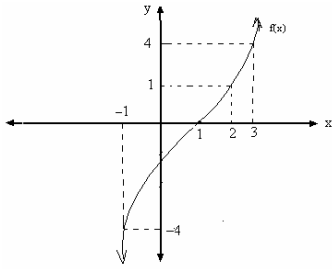
2. Her ay kalan borcunun  $\frac{1}{5}$ 'ni ödeyen bir kimsenin 3 ay sonunda 16.000.000 TL borcu kalıyor. Bu kimsenin başlangıçta kaç lira borcu vardı?  
(Kriterler: A1, B2, B5, B6, C2)

3. Hızları 50 m/sn ve 150 m/sn olan iki bisikletli 1000m uzaklıkta birbirlerine doğru, çarpışmak amacıyla, hareket ederler. Onlarla aynı anda 50 m/sn hızlı bisikletlinin köpeği sahibinin yanından 100 m/sn hızla II. bisikletliye doğru koşar. II. ye dokunduğu an tekrar I. ye doğru koşar. Sahibine değdiğinde II. ye doğru yönelir. Bu, iki bisikletin çarpışmasın kadar sürer. Bu çılgın köpek ne kadar yol almıştır.  
(Kriterler : A1, B2, B3, B4, B6, B8)

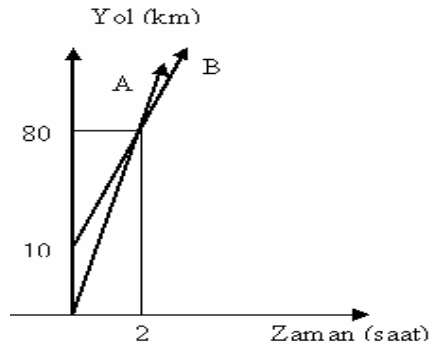
4. Şekildeki grafikte ayda 18.000.000 lira maaş alan bir memurun gider dağılımını göstermekteyiz. Bu memurun kira gideri kaç liradır?  
(Kriterler : A1, A2, B4, B7, B8)



5.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre  $f(2) \cdot f(-1) + f^{-1}(4) \cdot f^{-1}(1) = ?$   
(Kriterler : A1, A2, B1, B3, B7, B8, C1)



6. Bir babanın yaşı, iki kızının yaşları farkının 5 katıdır. 10 yıl sonra babanın yaşı, kızlarının yaşları farkının 6 katına eşit oluyor. Babanın şimdiki yaşı nedir?  
(Kriterler : A1, B2, B4, C2)



7. A ve B araçlarının zamana bağlı olarak aldıkları yollar grafikte verilmiştir. Araçların birleşmesinden 5 saat sonra aralarındaki uzaklık kaç km dir?  
(Kriterler : A1, A2, B1, B2, B3, B7, B8)

8.  $P(x)$  polinomunun  $(x+3)$  ile bölümünden kalan  $-13$  ve  $(x-2)$  ile bölümünden kalan  $2$  olduğuna göre;  $(x+3)(x-2)$  ile bölümünden kalanı bulunuz.

(Kriterler : A1,B2,B3,B4, B5)

9. Bir fabrikada 3 zil vardır. Değişik amaçlarla 1. zil 18 dakikada bir, 2. zil 24 dakikada bir, 3. zil 32 dakikada bir çalmaktadır. Üçü birlikte çaldıktan en az kaç dakika sonra tekrar birlikte çalarlar?

(Kriterler : A1, A2,B2,B3, B4)

10.  $P(x)=x^2+mx+4$  polinomu veriliyor.  $P(x)$  polinomunun bir çarpanı  $(x+3)$  ise  $m=?$

(Kriterler : A1,B1,B4,C3)

*Summary*

**CHARACTERIZING HIGH SCHOOL STUDENTS' ALGEBRA KNOWLEDGE IN TERMS OF PROCEDURAL AND CONCEPTUAL KNOWLEDGE**

**Adnan BAKI\***

**Taliha Kartal\*\***

How do students learn mathematics? How is mathematics being taught? Most importantly what sort of methods and knowledge are employed in solving algebra problems? In order to give adequate answers to these questions we must clarify the distinction between conceptual and procedural knowledge. There is no a solid line between them. The distinction is problematic because it is not always clear enough to be applied precisely to all situations in mathematics. We usually try to identify them through their indications within a mathematical work. Procedural mathematical knowledge consists of knowledge frequently obtained through memorization (Baki, 1998). On the other hand, conceptual knowledge values learning in terms of understanding and not merely in terms of reproducing the teacher's mathematics or algorithms without understanding (Skemp, 1971; Hiebert & Lefevre, 1986; Baki 1998). The indications of procedural knowledge are that rules, principles and equations are understood essentially on the surface level of knowing the principles just by name and definition, and the equations by letters. Students who heavily hold procedural knowledge frequently try to match problems to equations or rules that have been explicitly taught and used previously by the teacher. When they are not able to identify the type of the problem, they usually tend to use basic operations and routines learned previously to solve the problem even the new problem has a different structure or relation. They rely heavily on teacher and textbook as a source of mathematical knowledge. On the other hand, students who hold conceptual knowledge see mathematical problems as a group of related concepts and ideas. They search for structure of the problem rather than look at the type of the problem in order to identify superficial clues. Conceptual knowledge is built when a concept is assimilated into appropriate schema. Conceptual knowledge provides a way of processing data that enables the student to bring past experience usefully to bear on the present situation (Cobb, 1986; Noss & Baki, 1996).

Concept itself cannot be precisely defined, but only exemplified. For example, when the shape of deltoid is explained by mathematical words, one can imagine the shape of deltoid without seeing it before, without hearing its name before, and without having to draw it. Conceptual knowledge as a ring grows when the number of related rings around the actual concept increases. Procedural knowledge consists of two parts. The first part is about symbols and mathematical language. Five is a digit number in mathematical language and can be represent in different ways with different symbols and notations such as "5", "V" or "(101)2". Symbols have their own meanings. For example, "+" is giving the meaning of addition. Such as Ali has 3 apples and his mother gave him 5 more. How much apples does Ali have? In this case,  $3+5$  symbolic representation gets mathematical meaning. The second part is about mathematical objects and models such as angles, vectors, equations, matrices,

---

Address for correspondence: \* Doç.Dr. Adnan Bâki, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon. \*\* Taliha Kartal, Kanuni Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni, Trabzon.

graphics, tables and etc. A mathematical procedure has an algorithmic structure including logical steps (Hiebert & Lefevre, 1986).

Different reasons are shown for inadequacy of mathematics education in Turkey. What kind of knowledge does current mathematics teaching provide for students? Traditional way of teaching mathematics frequently leads to students replicating the teacher's mathematics and solutions without developing conceptual understanding. Therefore, each year a large number of students graduate from high schools and enter the university programs with serious deficiencies in their conceptual understanding. It is evident in the literature that a significant number of students who were successful in high school mathematics failed to study advanced mathematics at university (Noss & Baki, 1996). In order to identify what factors cause lack of success in mathematics, we decided to determine the nature of mathematics knowledge that high school students hold. More specifically, the study aimed to characterize high school students' algebraic knowledge in terms of procedural and conceptual knowledge. This will help us to interpret factors causing lack of success in mathematics education. For this purpose, the research question was shaped as how does students' algebraic knowledge become evident in terms of procedural and conceptual?

## **Method**

### **Instrument**

In this study, two tests including 20 algebra questions selected from numbers, factoring, equations, and functions in high school mathematics curriculum. In the first test 10 questions were asked for identifying students' procedural knowledge in algebra. Similarly, the second test consists of 10 questions for conceptual knowledge in algebra.

### **Sample**

The tests were implemented 250 students at grade 10 and 11 in 5 different high schools in Trabzon during 1999-2000 academic year.

### **Procedures**

Students' responses were analyzed in detail and classified into three categories as characteristics of procedural and conceptual knowledge, and characteristics of knowledge including both procedural and conceptual knowledge at the same time. These categories were developed as a result of the pilot studies to characterize algebraic knowledge. They can be summarized as below:

A: The first category: criterions for procedural knowledge

A1: Completing procedures step by step

A2: Using previous mathematical knowledge at information level

A3: Using algebraic relations and performing fundamental mathematical routines in solving equations



B: The second category: criteria for conceptual knowledge

B1: Understanding basic mathematical concepts

B2: Making links between properties within the task

B3: Using previous mathematical knowledge at conceptual level

B4: Understanding the problem as a whole and utilizing the clues appropriately

B5: Simplifying problems through using sub statements and representations

B6: Simplifying hard problems with shapes, graphics, or tables

B7: Matching the problem with shapes and graphics

B8: Identifying the properties of the problem and making connections with related knowledge

B: The third category: criteria for both procedural and conceptual knowledge

C1: Understanding mathematical symbols and notations, solving equations through simplification and substitution

C2: Solving word problems by converting them into algebraic equations, and evaluating solutions in a logical way

C3: Establishing interrelationships between given properties and relations, and transforming them into a new relation

### **Findings**

The responses to the questions as a whole indicated that students' knowledge relied heavily on procedural knowledge. But their procedural knowledge appeared to be insufficient to solve algebraic problems. A significant number of students were not able to meet with criteria A1, A2 and A3 in the first ten questions essentially requiring procedural knowledge. Similar results appeared in the second ten questions generally requiring conceptual knowledge. They attempted to solve the problems, but they were not able to complete their solutions step by step in a logical way. Most of them appeared to be unsuccessful carrying out fundamental mathematical routines, and using appropriate algebraic relations in solving equations. Many students appeared not to attain criteria B4, B5, B6 and B7. The students who hold procedural knowledge were not able to utilize related representations, figures, graphics, tables and clues while solving questions requiring mostly conceptual knowledge. When students who solved problems correctly were not able to evaluate their solutions by using previous mathematical knowledge. Majority of the students appeared to recognize and understand mathematical symbols and notations, but they were not able to use them properly in solving equations. Similarly, most of them appeared not to attain criteria C2 and C3. They identified given properties and relations but they were not able to establish interrelationship between them to construct equations necessary for solutions. In Table1, column DS shows the number and percentage of correct answers for each question, column YS shows the number and percentage of incorrect answers for each questions and column BS shows the number and percentage of empty answers for each questions:

**Table 1: The percentages of students' answers to the twenty questions as a whole**

Group I: Questions requiring procedural knowledge							Group II: Questions requiring conceptual knowledge						
Question	correct		incorrect		empty		Question	correct		incorrect		empty	
	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%		<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
1	30	12	153	61,2	67	26,8	1	27	10,8	66	26,4	157	62,8
2	87	34,8	101	40,4	62	24,8	2	42	16,8	134	53,6	74	29,6
3	55	22	113	45,2	82	32,8	3	34	13,6	52	20,8	164	65,6
4	154	61,6	68	27,2	28	11,2	4	93	37,2	99	39,6	58	23,2
5	118	47,2	101	40,4	31	12,4	5	71	28,4	88	35,2	91	36,4
6	123	49,2	112	44,8	15	6	6	92	36,8	96	38,4	62	24,8
7	153	61,2	74	29,6	23	9,2	7	44	17,6	127	50,8	79	31,6
8	133	53,2	81	32,4	36	14,4	8	56	22,4	77	30,8	117	46,8
9	95	38	127	50,8	28	11,2	9	91	36,4	77	30,8	82	32,8
10	47	18,8	124	49,6	79	31,6	10	79	31,6	124	49,6	47	18,8
<b>Avarage</b>		39,8		42,2		18	<b>Avarage</b>		25,2		37,6		37,2

Table 1 indicated that the students participated in this study are good at procedural knowledge. Comparing the number of the empty answers in both groups, it seems that empty answers are much more in group-II than in group-I. The number of correct answers appeared to be much more in group-I including questions mostly requiring procedural knowledge than group-II including questions mostly requiring conceptual knowledge.

### Conclusions

The findings showed that high school students in this study were good at procedural knowledge. Students who were lack of conceptual knowledge in algebra appeared to be unsuccessful in problem solving. On the other hand, students who had enough conceptual knowledge in algebra showed satisfactory performance in solving problems requiring procedural knowledge. They also appeared to possess adequate procedural knowledge as well. In contrast, the students heavily holding procedural knowledge appeared not to develop conceptual understanding in algebra. Consequently, the nature of students' algebraic knowledge seems to be based on procedural knowledge. As we know mathematical learning is not just procedural one. Long term and functional mathematical understanding should relay on the conceptualizing mathematical procedures, structures and meanings rather than knowing how to use formulae and carrying out calculation. Current high school mathematics could not accomplish this kind of mathematical understanding. Current mathematics teaching in high schools should emphasize on conceptual understanding rather than procedural understanding. To be effective in mathematics it is necessary to use both conceptual and procedural knowledge. It means that students' mathematics should be in balance between procedural and conceptual.