

Foucault sarkacı ve salınım düzleminin hareketi

Oktay YILMAZ^{1*}, Çılga MİSLİ UÇMAZ²

¹Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Çanakkale, Türkiye

²Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fizik ABD, Çanakkale,

Geliş Tarihi (Received Date): 01.08.2022

Kabul Tarihi (Accepted Date): 20.12.2022

Öz

Robert Crease'in bilim insanlarına "Tüm zamanların en güzel bilimsel deneyleri nelerdir?" diye sorduğu anket çalışmasında, Foucault sarkacı bilimde en güzel ilk on deney içinde yerini alır. Fizikte geometrik faz konusu ele alındığında Hannay açısı hesaplanırken Foucault sarkacı önemli bir örnektir. Newton'nun ikinci hareket yasası eylemsiz (ivmesiz) referans sisteminde geçerlidir. Yerküre ivmeli bir sistem olduğu için Newton'nun ikinci hareket yasası Coriolis, Euler ve merkezkaç gibi hayali kuvvetler eklenerek düzeltilir. Bu makalede Foucault sarkacının çalışma ilkesi, sarkaç denklemleri, başlangıç değerlerini içeren çözümleri, Foucault'nun 1851 yılındaki deneyinde kullandığı sayısal değerlerle, açık ve anlaşılır bir şekilde sunulmak istenmiştir. Bununla birlikte Hannay açısı açık bir şekilde hesaplanmıştır. Foucault, Paris'te bulunan görkemli Pantheon kilisesinin kubbesine meşhur sarkacını asarak, ilk defa 1851 yılında sarkacın salınım düzleminin yavaş yavaş dönüş hareketini gözleyerek, yerkürenin kendi eksenini etrafında döndüğünü ve yerkürenin bir eylemsiz sistem olmadığını ispatladı. Böylece, gökyüzü gözlemine ve teleskoba ihtiyaç duymadan yerkürenin dönüşü hissedilir ve görünür hale geldi. Penceresi olmayan bir odanın içinde bile yerkürenin dönüşü ispatlanabilir ve dikkatli ölçüm yapılarak sarkacın asılı bulunduğu bölgenin enlem açısı ölçülebilir. Foucault sarkaçları dünyanın pek çok yerinde sergilenir ve keşfin yapıldığı 1851 yılından bu yana gösteriler yapılarak kutlanır. İtalyan bir düşünür ve yazar olan Umberto Eco'nun "Foucault Sarkacı" adını verdiği bir romanında da konusu geçmektedir.

Anahtar Kelimeler: Dönen sistemler, Foucault sarkacı, Hannay açısı, hayali kuvvetler, presesyon periyodu

*Oktay YILMAZ, o.yilmaz@comu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-7325-2458>

Çılga MİSLİ UÇMAZ, cilga.misli@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7771-7873>

Foucault's pendulum and motion of the oscillating plane

Abstract

Robert Crease asked scientist, "What are the most beautiful scientific experiments of all time?" According to his questionnaire, Foucault's pendulum is among the top ten best experiments of all time in science. Foucault's pendulum is an important example in finding the Hannay angle in the geometric phase subject in physics. Newton's second law of motion holds only in inertial frames of reference (unaccelerated with respect to the distant stars). Since the Earth is an accelerated system, Newton's second law of motion is corrected by adding fictitious forces such as Coriolis, Euler and centrifugal forces. In this article, it is aimed to present working of essential principle of Foucault's pendulum, pendulum equations, solutions including initial conditions, by using the numerical values used by Foucault in his experiment in 1851, in a clear and understandable way. Moreover, the Hannay angle is calculated explicitly. By hanging his famous pendulum beneath the dome of the magnificent Pantheon church in Paris. Foucault observed for the first time in 1851 that the swinging plane of the pendulum rotates slowly, proving that the earth revolves around its own axis and that the earth is not an inertial system. Thus, without any sky observation and using telescope, the rotation of the earth became perceivable and visible. Even in a room without a window, the rotation of the earth can be proved, and the latitude of the pendulum can be measured by careful measurement. Foucault pendulums are exhibited in many parts of the world and have been celebrated with demonstrations since the discovery made in 1851. The subject is also mentioned in a novel called "Foucault's Pendulum" by Umberto Eco who is an Italian thinker and writer.

Keywords: *Rotating frame, Foucault's pendulum, Hannay angle, fictitious forces, precession period*

Giriş

Jean Bernard Leon Foucault (1819-1868), ışık, optik ve mekanik konuları üzerinde çalışmaları olan son derece yaratıcı bir deneycidir. Işığın havadaki hızının sudaki hızından daha yüksek olduğunu göstermiş ayrıca ışığın mutlak (vakum) hızını da ölçmüştür. Gökyüzündeki cisimlerin fotoğraflarını çekmiş ve fotoğraf tekniğini geliştirmiştir. 1851'in başlarında Foucault, ünlü keşfine yol açan içgörüyü sahipti. Bu tesadüf, bir teleskopun çalışmasını düzenlemek için bir sarkaçlı saatin yapımı esnasında ortaya çıktı. Bu cihazın makineye dönüştürülmesi sırasında, Foucault, torna aynasına sabitlenmiş titreşen çubuğun salınım düzleminin, aynayı yavaşça çevirdiğinde bile, yönelim olarak sabit kaldığını farketti. Bu gözlem ona, serbestçe salınan sarkacın salınım hareketinin, bir şekilde dünyanın dönüşü ile ilişkili olabileceği fikrini düşündürdü.

Böylece, sarkacı Dünya'nın kendi çevresinde döndüğünü daha açık görebilmek için kullanmak istedi. 1850'li yıllarda Dünya'nın döndüğü bilinse bile, bu sadece astronomi gözlemlerine dayanıyordu. Teleskobu olmayan kişilerin veya kullanmayı bilmeyen kişilerin Dünya'nın döndüğüne ikna olmaları pek kolay görünmüyordu [1]. Kuzey kutup noktasının yukarısından bakıldığında Dünya, saat ibrelerinin hareketinin ters yönünde döndüğü için gökyüzündeki Güneş ve yıldızlar da saat yönünde hareket ediyormuş gibi görünecektir. Bu, dünyanın dönmesinin bir ispatı olarak düşünülebilir, fakat eski Yunanlı düşünürlerin söylediği gibi durgun olan yerkürenin etrafındaki gökkürenin dönmesi durumunda da aynı şey gözlenebilir.

Foucault, Paris'te bulunan görkemli Pantheon kilisesinin kubbesine meşhur sarkacını asarak, ilk defa 1851 yılında sarkacın salınım düzleminin yavaş yavaş dönüş hareketini gözleyerek, yerkürenin kendi eksenini etrafında döndüğünü ve yerkürenin bir eylemsiz sistem olmadığını ispatladı [2]. Böylece, gökyüzü gözlemine ve teleskoba ihtiyaç duymadan yerkürenin dönüşü hissedilir ve görünür hale geldi. Penceresi olmayan bir odanın içinde bile yerkürenin dönüşü ispatlanabilir ve dikkatli ölçüm yapılarak sarkacın asılı bulunduğu bölgenin enlem açısı ölçülebilir. Uzak sabit yıldızları bu sarkacın arka planında geometrik bir model olarak düşünürsek, yerkürenin döndüğünü açıkça söyleyebiliriz. Maurice Merleau-Ponty'ye göre neyi ön yada arka planda aldığımıza göre, neyin hareket halinde yada durgun olduğunu algılarız. Örneğin, durgun ve hareket eden trenlerin içinde bulunan yolculardaki algılar gibi. Foucault'nun sarkaç dizgesinde de ya salınımın düzlemi ya da yerküre dönüyormuş gibi algı oluşur. Salınımın düzlemindeki hareketin görülebilmesi için sarkacın ön planda ve sarkacın asıldığı odanın da arka planda tutulması gerekir. Yerkürenin dönüşünü görebilmek için de daha geniş bir uzayı, uzak sabit yıldızları arka plan olarak düşünmek gerekir [1].

Foucault sarkaçları dünyanın pek çok yerinde sergilenir ve keşfin yapıldığı 1851 yılından bu yana gösteriler yapılarak kutlanır. İtalyan bir düşünür ve yazar olan Umberto Eco'nun "Foucault Sarkacı" adını verdiği bir romanda da konusu geçmektedir. Ayrıca, Stony Brook Üniversitesi Felsefe Bölümü'nde Robert Crease'in bilim insanlarına "Tüm zamanların en güzel bilimsel deneyleri nelerdir?" diye sorduğu anket çalışmasında, Foucault'nun sarkacı bilimde en güzel ilk on deney içinde yerini alır [1].

Bu makalede, Foucault sarkacı'nın çalışma ilkesi, sarkaç denklemleri ve başlangıç koşullarını kapsayan çözümleri, Foucault'nun 1851 yılındaki deneyinde kullandığı sayısal değerlerle, açık ve anlaşılır bir şekilde sunulmak istenmiştir. Bunun yanında klasik sistemlerde gözlenen, Hannay açısı olarak bilinen geometrik fazın da basit bir çıkarımı verilmiştir.

bulunur. Dünya'nın dönme açısal hızı sabit olduğu için $\dot{\Omega} = 0$ 'dır ve $r \ll R$ yaklaşımında (2.1)'deki Newton'nun hareket denklemi,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (2.2)$$

ile ifade edilir.

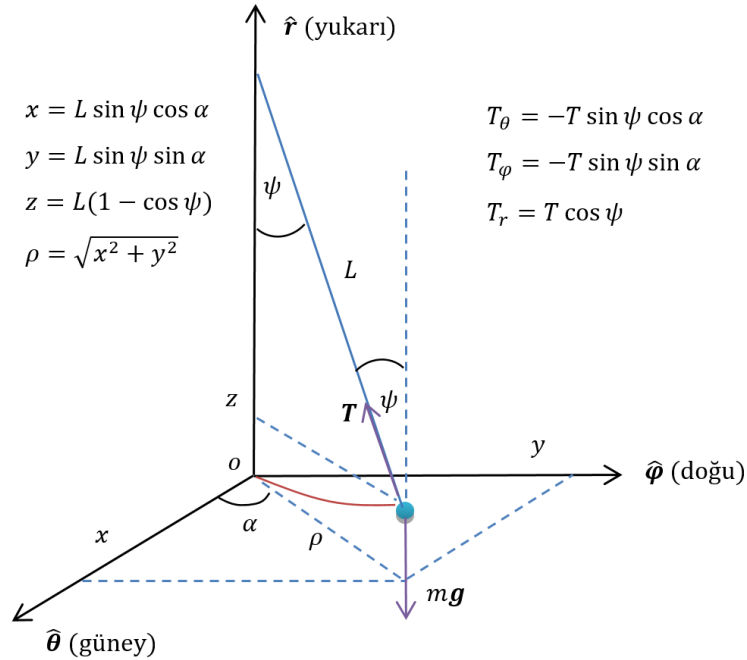
Şekil 1'de Dünya üzerindeki dönen koordinat sisteminde, açısal hız vektörü

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}} = -\Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \quad (2.3)$$

ve büyüklüğü de $\Omega = \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = 0,73 \cdot 10^{-4}$ rad/s'dir. Şekil 2'deki Foucault sarkacına etkiyen kuvvetler

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} \quad (2.4)$$

ile verilir. Burada, \mathbf{T} teldeki gerilme kuvveti ve $m\mathbf{g} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{\mathbf{r}} = -mg\hat{\mathbf{r}}$ kütle çekim kuvvetidir. Evrensel kütle çekim sabiti $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg², Dünya'nın kütlesi $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg ve yarıçapı $R = 6,37 \cdot 10^6$ m olduğuna göre, yer çekimi ivmesinin değeri hesaplanarak $g = 9,81$ m/s² bulunur.



Şekil 2. Foucault sarkacı ve etkiyen kuvvetler

(2.2) denkleminde $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ ve $\mathbf{v} = 0$ durumda ve $\mathbf{T} = -m\mathbf{g} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -m\mathbf{g}_e$ eşitliğinden etkin yer çekimi ivmesi $\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$ bulunur. Bu bizim ölçtüğümüz yer çekimi ivmesidir. (2.3) eşitliği kullanılarak

$$\mathbf{g}_e = -(g - \Omega^2 R \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{r}} + \Omega^2 R \sin \theta \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.5)$$

elde edilir. \mathbf{g} yer çekimi ivmesiyle \mathbf{g}_e etkin yerçekimi ivmesi arasındaki β açısı

$$\tan \beta = \frac{\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta}{g - \Omega^2 R \sin^2 \theta} \quad (2.6)$$

ile belirlenir. (2.6) eşitliğinde $\Omega^2 R = 0,034 \text{ m/s}^2$ olduğuna göre, $\theta = 45,05^\circ$ için en büyük $\beta = 0,1^\circ$ değeri elde edilir. Diğer θ açıları için β küçülerek sıfıra yaklaşır. Kutup ve ekvator bölgesinde $\beta = 0$ olduğunda \mathbf{g} ve \mathbf{g}_e vektörleri çakışır. (2.5)'teki ivmenin θ açısına bağlı olması nedeniyle, $m\mathbf{g}_e$ etkin yer çekimi kuvveti kutuplarda ekvatora göre daha büyüktür. Bu nedenle yerküre elipsoit şeklindedir. İyi bir yaklaşıklıkla $\frac{\Omega^2 R}{g} = 0,35 \cdot 10^{-2}$ olduğu için (2.5)'teki etkin ivmenin değeri $\mathbf{g}_e \approx \mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{r}}$ alınabilir. Böylece (2.2)'deki hareket yasası sadeleşerek

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir.

Şekil 2'deki $\sin \psi = \sqrt{x^2 + y^2}/L = \rho/L$ ve $\cos \psi = (L - z)/L$ ifadesinden $x^2 + y^2 + (L - z)^2 = L^2$ denklemi elde edilir. Bu denklem merkezi $(0,0,L)$ ve yarıçapı L olan bir küre denklemdir. m kütlesi kürenin yüzeyinde hareket ederken

$$z = L \mp L \sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2)}{L^2}} \quad (2.8)$$

yüksekliği x ve y 'ye bağlı olarak değişir. Bu nedenle sistemin serbestlik derecesi aslında üç değıl ikidir. Buradaki $+$ ($-$) işareti üst (alt) yarı küre için çözümleri verir.

Dönen koordinat sisteminde m kütleinin konum vektörü

$$\mathbf{r} = x\hat{\boldsymbol{\theta}} + y\hat{\boldsymbol{\phi}} + z\hat{\mathbf{r}} \quad (2.9)$$

olarak seçilirse, dönen sistemdeki gözlemciye göre hız vektörü

$$\mathbf{v} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dot{z}\hat{\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

şeklinde alınmalıdır. Sarkaç kütleine etkiyen toplam kuvvetler

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = -\frac{T_x}{L}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{T_y}{L}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(T - mg - \frac{T_z}{L}\right)\hat{\mathbf{r}} \quad (2.11)$$

ve hayali Coriolis kuvveti

$$-2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = 2m\Omega \cos \theta \dot{y}\hat{\boldsymbol{\theta}} - 2m\Omega(\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{z})\hat{\boldsymbol{\phi}} + 2m\Omega \sin \theta \dot{y}\hat{\mathbf{r}} \quad (2.12)$$

(2.7)'de yerine yazıldığında

$$m\ddot{x} = -\frac{T_x}{L} + 2m\Omega \cos \theta \dot{y} \quad (2.13a)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{T_y}{L} - 2m\Omega \cos \theta \dot{x} - 2m\Omega \sin \theta \dot{z} \quad (2.13b)$$

$$m\ddot{z} = T - mg - \frac{T_z}{L} + 2m\Omega \sin \theta \dot{y} \quad (2.13c)$$

hareket denklemleri bulunur. $z \cong \dot{z} \cong \ddot{z} \cong 0$ ve $\Omega\dot{y}/g \ll 1$ varsayımları ile gerilme kuvveti

$$T \cong mg \quad (2.14a)$$

olarak alınırsa çok iyi bilinen Foucault'nun sarkaç denklemlerine ulaşılır:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x + 2\Omega \cos \theta \dot{y} \quad (2.14b)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{L}y - 2\Omega \cos \theta \dot{x} \quad (2.14c)$$

Bu çiftlenimli denklemler $\zeta = x + iy$ kompleks değişkeni ile

$$\frac{d^2}{dt^2}\zeta + i2\Omega \cos \theta \frac{d}{dt}\zeta + \omega_0^2\zeta = 0 \quad (2.15)$$

şeklinde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklem ile verilir.

Burada $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ sarkacın doğal frekansdır [4].

2.2 Denklemin Çözümleri

(2.15)'deki denklem için $\zeta \sim e^{i\gamma t}$ gibi bir çözüm önerilerek

$$\gamma^2 + 2\Omega_r\gamma - \omega_0^2 = 0 \quad (2.16)$$

karakteristik denklemini bulunur. Burada,

$$\Omega_r = \Omega \cos \theta \quad (2.17a)$$

ve

$$\omega = \sqrt{\Omega_r^2 + \omega_0^2} \quad (2.17b)$$

tanımlanarak (2.16) eşitliğinden $\gamma_+ = -\Omega_r + \omega$ ve $\gamma_- = -\Omega_r - \omega$ gibi iki kök bulunur. Bu kökler aynı zamanda salınımın alçak ve yüksek frekanslı kipleridir. $e^{\gamma_+ t}$ ve $e^{\gamma_- t}$ gibi iki lineer bağımsız çözümlerden genel çözüm

$$\zeta = e^{-i\Omega_r t} (A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}) \quad (2.18)$$

iki integral sabiti A_+ ve A_- ile verilir. Başlangıç $t = 0$ anındaki konum (x_0, y_0) ve hız (v_{0x}, v_{0y}) değerleri cinsinden

$$A_+ = \frac{v_{0y}}{2\omega} + \left(\frac{\omega + \Omega_r}{2\omega}\right) x_0 + i \left(\left(\frac{\omega + \Omega_r}{2\omega}\right) y_0 - \frac{v_{0x}}{2\omega} \right) \quad (2.19a)$$

ve

$$A_- = -\frac{v_{0y}}{2\omega} + \left(\frac{\omega - \Omega_r}{2\omega}\right) x_0 + i \left(\left(\frac{\omega - \Omega_r}{2\omega}\right) y_0 + \frac{v_{0x}}{2\omega} \right) \quad (2.19b)$$

katsayıları rahatlıkla bulunur. (2.18)'de tekrar yerine yazılarak

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_r t) \cos(\omega t) + y_0 \sin(\Omega_r t) \cos(\omega t) + \left(\frac{v_{0x} - \Omega_r y_0}{\omega}\right) \cos(\Omega_r t) \sin(\omega t) + \left(\frac{v_{0y} + \Omega_r x_0}{\omega}\right) \sin(\Omega_r t) \sin(\omega t) \quad (2.20a)$$

ve

$$y(t) = -x_0 \sin(\Omega_r t) \cos(\omega t) + y_0 \cos(\Omega_r t) \cos(\omega t) - \left(\frac{v_{0x} - \Omega_r y_0}{\omega}\right) \sin(\Omega_r t) \sin(\omega t) + \left(\frac{v_{0y} + \Omega_r x_0}{\omega}\right) \cos(\Omega_r t) \sin(\omega t) \quad (2.20b)$$

çözümleri elde edilir [5]. Bu çözümlerde $\theta = 90^\circ - \lambda$ ($\cos \theta = \sin \lambda$) alınırsa enlem açısı λ cinsinden ifade edilir. Güney yarımküredeki çözümler bulmak istendiğinde $\theta = 180^\circ - \theta'$ ($\cos \theta = -\cos \theta'$) veya $\lambda = -\lambda'$ yazmak yeterlidir.

3. Bulgular ve tartışma

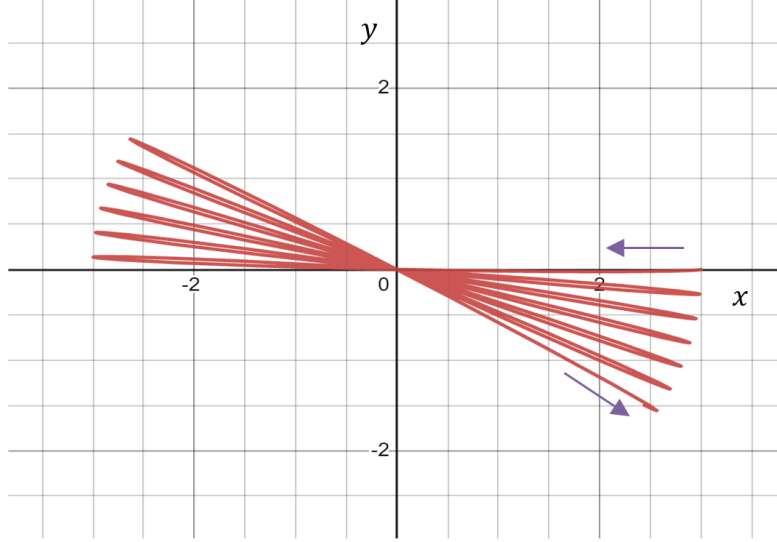
3.1 Salınım düzleminin hareketi

Paris'teki Pantheon kilisesinin kubbесinin altında salınan Foucault sarkacının boyu $L = 67$ m ve sarkacın ucundaki kütle $m = 28$ kg'dır. Paris'in enlem açısı $\lambda = 48,87^\circ$ veya $\theta = 41,13^\circ$ 'dir. (2.20a) ve (2.20b)'deki hareketin başlangıç koşulları $x_0 = 3$ m, $y_0 = 0$ ve $v_{0x} = v_{0y} = 0$ ile belirlenir. Burada $\frac{\Omega}{\omega_0} \cong 0,2 \cdot 10^{-3}$ olduğu için $\omega \cong \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 0,38 \text{ s}^{-1}$ alınabilir ve $\frac{\Omega x_0}{\omega}$ ile orantılı olan terimler de ihmal edilerek

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_r t) \cos(\omega_0 t) \quad (3.1a)$$

$$y(t) = -x_0 \sin(\Omega_r t) \cos(\omega_0 t) \quad (3.1b)$$

çözümleri bulunur. Bu çözümler $x^2 + y^2 = x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$ denklemini sağlar ve (2.8)'de yerine yazılırsa $z(t) \cong \frac{x_0^2}{2L} \cos^2 \omega_0 t$ elde edilir. Presesyon hareketi yaparak $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ periyodu ile salınan sarkacın $0 \leq t \leq 6T_0$ aralığında (x, y) noktasının hareketi Şekil 3'te verilmiştir. Şekil 3'ün daha net görülebilmesi için dünyanın kendi açısal hızından yüz kere daha hızlı döndüğü varsayılmıştır.



Şekil 3. Presesyon hareketi yaparak salınan sarkacın hareketi

Salınım düzlemi ile x eksenindeki presesyon açısının zamanla değişimi

$$\alpha(t) = -\Omega_r t = -(\Omega \cos \theta)t = -(\Omega \sin \lambda)t \quad (3.2)$$

ile verilir. $\alpha = -2\pi$ değerini aldığı anda presesyon periyodu

$$T_p = \frac{T}{\cos \theta} = \frac{T}{\sin \lambda} \quad (3.3)$$

bulunur, burada T dünyanın kendi eksenindeki dönme periyodudur. (3.3)'den presesyon periyodu; kutuplarda $T_p = T = 24$ saat, ekvatorunda $T_p = \infty$ (presesyon gözlenmez) ve Paris'te $T_p = 31,86$ saat $\cong 32$ saat olarak hesaplanır. Tablo 1'de bazı şehirlerin enlem açıları ve presesyon periyotları hesaplanarak verilmiştir.

Şekil 3'te sarkaç salınarak saat yönünde hareket ederken, xy düzleminde pervaneye benzer izler meydana gelir. Ardışık pervaneler arasında $T_0 = 16,53$ s ara ile $\alpha \cong 0,9 \cdot 10^{-3}$ rad'lık açı oluşur ve ardışık pervaneler arasındaki sapma miktarı $s = x_0 \cdot \alpha = 3 \text{ m} \cdot 0,9 \cdot 10^{-3} = 2,7 \text{ mm}$ 'dir. Bir presesyon periyodu içinde $N = \frac{T_p}{T_0} = \frac{2\pi x_0}{s} = 6939$ tane salınım meydana gelir. Bir saat beklendiğinde $\alpha = 0,197$ rad $\cong 11,3^\circ$ ve sapma miktarı da $s = x_0 \cdot \alpha = 3 \text{ m} \cdot 0,197 \cong 0,6$ metredir. Foucault'nun deneyden bulduğu presesyon periyodu 31 saat 47 dakika ve sapma miktarı 2,3 mm'dir [6].

Tablo 1. Bazı şehirlerin enlem açıları ve presesyon periyotları

Ülke	Şehir	Enlem açısı (derece)	Presesyon Periyodu (saat)
Norveç	Oslo	59,91	27,74
İsveç	Stokholm	59,33	27,90
Danimarka	Kopenhag	55,68	29,06
Almanya	Berlin	52,52	30,24
İngiltere	Londra	51,51	30,66
Fransa	Paris	48,87	31,86
Kanada	Ottava	45,42	33,70
Türkiye	İstanbul	41,02	36,57
Türkiye	Ankara	39,93	37,39
Mısır	Kahire	30,04	47,94
USA	New Orleans	29,95	48,07
Meksika	Meksiko	19,43	72,15
El Salvador	San Salvador	13,91	99,83
Nijerya	Abuja	9,07	152,25
Ekvador	Kito	-0,18	7639,45
Peru	Lima	-12,05	114,96
Brezilya	Brasillia	-15,79	88,20
Brezilya	Sao Paulo	-23,54	60,09
Brezilya	Porto Alegre	-30,03	47,96
Avustralya	Sidney	-33,87	43,06
Avustralya	Kanberra	-35,28	41,55
Avustralya	Melburn	-37,84	39,12

Dönen koordinat sisteminde, salınım düzleminin hareketi bu düzleme dik olan $\hat{n} = \frac{\hat{p} \times r}{|\hat{p} \times r|}$ birim vektörü ile betimlenir. (2.9)'daki konum vektörü burada yerine yazıldığında

$$\hat{n} = \frac{-y\hat{\theta} + x\hat{\varphi}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.4)$$

vektörü bulunur. Burada (3.1a) ve (3.1b) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$\hat{n} = \sin(\Omega_r t) \hat{\theta} + \cos(\Omega_r t) \hat{\varphi} \quad (3.5)$$

elde edilir. Bu vektör zaman ilerledikçe saat yönünde döner.

(3.4)'de $\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$ ve $\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$ yerine yazılırsa, eylemsiz sistemdeki

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-(x \sin \varphi + y \cos \varphi \cos \theta) \hat{\mathbf{x}} + (x \cos \varphi - y \sin \varphi \cos \theta) \hat{\mathbf{y}} + y \sin \theta \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1a) ve (3.1b) çözümleri (3.6)'de yerine yazılır ve $\varphi = \Omega t$ alınır

$$\hat{\mathbf{n}} = (-\cos(\Omega_r t) \sin(\Omega t) + \sin(\Omega_r t) \cos(\Omega t) \cos \theta) \hat{\mathbf{x}} + (\cos(\Omega_r t) \cos(\Omega t) + \sin(\Omega_r t) \sin(\Omega t) \cos \theta) \hat{\mathbf{y}} - \sin(\Omega_r t) \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (3.7)$$

vektörü bulunur.

(3.7)'de $\theta = 0$ ($\lambda = 90^\circ$) seçilirse kutup bölgesinde $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$ bulunur. Bu bölgede x eksenine boyunca salınan sarkacın salınım düzlemi değişmez ve y eksenine diktir. $\theta = 90^\circ$ ($\lambda = 0$) olduğunda ekvatora teğet olan $\hat{\mathbf{n}} = -\sin(\Omega t) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\Omega t) \hat{\mathbf{y}}$ vektörü bulunur. Salınım düzlemi ekvator düzlemine dik olacak şekilde dünyayla birlikte hareket eder. (3.7)'de $\theta = 60^\circ$ ($\lambda = 30^\circ$) olduğunda presesyon periyodu $T_p = 2T$ 'dir. Bu bölgede $N = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $t = NT$ değerleri için $\hat{\mathbf{n}} = \cos(N\pi) \hat{\mathbf{y}} = (-1)^N \hat{\mathbf{y}}$ elde edilir. Başlangıç anında $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$ ve $T = \frac{T_p}{2}$ zaman sonra $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$ bulunur. Bu durumda salınım düzlemi 180° dönmüş demektir. $2T = T_p$ zaman sonra gene başlangıç anındaki $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$ bulunur. Böylece salınım düzlemi 360° dönerek tekrar orijinal konumuna gelmiş olur. Paris'in bulunduğu enlemde, örneğin, bir gün süre sonra $\hat{\mathbf{n}} \cong -0,8\hat{\mathbf{x}} + 0,7\hat{\mathbf{z}}$ ve bir presesyon süre sonra da $\hat{\mathbf{n}} \cong -0,9\hat{\mathbf{x}} - 0,5\hat{\mathbf{y}}$ bulunur.

3.2. Hannay açısı

Bu bölümde Foucault sarkacının Hannay açısı hesabı verilmiştir [7]. Sarkaç kütlesi dünyaya teğet bir düzlemde hareket etmektedir ve düzlemde dünyanın kendi eksenine etrafında dönmelerinden dolayı onunla birlikte dönmektedir. Hareket düzlemi dünya etrafında bir tur döndüğünde açı değişkeni α (Şekil 2) dinamik faz yanında ek olarak geometrik faz kazanacaktır. Hannay açısı olarak adlandırılan bu faz başlangıç şartlarından bağımsızdır. Öngörülen varsayımlar altında sarkacın analitik çözümü (2.18) bilindiğinden Hannay açısını bulmak kolaydır. Kompleks çözüm (2.18), $\zeta = e^{-i\Omega_r t} \zeta_d$ şeklinde yazıldığında geometrik fazın $-\Omega_r t$ ifadesinden geldiği görülür, çünkü ζ_d kısmı hareketin başlangıç koşullarını içermektedir. Bunu daha açık bir şekilde görmek için (2.20a) ve (2.20b) denklemlerinde özel başlangıç şartları seçelim: $(x_0, 0)$ ve $v_{0x} = v_{0y} = 0$. Aslında bu şartlar gerçek Foucault sarkacını salınımına bırakmak için kullanılan başlangıç şartlarıdır. Bu durumda (2.20a) ve (2.20b) denklemleri

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_r t) \cos(\omega t) + \left(\frac{\Omega_r x_0}{\omega}\right) \sin(\Omega_r t) \sin(\omega t) \quad (3.8a)$$

$$y(t) = -x_0 \sin(\Omega_r t) \cos(\omega t) + \left(\frac{\Omega_r x_0}{\omega}\right) \cos(\Omega_r t) \sin(\omega t) \quad (3.8b)$$

halini alacaktır. Kompleks çözümün ζ büyüklüğü $|\zeta| = \rho(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ile bulunur:

$$\rho(t) = \frac{x_0 \omega_0}{\omega} \sqrt{\frac{\Omega_r^2}{\omega_0^2} + \cos^2(\omega t)} \quad (3.9)$$

ζ 'nin argümanı veya fazı da $arg(\zeta) = \alpha(t) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ifadesinden elde edilir:

$$\tan \alpha(t) = \frac{-\tan(\Omega_r t) + \frac{\Omega_r}{\omega} \tan(\omega t)}{1 + \frac{\Omega_r}{\omega} \tan(\Omega_r t) \tan(\omega t)} \quad (3.10)$$

Hannay açısını bulmak için denklem (3.10)'da $\tan \phi_0 = \frac{\Omega_r}{\omega} \tan(\omega t)$ şeklinde ϕ_0 fazını tanımlayalım. Bunu denklem (3.10)'da yerine koyarsak $\tan \alpha(t) = \tan(\phi_0 - \Omega_r t)$ bulunur. Böylece sarkaç kütesinin faz ifadesi $\alpha(t) = -\Omega_r t + \phi_0$ olarak elde edilir. Buradaki ϕ_0 ifadesi dinamik fazı, ilk terim $-\Omega_r t$ ise geometrik fazı vermektedir:

$$\alpha(t) = -\Omega_r t + \tan^{-1}\left(\frac{\Omega_r}{\omega} \tan(\omega t)\right) \quad (3.11)$$

Denklem (3.11)'de bir periyot $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ zaman geçtiğinde (dünya bir tur attığında), $\hat{\theta}$ birim vektörüne göre $\zeta(t)$, $-\Omega_r T = -2\pi \cos \theta$ kadar dönmüş olacaktır. Ama bu sürede $\hat{\theta}$ birim vektörü de saat yönünün tersine 2π kadar dönmüş olur. Sonuç olarak toplam faz değişimi Hannay açısını verir.

$$\theta_H = 2\pi(1 - \cos \theta) \quad (3.12)$$

Bu açının çok iyi bilinen bir geometrik anlamı vardır: Şekil 1'den görülmektedir ki, θ_H hareket düzleminin kapalı bir enlem (θ açısı ile belirlenen) boyunca taradığı katı açıya eşittir [8].

4. Sonuç ve öneriler

Etkin yerçekimi ivmesi kutuplarda ekvatora göre daha büyüktür. Bu nedenle yerküreyi oluşturan maddeler kutuplarda daha basık olacak şekilde katılmış ve dünya elipsoit bir şekil almıştır. Teldeki gerilme, yerçekimi ve Coriolis kuvveti ile etkileşen sarkacın hareket denklemi en genel halde çözümlenerek verildi ve Foucault'nun 1851 yılındaki deney sonuçlarıyla uyumlu olduğu gözlemlendi. Kuzey yarımkürede bulunan bir gözlemciye göre, salınım düzlemi saat yönünde hareket eder. Güney yarımkürede salınım düzlemi saat yönünün tersinde hareket eder. Teleskopla gözlem yapmadan kapalı bir ortamda bile dünyanın dönüşü gözlenebilir.

Eylemsiz sistemden bakıldığında, salınım düzleminin normali yine enlem açısına ve zamana bağlıdır. Enlem açısı 30° olduğunda salınım düzlemi tam bir gün sonra 180° döner (Kahire, New Orleans ve Porto Alegre). Presesyonun periyodu ölçüldüğünde sarkacın asılı bulunduğu bölgedeki enlemin açısal değeri ve sarkacın doğal salınım

periyodu ölçüldüğünde yerçekiminin ivmesi hesaplanabilir. Presesyon periyodu kutup bölgelerinde küçük, Ekvator bölgesinde büyüktür. Foucault sarkacıyla yerkürenin kendi eksenini etrafındaki dönüşü ve dönme etkileri açıklanabilir. Bunun yanında Foucault sarkacının klasik geometrik fazı (Hannay açısı) analitik çözümden doğrudan çıkartılmıştır. Bunun hareket düzleminin dünyanın bir tur dönmesi sonucunda taradığı katı açı olduğu bulunmuştur.

1817'de Johann Bohnenberger tarafından keşfedilen mekanik alete sarkacın temel ilkelerini uygulayıp gerçekleştirdi ve buna jiroskop ismini verdi.

Foucault'nun sarkacıyla yaptığı bu büyük keşif bilim dünyasının en ünlü ve unutulmaz deneylerinden biridir. Presesyon periyodunun küçük olduğu (ekvatoradan uzak) bölgelerde birçok üniversite, gözlemevi ve müzelerinde rahatlıkla sergilenebilir.

Kaynakça

- [1] Crease, R. P., **The Prism and the Pendulum: The Ten Most Beautiful Experiments in Science**, 125, Random House, New York, (2003).
- [2] Baker, G. L. ve Blackburn J. A., **The Pendulum: A Case Study in Physics**, 67, Oxford University Press Inc., New York, (2005).
- [3] Barger, V. D. ve Olsson, M. G., **Classical Mechanics: A Modern Perspective**, 229, Mc Graw-Hill Companies, New York, (1995).
- [4] Arovas, D., **Lecture Notes on Classical Mechanics: A Work in Progress**, 220, Department of Physics, University of California, San Diego, (2013).
- [5] Yılmaz, O., ve Misli, Ç. Foucault Sarkacı, **Fizik Eğitimi ve Felsefesi**, 1, 2, 50-63, (2016).
- [6] Kittel, C., Knight, W. D., Ruderman, M. A., Helmholz, A. C. ve Moyer, B. J., **Mechanics, Berkeley Physics Course**, 114, Mc Graw-Hill Companies, New York, (1973).
- [7] Hannay, J. H., Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable hamiltonian, **Journal of Physics A: Mathematical and General**, 18, 221-230, (1985).
- [8] Khein, A. ve Nelson, D. F. Hannay angle study of Foucault pendulum in action-angle variable, **American Journal of Physics**, 61, 2, 170-174, (1993).