Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 13(1), 548-562, 2023
Journal of the Institute of Science and Technology, 13(1), 548-562, 2023

ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618

Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.1154099**

Araştırma Makalesi / *Research Article*

Geliş tarihi / *Received*: 11.08.2022 **Kabul tarihi / *Accepted*: 05.11.2022**

Atıf İçin: Karakaş, M. ve Şevik, U. (2023). Tribonacci-Lucas Dizi Uzayları. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(1), 548-562.

To Cite: Karakaş, M., & Şevik, U. (2023). Tribonacci-Lucas Sequence Spaces. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 13(1), 548-562.

Tribonacci-Lucas Dizi Uzayları

Murat KARAKAŞ[1*], Uğurcan ŞEVİK[2]

Öne Çıkanlar:

- Yeni dizi uzayları,
- Geometrik özellik,
- $\alpha-,\beta-,\gamma-$dual

Anahtar Kelimeler:

- Tribonacci-Lucas sayıları,
- Dizi uzayı,
- Schauder bazı,
- Köthe-Toeplitz dualleri,
- Matris dönüşümü,
- Düzgün konvekslik

ÖZET:

Bu araştırmada, temel olarak Tribonacci-Lucas sayılarını kullanarak yeni dizi uzayları tanımlıyoruz. Daha sonra bu uzayın bazı topolojik özelliklerini inceleyerek, bazı kapsama bağıntıları veriyoruz. Ayrıca uzayımızın Köthe-Toeplitz duallerini hesaplayarak, bazı matris sınıflarını karakterize ediyoruz. Son olarak, uzayımızın düzgün konvekslik, kesin konvekslik, süper yansımalılık gibi geometrik özelliklere sahip olup olmadığını inceliyoruz.

Tribonacci-Lucas Sequence Spaces

Highlights:

- New sequence spaces,
- Geometric properties,
- $\alpha-,\beta-,\gamma-$dual

Keywords:

- Tribonacci-Lucas numbers,
- Sequence space,
- Schauder basis,
- Köthe-Toeplitz duals,
- Matrix transformation,
- Uniform convexity

ABSTRACT:

In this work, we basically define new sequence spaces using Tribonacci-Lucas numbers. Then, we give some inclusion relations by examining some topological properties of these spaces. We also characterize some matrix classes by calculating the Köthe-Toeplitz duals of our space. Finally, we examine whether our space has geometric properties such as uniform convexity, strict convexity, and super-reflexivity.

[1] Murat KARAKAŞ (**Orcid ID:** 0000-0002-5174-0282), Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye

[2] Uğurcan ŞEVİK (**Orcid ID:** 0000-0003-1467-3188), Bitlis Eren Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye

***Sorumlu Yazar/*Corresponding Author*:** Murat KARAKAŞ, e-mail: mkarakas@beu.edu.tr

Bu makale Uğurcan ŞEVİK'in yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

GİRİŞ

Tribonacci sayıları, ilk olarak Amerika'da daha henüz 9. Sınıf öğrencisi iken Mark Feinberg (Feinberg, 1963) tarafından keşfedilmiş olup kendisine Genç Bilim Akademisi Şampiyonluğunu kazandıran projenin içinde yer alan özel bir sayı dizisidir. Mark Feinberg'in Bilim Şenliği için hazırlamış olduğu ve gönderdiği bu çalışma Fibonacci Quarterly dergisi tarafından yayınlanmaya değer bulunmuş ve kendisi gelecek vadeden öğrenci ödülüne layık görülmüştür.

Tribonacci sayılarının dağılımı incelendiğinde, belli bir terimden sonraki her bir sayının, kendisinden önceki ardışık üç sayının toplamı şeklinde olduğu görülmektedir. Böylece bu yeni dizi $q_{n+1}=q_n+q_{n-1}+q_{n-2}$, $n\geq 2$ şeklinde tanımlanmıştır. Dizinin başlangıç terimleri $q_1=1$, $q_2=1$, $q_3=2$ olarak verilmiş olup bu tanımlama Mark Feinberg tarafından başlangıçta q_n dizisi olarak tanımlanmıştır. Ancak daha sonra bu sayılar Tribonacci dizisi olarak adlandırılmış ve terimleri T_n ile gösterilmiştir. Bu dizideki ilk birkaç sayı; 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504 şeklindedir.

Tribonacci sayı dizisinde ardışık iki sayının $\frac{T_n}{T_{n+1}}$ oranı 0.54368901… değerine yakınsar, $\frac{T_{n+1}}{T_n}$ oranı ise 1.83928675… irrasyonel değerine yakınsar. Bu değer Tri-Phi (Φ3) olarak adlandırılmıştır.

Daha sonra, elemanları Tribonacci tekrarlama bağıntısıyla elde edilen ve Fibonacci sayılarının bir genelleştirmesi olan Tribonacci-Lucas sayıları Catalani (2002) tarafından araştırılmıştır. Başlangıç koşulları $V_0=3$, $V_1=1$, $V_2=3$ olan ve $V_{n+1}=V_n+V_{n-1}+V_{n-2}$ bağıntısı ile verilen sayılara Tribonacci-Lucas sayıları denir. Bazı Tribonacci-Lucas sayıları 3,1,3,7,11,21,39,71,131,241,… şeklindedir. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarına ilişkin aşağıdaki özdeşlikleri verebiliriz (Frontczak, 2018):

$$\sum_{k=1}^{n} T_k=\frac{T_{n+2}+T_n-1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} T_{2k}=\frac{T_{2n+1}+T_{2n}-1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}T_k=\frac{(-1)^{n+1}\left(T_{n+1}-T_{n-1}\right)+1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k=\frac{v_{n+2}+v_n-6}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}v_k=\frac{(-1)^{n+1}\left(v_{n+1}-v_{n-1}\right)+2}{2}.$$

Son zamanlarda Yaying ve Hazarika (2020), Yaying ve Kara (2021), Karakaş (2021) Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarını kullanarak toplanabilme teorisinde çalışmalar yapmaktadır. Toplanabilme teorisinde, Fibonacci, Lucas, Padovan, Catalan ve Tribonacci gibi tekrarlama bağıntısı kullanılarak tanımlanan tamsayı dizileri yardımıyla regüler matrisler oluşturarak bu matrislerin etki alanını kullanarak yeni dizi uzayları tanımlama fikri Kara ve Başarır (2012), Karakaş ve Karakaş (2017; 2018), Ercan ve Bektaş (2017), Yaying ve ark. (2021), Dağlı ve Yaying (2022), Gökçe ve Sarıgöl (2020), Kara ve İlkhan (2015; 2016; 2019; 2021), Gökçe (2022), Kara (2013), Başarır ve ark. (2016), Candan ve Kara (2015) ve İlkhan ve ark. (2021) gibi çeşitli yazarlar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalarda yazarlar, Fibonacci, Lucas, Padovan ve Catalan sayıları ve çeşitli özelliklerini vermişlerdir. Ancak Tribonacci-Lucas sayıları bu amaçla henüz toplanabilme alanında kullanılmamıştır.

Bu bilgiler ışığında makalemizin amacı regüler Tribonacci-Lucas matrisinin yakınsaklık alanı yardımıyla yeni bir dizi uzayı tanımlayıp bu uzayın topolojik yapısını araştırmak, Schauder bazını elde etmek, $\alpha-,\beta-,\gamma-$ duallerini hesaplamak, bu uzay üzerinde bazı matris sınıflarını karakterize etmek ve düzgün konvekslik, kesin konvekslik gibi bazı geometrik özelliklerini incelemektir.

MATERYAL VE METOT

Tüm reel değerli dizilerin kümesi olan ω'nın lineer bir alt uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. Literatürde bilinen en klasik dizi uzayları sırasıyla yakınsak diziler uzayı c, sıfıra yakınsak diziler uzayı c_0, sınırlı diziler uzayı ℓ_∞ ve p. mertebeden mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı ℓ_p dir. İlk üç uzay $\|u\|_\infty = \sup_i |u_i|$ normuna göre ve son uzay $\|u\|_p = \left(\sum_i |u_i|^p \right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$ normu ile Banach uzayıdırlar. V bir Banach uzay olmak üzere $\forall i \in \mathbb{N}$ için $t_i : V \to \mathbb{R}$, $t_i(u) = u_i$ fonksiyoneli sürekli ise bir BK-uzayı adını alır.

Bazı durumlarda, iki dizi uzayı arasındaki en genel lineer operatör bir sonsuz matrisle verilebilir. Bu nedenle, matris dönüşümleri teorisi, dizi uzayları alanında daima büyük ilgi görmüştür. Kabul edelim ki $G = (g_{ij})$ reel terimli bir sonsuz matris ve $u = (u_j) \in \omega$ olsun. O halde

$$(Gu)_i = \sum_j g_{ij} u_j \tag{1}$$

olmak üzere (1) eşitliğinin sağ tarafındaki seri yakınsak ise u dizisi $Gu = \{(Gu)_i\}$ dizisine dönüşür. Bu durumda Gu dizisine u dizisinin dönüşüm dizisi denir.

U ve V herhangi iki dizi uzayı olsun. $\forall u \in U$ için $Gu \in V$ oluyorsa, bu takdirde G, U'dan V içine bir matris dönüşümü tanımlar ve bu $G : \mathrm{U} \to V$ şeklinde gösterilir. Bu şekilde tanımlı tüm G matrislerinin sınıfı için $(\mathrm{U} : \mathrm{V})$ sembolünü kullanırız. G matrisinin etki alanı

$$U_G = \{u \in \omega : Gu \in U\} \tag{2}$$

şeklinde tanımlıdır ve bir dizi uzayıdır. Eğer G matrisi üçgensel ise U ve U_G uzaylarının lineer izomorf oldukları gösterilebilir (Başar, 2011).

Tanım 1. U ve V dizi uzayları için $S(U,V)$ cümlesini

$$S(U,V) = \{z = (z_k) : xz = (x_k z_k) \in V, \forall x \in U\} \tag{3}$$

şeklinde tanımlayalım. (3) notasyonu ile bir U dizi uzayının U^α, U^β ve U^γ şeklinde gösterilen α, β ve γ dualleri

$$U^\alpha = S(U, \ell_1),\ U^\beta = S(U, cs) \text{ ve } U^\gamma = S(U, bs)$$

şeklinde gösterilir (Başar, 2011).

Şimdi sonsuz bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter koşulları veren, çalışmanın devamında yararlanacağımız ve Silverman-Toeplitz teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Yardımcı Teorem 1. $G = (g_{ij})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç şartın sağlanmasıdır:

i. $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$ için $\sum_{j=1}^{\infty} |g_{ij}| \le M$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $M > 0$ vardır,

ii. $\forall j = 1, 2, 3...$ için $\lim g_{ij} = 0$ dır,

iii. $\lim_{i \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} g_{ij} = 1$

dir (Wilansky, 1984).

U lineer topolojiye sahip bir dizi uzayı olsun. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $q_i : U \to \mathbb{C}, q_i(u) = u_i$ dönüşümü sürekli ise U 'ya K-uzayı adı verilir. U uzayı hem tam lineer metrik uzay hem de bir K-uzayı ise bu takdirde FK-uzayı adını alır. K-uzayı aynı zamanda bir Banach uzayı ise bu durumda BK-uzayı olarak adlandırılır (Choudary ve Nanda, 1989).

Genellikle p - tipi uzaylar $\ell(p)$ ve ℓ_p uzaylarının özelliklerinden dolayı birçok uygulamaya sahiptir. Kamthan ve Gupta, (1981), zengin geometrik özelliklere sahip Orlicz uzaylarının alt uzaylarının ℓ_p uzayına izomorf olduğunu göstermiştir. Ayrıca ℓ_p uzayı $1 < p < \infty$ için yansımalı ve konveks olduğundan bu uzayların geometrik yapısını düşünmek doğaldır.

Topolojik ve diğer bazı alışılmış özelliklerine ilaveten dizi uzaylarının geometrik özelliklerinin araştırılması uzun zamandır büyük ilgi görmektedir. Literatürde farklı dizi uzaylarının geometrik özellikleriyle ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Şimdi çalışmamızda kullanacağımız bazı geometrik özelliklerin tanımını verelim:

Tanım 2. Normlu bir U uzayına; $u, v \in U$ için $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ ve $\|u - v\| \geq \varepsilon$ iken $\left\| \frac{1}{2}(u + v) \right\| \leq 1 - \delta$ olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon \in (0, 2]$ için $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mevcut ise düzgün konveks denir, (Chidume, 1965).

Tanım 3. Normlu bir U uzayına $\forall u, v \in U$ için $u \neq v, \|u\| = \|v\| = 1$ iken $\forall \lambda \in (0,1)$ için $\|\lambda u + (1 - \lambda) v\| < 1$ ise kesin konveks denir, (Chidume, 1965).

Tanım 4. Düzgün konveks olmayan ya da düzgün kare olmayan bir Banach uzayına izomorfik olan Banach uzayına süper-yansımalı (super-reflexive) denir, (James, 1972).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Şimdi Tribonacci-Lucas sayılarının özelliklerini kullanarak $V = (v_{ij})$ sonsuz matrisimizi aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$V = (v_{ij}) = \begin{cases} \dfrac{2v_j}{v_{i+2} + v_i - 6} \\ 0 \end{cases}.$$

Bu matrisin terimlerini açtığımızda aşağıdaki matrisi elde ederiz:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{7}{11} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{22} & \frac{3}{22} & \frac{7}{22} & \frac{11}{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Bu matrisin üçgensel olduğu yani $j \le i$ için $v_{ii} \ne 0$ ve $j > i$ için $v_{ij} = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 1'den matrisimizin regüler olduğu kolayca görülmektedir. Bu matris yardımıyla V-dönüşümleri ℓ_p ve ℓ_∞ uzayında bulunan tüm dizilerin kümesi olacak şekilde $\ell_p(V)$ $(1 \le p < \infty)$ ve $\ell_\infty(V)$ Tribonacci-Lucas dizi uzaylarımızı aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\ell_p(V) = \{x = (x_i) \in w : Vx \in \ell_p\} \text{ ve } \ell_\infty(V) = \{x = (x_i) \in w : Vx \in \ell_\infty\}.$$

(2) gösterimini kullanarak yukarıdaki dizi uzaylarını

$$\ell_p(V) = (\ell_p)_V \quad \text{ve} \quad \ell_\infty(V) = (\ell_\infty)_V \tag{4}$$

şeklinde yeniden ifade edebiliriz.

Şimdi $x = (x_j)$ dizisinin $V-$dönüşümü olarak sıkça kullanacağımız $y = (y_i)$ dizisini

$$y_i = V_i x = \sum_{j=1}^{i} \frac{2v_j}{v_{i+2} + v_i - 6} x_j, \quad i \in \mathbb{N} \tag{5}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca çalışmamız boyunca negatif indisli herhangi bir terim 0 olarak kabul edilecektir.

Teorem 1. $\ell_p(V)$ uzayı toplama ve skaler çarpım işlemlerine göre bir lineer uzaydır ve

i. $\ell_p(V)$ uzayı $\|x\|_{\ell_p(v)} = \|Vx\|_{\ell_p}$ p-normuna göre bir p-normlu uzaydır. Burada p-norm şu şekilde tanımlanır:

$$\|x\|_{\ell_p(v)} = \sum_i |v_i(x)|^p, 0 < p < 1, \tag{6}$$

ii. $\ell_p(V)$ ve $\ell_\infty(V)$ uzayları sırasıyla aşağıda verilen normlara göre BK-uzayıdır.

$$\|x\|_{\ell_p(V)} = \left(\sum_i |V_i(x)|^p \right)^{1/p}, 1 \le p < \infty \tag{7}$$

$$\|x\|_{\ell_\infty(V)} = \sup_i |V_i(x)| \ . \tag{8}$$

İspat. p-norm aksiyomlarının sağlandığını göstermek rutin bir uygulama olduğundan sadece (ii)'nin ispatını vereceğiz. ℓ_p uzayı kendi alışılmış normuna göre bir BK-uzayıdır ve V matrisi üçgenseldir. Dolayısıyla Teorem 4.3.12, (Wilansky, 1984), $\ell_p(V)$ $(1 \le p < \infty)$ ve $\ell_\infty(V)$ uzaylarının verilen normlara göre BK-uzayları olduğu sonucunu verir.

Teorem 2. $\ell_p(V)$ uzayı bir iç çarpım uzayı değildir. Dolayısıyla $p \ne 2$ hariç $1 \le p < \infty$ için bir Hilbert uzayı değildir.

İspat. $x = (x_i) = \left(1, 1, -\frac{4}{7}, 0, 0, \ldots\right)$ ve $y = (y_i) = \left(1, -\frac{5}{3}, \frac{4}{7}, 0, 0, \ldots\right)$ dizilerini alalım. O halde $(Vx)_i = (1, 1, 0, 0, \ldots)$ ve $(Vy)_i = (1, -1, 0, 0, \ldots)$ buluruz. Böylece

$$\|x+y\|_{\ell_p(V)}^2 + \|x-y\|_{\ell_p(V)}^2 = 8 \ne 4.\left(2^{\frac{2}{p}}\right) = \left(\|x\|_{\ell_p(V)}^2 + \|y\|_{\ell_p(V)}^2\right), \ (p \ne 2)$$

ifadesi elde edilir. O halde $\ell_p(V)$ uzayının normu $p \ne 2$ için paralelkenar eşitliğini sağlamaz. Bu ise göz önüne alınan normun bir iç çarpımdan elde edilemeyeceğini ifade eder. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 1. $\ell_\infty(V)$ uzayı bir Hilbert uzayı değildir.

Sonuç 2. $0<p\le\infty$ olmak üzere $\ell_p(V)$ uzayı bir Frechet uzayıdır.

İspat. $\ell_p(V)$ ve $\ell_\infty(V)$ uzayları lineer uzaylardır ve bu uzaylar üzerinde cebirsel işlemlerin sürekli olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca bu uzayların tamlığını Teorem 1'den biliyoruz. Dolayısıyla bu uzaylar Frechet uzaylarıdır.

Sonuç 3. $0<p\le\infty$ olmak üzere $\ell_p(V)$ uzayı üzerinde mutlak değer özelliği (absolute property) sağlanmaz.

İspat. $1\le p<\infty$ için $\ell_p(V)$ üzerindeki normu kullanarak bu uzayın mutlak değer özelliğine sahip olmadığını $|x|=\left(|x_j|\right)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikten söyleyebiliriz:

$$\|x\|_{\ell_p(V)}=\left(\sum_i\left|\sum_{j=1}^{i}\frac{2v_j}{v_{i+2}+v_i-6}x_j\right|^p\right)^{1/p}\neq\left(\sum_i\left|\sum_{j=1}^{i}\frac{2v_j}{v_{i+2}+v_i-6}|x_j|\right|^p\right)^{1/p}=\||x|\|_{\ell_p(V)}.$$

Buradan $0<p<1$ ve $p=\infty$ için benzer şekilde ispat yapılabilir.

Teorem 3. $\ell_p(V)$ uzayı ℓ_p uzayına izometrik olarak izomorftur. Yani $\ell_p(V)\cong\ell_p$ 'dir.

İspat: (5) eşitliğini kullanarak $\varphi:\ell_p(V)\to\ell_p$, $x\to y=\varphi x$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde $\forall x\in\ell_p(V)$ için $\varphi x=y=Vx\in\ell_p$'dir. Ayrıca φ'nin lineer olduğu açıktır. Bununla birlikte $Vx=0$ iken $x=0$ olduğu aşikârdır. Buradan φ dönüşümü birebirdir. Şimdi $y=(y_i)\in\ell_p$ verilmiş olsun ve $x=(x_j)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x_j=\sum_{k=j-1}^{j}(-1)^{j-k}\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_k}y_k;\ (j\in\mathbb{N}).\tag{9}$$

O halde (9)'u kullanarak $1\le p<\infty$ için

$$\|x\|_{\ell_p(V)}=\left(\sum_j|V_jx|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_j\left|\sum_{k=0}^{j}\frac{2v_k}{v_{j+2}+v_j-6}x_k\right|^p\right)^{1/p}$$

$$=\left(\sum_j\left|\sum_{k=0}^{j}\frac{2v_k}{v_{j+2}+v_j-6}\sum_{n=k-1}^{k}(-1)^{k-n}\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_k}y_n\right|^p\right)^{1/p}$$

$$=\left(\sum_j\left|\sum_{k=0}^{j}\frac{2v_k}{v_{j+2}+v_j-6}\left(-\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_k}y_{k-1}+\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_k}y_k\right)\right|^p\right)^{1/p}$$

$$=\left(\sum_j\left|\sum_{k=0}^{j}(y_k-y_{k-1})\right|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_j|y_j|^p\right)^{1/p}=\|y\|_{\ell_p}<\infty.$$

olup, $\ell_\infty(V)$ ve ℓ_∞ uzaylarının lineer izomorf olduğunu göstermek için de benzer işlemler yapılır ve

$$\|x\|_{\ell_\infty(V)}=\sup_j|V_jx|=\sup_j|y_j|=\|y\|_\infty<\infty$$

elde edilir. O halde $x \in \ell_p(V)$ $(1 \le p \le \infty)$ ‘dir. Dolayısıyla φ örtendir ve normu korur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4. $\ell_\infty \subset \ell_\infty(V)$ ve $1 \le p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_p(V)$ bağıntısı sağlanır.

İspat. İlk olarak $p=1$ için teoremi ispatlayabiliriz. $x=(x_j) \in \ell_1$ olsun. Bu takdirde

$$\|x\|_{\ell_1(V)} = \sum_{i=1}^{\infty} |V_i(x)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6} \sum_{j=1}^{i} v_j |x_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| v_j \sum_{i=j}^{\infty} \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6} \le A \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = A\|x\|_{\ell_1} < \infty .$$

Buradan $x \in \ell_1(V)$ ve $\ell_1 \subset \ell_1(V)$ elde edilir.

Şimdi $1 < p < \infty$ ve $x=(x_j) \in \ell_p$ alalım. $\forall i \in \mathbb{N}$ için Hölder eşitsizliğinden yararlanırsak

$$|V_i(x)|^p \le \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{2v_j}{v_{i+2}+v_i-6} |x_j| \right]^p \le \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{2v_j}{v_{i+2}+v_i-6} |x_j|^p \right] \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{2v_j}{v_{i+2}+v_i-6} \right]^{p-1}$$

$$= \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6} \sum_{j=1}^{i} v_j |x_j|^p$$

buluruz.

Ayrıca $A = \sup_j \left(v_j \sum_{i=j}^{\infty} \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6} \right) < \infty$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v_i(x)|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6} \sum_{j=1}^{\infty} v_j |x_j|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_j|^p v_j \sum_{i=j}^{\infty} \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6}$$

ve

$$\|x\|_{\ell_p(V)}^p \le A \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = A\|x\|_{\ell_p}^p < \infty$$

buluruz. Bu $x \in \ell_p(V)$ olması demektir. Dolayısıyla $1 < p < \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p(V)$ bağıntısı sağlanır.

Şimdi $p=\infty$ ve $x=(x_j) \in \ell_\infty$ olsun. O halde $\forall j \in \mathbb{N}$ için $|x_j| \le B$ olacak şekilde bir $B>0$ sabiti vardır. Böylece $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$|v_i(x)| \le \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6} \sum_{j=1}^{i} v_j |x_j| \le \frac{2B}{v_{i+2}+v_i-6} \sum_{j=1}^{i} v_j = B$$

olur. Bu $V_i(x) \in \ell_\infty$ olması anlamına gelir. Sonuç olarak $\ell_\infty \subset \ell_\infty(V)$ bağıntısı sağlanır.

Teorem 5. $1 \le p \le \infty$ için $\ell_p(V) \subset \ell_p$ bağıntısı sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı Sonuç 4.7, (Mursaleen ve Noman, 2010) ve Sonuç 4.9, (Mursaleen ve Noman, 2011)’den kolayca elde edilebilir.

Teorem 6. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(V) \subset c_0(V) \subset c(V) \subset \ell_\infty(V)$ bağıntısı kesindir.

İspat: $c_0(V) = \{x=(x_i) \in w : Vx \in c_0\}$ ve $c(V) = \{x=(x_i) \in w : Vx \in c\}$ olmak üzere, $\forall j \in \mathbb{N}$ için $x_j = 1$ ve $x=(x_j)$ dizisi için $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $V_i(x) = \frac{2}{v_{i+2}+v_i-6} \sum_{j=1}^{i} v_j = 1$ elde edilir. Bu ise $Vx \in c$ ve $Vx \notin c_0$ olduğunu gösterir. Yine buradan $x \in c(V)$ ve $x \notin c_0(V)$ ’dir. Dolayısıyla $c_0(V) \subset c(V)$ kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır.

Şimdi $x=(x_j)$ dizisini $j\in\mathbb{N}$ için $x_j=\dfrac{(-1)^j\left(v_{j+2}+v_{j+1}+v_j+v_{j-1}-6\right)}{2v_j}$ şeklinde tanımlayalım. Buna göre $\forall i\in\mathbb{N}$ için

$$V_i(x)=\frac{2}{v_{i+2}+v_i-6}\sum_{j=1}^{i}v_jx_j=\frac{2}{v_{i+2}+v_i-6}\sum_{j=1}^{i}v_j\frac{(-1)^j\left(v_{j+2}+v_{j+1}+v_j+v_{j-1}-6\right)}{2v_j}$$

$$=\frac{1}{v_{i+2}+v_i-6}(-1)^i\left(v_{i+2}+v_i-6\right)=(-1)^i$$

elde edilir. Bu ise $Vx\in\ell_\infty$ ve $Vx\notin c$ olduğunu gösterir. Buradan $x\in\ell_\infty(V)$ ve $x\notin c(V)$ olur. Dolayısıyla $c(V)\subset\ell_\infty(V)$ bağıntısı kesin olarak sağlanır. Sonuç olarak $c_0(V)\subset c(V)\subset\ell_\infty(V)$ olduğu açıktır.

Şimdi $x=(x_j)\in\ell_p(V)$ olsun. Bu takdirde $Vx\in\ell_p$ ve dolayısıyla $Vx\in c_0$'dır. Buradan $x\in c_0(V)$ iken $\ell_p(V)\subset c_0(V)$ kapsaması geçerlidir. Şimdi $0<p<\infty$ iken $\forall j\in\mathbb{N}$ için $x_j=\dfrac{1}{(1+j)^{1/p}}$ şeklinde tanımlanan $x=(x_j)$ dizisini düşünelim. O halde

$$|v_i(x)|=\frac{2}{v_{i+2}+v_i-6}\sum_{j=1}^{i}\frac{v_j}{(1+j)^{1/p}}\geq\frac{2(1+j)^{-1/p}}{v_{i+2}+v_i-6}\sum_{j=1}^{i}v_j=\frac{1}{(1+j)^{1/p}}$$

dir. Dolayısıyla $Vx\notin\ell_p$ ve $x\notin\ell_p(V)$ olur. Böylece $x\in c_0(V)$ fakat $x\notin\ell_p(V)$ 'dir. Bu nedenle $0<p<\infty$ için $\ell_p(V)\subset c_0(V)$ bağıntısı kesin olarak sağlanır.

Teorem 7. $0<p<s<\infty$ ise bu takdirde $\ell_p(V)\subset\ell_s(V)$ bağıntısı kesindir.

İspat. $0<p<s<\infty$ alalım. $\ell_p\subset\ell_s$ olduğundan $\ell_p(V)\subset\ell_s(V)$ bağıntısı sağlanır. Bu durumda $x=(x_j)\in\ell_s(V)$ ancak $x=(x_j)\notin\ell_p(V)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $y=(y_j)$ dizisini, $x=(x_j)$ dizisini kullanarak aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$y_j=\frac{x_j\left(v_{j+2}+v_j-6\right)-x_{j-1}\left(v_{j+1}+v_{j-1}-6\right)}{2v_j},\quad \forall j\in\mathbb{N}.$$

Buradan $\forall i\in\mathbb{N}$ için

$$V_i(y)=\frac{2}{v_{i+2}+v_i-6}\sum_{j=1}^{i}v_jy_j=\frac{2}{v_{i+2}+v_i-6}\sum_{j=1}^{i}x_j\left(v_{j+2}+v_j-6\right)-x_{j-1}\left(v_{j+1}+v_{j-1}-6\right)=x_i$$

olur. Bu $V_i(y)=x$ olması demektir ve buradan $Vy\in\ell_s/\ell_p$'dir. Böylece $y\in\ell_s(V)$ ancak $y\notin\ell_p(V)$ olur. Sonuç olarak $\ell_p(V)\subset\ell_s(V)$ kapsaması kesindir.

Teorem 3'ün ispatında tanımlanan $\varphi:\ell_p(V)\to\ell_p$ dönüşümü bir izomorfizmdir. Bu nedenle ℓ_p uzayının $\left\{e^{(j)}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ bazının ters görüntüsü $\ell_p(V)$ uzayının bazını oluşturur. O halde aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Teorem 8. $1\leq p<\infty$ ve $\forall j\in\mathbb{N}$ için $\ell_p(V)$ uzayının elemanlarının oluşturduğu

$$d_i^{(j)} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{i-j}\left(v_{j+2}+v_j-6\right)}{2v_i}, (i-1 \le j \le i) \\ 0, \qquad (0 \le j < i-1) veya (j > i) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\left\{d^{(j)}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi $\ell_p(V)$ uzayı için bir Schauder bazıdır ve $\forall x \in \ell_p(V)$ elemanı

$x = \sum_j V_j(x) d^{(j)}$ şeklinde bir tek gösterime sahiptir.

Sonuç 4. $1 \le p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(V)$ uzayı ayrılabilirdir.

İspat. Teorem 1 ve Teorem 8'den açıkça görülür.

$\ell_p(V)$ Uzayının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ Dualleri

Çalışmamızın bu bölümünde $\ell_p(V)$ uzayının $\alpha-,\beta-,\gamma-$ duallerini hesaplayacağız. Dual hesaplama üzerine ilk araştırma Köthe ve Toeplitz, (1934), tarafından başlatılmıştır ve elemanları diziler olan $\alpha-$dual (Köthe-Toeplitz dual) elde edilmiştir. Daha sonra Chandra ve Tripathy, (2002), tarafından dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz duali kavramı genelleştirilmiştir.

Şimdi hesaplarımız için gerekli olan, Stieglitz ve Tietz, (1977), tarafından verilen aşağıdaki yardımcı teoremlerle başlayalım. Çalışmamız boyunca ϑ, $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu alt kümelerinin topluluğunu gösterecektir.

Yardımcı teorem 2. $B = (b_{ij}) \in (\ell_p : \ell_1)$ ancak ve ancak

i. $\sup_{V\in\vartheta} \sum_j \left|\sum_{i\in V} b_{ij}\right|^q < \infty, 1 < p < \infty$ (10)

ii. $\sup_j \sum_i \left|b_{ij}\right| < \infty,\ p = 1$. (11)

Yardımcı teorem 3. $B = (b_{ij}) \in (\ell_p : c)$ ancak ve ancak sırasıyla $1 < p < \infty$, $p = 1$ ve $p = \infty$ için

i. $\lim_i b_{ij}, \forall j \in \mathbb{N}$, (12)

$\sup_i \sum_j \left|b_{ij}\right|^q < \infty$. (13)

ii. $\lim_i b_{ij}, \ \forall j \in \mathbb{N}$,

$\sup_{i,j} \left|b_{ij}\right| < \infty$. (14)

iii. $\lim_i b_{ij}\ , \ \forall j \in \mathbb{N}$

$\sup_i \sum_j \left|b_{ij}\right| < \infty$, (15)

$\lim_i \sum_j \left|b_{ij} - \lim_i b_{ij}\right| = 0$. (16)

Yardımcı teorem 4. $B = (b_{ij}) \in (\ell_p : \ell_\infty)$ ancak ve ancak $1 < p \le \infty$ için (13) ve $p = 1$ için (14) sağlanır.

Teorem 9. $d_1^q=\left\{b=(b_j)\in w:\sup_{V\in\vartheta}\sum_j\left|\sum_{i\in V}u_{ij}\right|^q<\infty\right\}$, $d_2=\left\{b=(b_j)\in w:\sup_j\left|\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_j}b_j\right|<\infty\right\}$ olmak üzere $\{\ell_1(V)\}^\alpha=d_2$ ve $\{\ell_p(V)\}^\alpha=d_1^q$, $1<p\le\infty$ dir.

İspat. $b=(b_j)\in w$ ve $1<p\le\infty$ olsun. Bu takdirde (5) ve (9)'u kullanarak $\forall i,j\in\mathbb{N}$ için $U=(u_{ij})$ matrisi

$$u_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i-j}\dfrac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_i}b_i\,, i-1\le j\le i\\ 0 \qquad\qquad\qquad , j<i-1 \;\; veya\; j>i\end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\forall i\in\mathbb{N}$ için

$$b_ix_i=\sum_{j=i-1}^{i}(-1)^{i-j}\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_i}b_iy_j=U_i(y) \tag{17}$$

buluruz. Böylece (17)'den $x=(x_j)\in\ell_p(V)$ iken $bx=(b_ix_i)\in\ell_1$ olması ancak ve ancak $y=(y_j)\in\ell_p$ iken $Uy\in\ell_1$ olması ile mümkündür. Bunun anlamı $b=(b_j)\in\{\ell_p(V)\}^\alpha$ olması ancak ve ancak $U\in(\ell_p:\ell_1)$ olması halinde mümkündür. Yardımcı Teorem 2'de B yerine U alırsak $b\in\{\ell_p(V)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şartın $\sup_{V\in\vartheta}\sum_j\left|\sum_{i\in V}u_{ij}\right|^q<\infty$ olduğunu görürüz. Şimdi $p=1$ alalım. (17)'den $b=(b_{ij})\in\{\ell_1(V)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $B\in(\ell_1:\ell_1)$ ya da buna denk olarak (11)'den

$$\sup_j\sum_i|u_{ij}|<\infty \tag{18}$$

olmasıdır. Ayrıca $\forall j\in\mathbb{N}$ için $\sum_i|u_{ij}|=\sum_{i=j}^{j+1}\left|\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_i}b_i\right|$ dir. Dolayısıyla (18)'in sağlanması için gerek ve yeter şart $\sup_j\left|\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_j}b_j\right|<\infty$ olmasıdır. Bu ise $\{\ell_1(V)\}^\alpha=d_2$ olması demektir.

Teorem 10. $\forall j\in\mathbb{N}$ için $\Delta\left(\frac{b_j}{v_j}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2}\right)=\left(\frac{b_j}{v_j}-\frac{b_{j+1}}{v_{j+1}}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2}\right)$ olmak üzere

$$d_3^q=\left\{b=(b_j)\in w:\sum_j\left|\Delta\left(\frac{b_j}{v_j}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2}\right)\right|^q<\infty\right\}\;,\; d_4=\left\{b=(b_j)\in w:\lim_j\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_j}b_j=0\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Bu takdirde $\{\ell_1(V)\}^\beta=d_2$, $\{\ell_\infty(V)\}^\beta=d_3^1\cap d_4$ ve $\{\ell_p(V)\}^\beta=d_2\cap d_3^q$, $1<p<\infty$ 'dir.

İspat. $i \in \mathbb{N}$ ve $T=(t_{ij})$ matrisi $t_{ij}=\begin{cases} \Delta\left(\frac{b_j}{v_j}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2}\right) & , j<i \\ \frac{v_{i+2}+v_i-6}{2v_i}b_i & , j=i \\ 0 & , j>i \end{cases}$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{i} b_j x_j = \sum_{j=1}^{i}\left[\sum_{k=j-1}^{j}(-1)^{j-k}\frac{v_{k+2}+v_k-6}{2v_j}y_k\right]b_j \tag{19}$$

$$=\sum_{j=1}^{i-1}\Delta\left(\frac{b_j}{v_j}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2}\right)y_j+\frac{v_{i+2}+v_i-6}{2v_i}b_i y_i = T_i(y)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu takdirde T matrisinin sütunları açıkça yakınsaktır, çünkü

$$\lim_i t_{ij} = \Delta\left(\frac{b_j}{v_j}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2}\right) \ , \forall j \in \mathbb{N} \tag{20}$$

dir. Böylece Yardımcı Teorem 3 ve (19) denkleminden $x=(x_j)\in \ell_p(V)$ iken $bx=(b_j x_j)\in cs$ olması ancak ve ancak $y=(y_j)\in \ell_p$ iken $Ty\in c$ olması ile mümkündür. Buradan $b=(b_j)\in\{\ell_p(V)\}^{\beta}$ olması ancak ve ancak $T\in(\ell_p : c)$, $1\le p\le\infty$ olması ile mümkündür. Şimdi sadece $1<p<\infty$ durumunu vereceğiz. (13)'den $\sum_j\left|\Delta\left(\frac{b_j}{v_j}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2}\right)\right|^q<\infty$ ve $\sup_i\left|\frac{v_{i+2}+v_i-6}{2v_i}b_i\right|<\infty$ yazarız. Bu ise $1<p<\infty$ olmak üzere $\{\ell_p(V)\}^{\beta}=d_2\cap d_3^q$ sonucunu verir. $p=1$ için (14)'den ve $p=\infty$ için (15), (16) ve (20)'den $\{\ell_1(V)\}^{\beta}=d_2$ ve $\{\ell_\infty(V)\}^{\beta}=d_3^1\cap d_4$ olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 11. $\{\ell_1(V)\}^{\gamma}=d_2$ ve $\{\ell_p(V)\}^{\gamma}=d_2\cap d_3^q$, $1<p\le\infty$ 'dir.

İspat. Teorem 10'da verilen benzer yolla ve Yardımcı Teorem 4 kullanılarak kolayca ispatlanabilir.

$\ell_p(V)$ Uzayı Üzerinde Matris Dönüşümleri

Bu kısımda $1\le p\le\infty$ ve X uzayı ℓ_∞, c, c_0 uzaylarından herhangi biri olmak üzere $(\ell_p(V), X)$ sınıflarını karakterize edeceğiz. Kolaylık olması açısından $\forall i,j\in\mathbb{N}$ için $\tilde{b}_{ij}=\left(\frac{b_{ij}}{v_j}-\frac{b_{i,j+1}}{v_{j+1}}\right)\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_j}\right)$ yazacağız. Ayrıca $y=Vx$ olacak şekilde $x,y\in w$ alalım. O halde (19)'dan

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{m-1}\tilde{b}_{ij}y_j+\frac{v_{m+2}+v_m-6}{2v_m}b_{im}y_m \tag{21}$$

olur. Şimdi aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:

$$\left(\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_j}b_{ij}\right)_{j=1}^{\infty}\in\ell_\infty\ ,\forall i\in\mathbb{N} \tag{22}$$

$$\sup_{i,j}\left|\tilde{b}_{ij}\right|^q<\infty\ , \tag{23}$$

$$\sup_i\sum_j\left|\tilde{b}_{ij}\right|^q<\infty\ , \tag{24}$$

$$\lim_j\frac{v_{j+2}+v_j-6}{2v_j}b_{ij}=0\ ,\forall i\in\mathbb{N} \tag{25}$$

$$\sup_i\sum_j\left|\tilde{b}_{ij}\right|<\infty\ , \tag{26}$$

$$\lim_i\tilde{b}_{ij}=\alpha_j\ ,\forall j\in\mathbb{N} \tag{27}$$

$$\lim_i\sum_j\left|\tilde{b}_{ij}-\alpha_j\right|=0\ ,\forall j\in\mathbb{N} \tag{28}$$

$$\lim_i\sum_j\left|\tilde{b}_{ij}\right|=0\ , \tag{29}$$

$$\lim_i\tilde{b}_{ij}=0\ ,\forall j\in\mathbb{N} \tag{30}$$

Böylece (21) denklemi, Teorem 10 ve Stieglitz ve Tietz, (1977), tarafından verilen sonuçları kullanarak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

Teorem 12.

i. $B\in(\ell_1(V):\ell_\infty)\Leftrightarrow\forall i\in\mathbb{N}$ için (22) ve (23) şartları sağlanır.

ii. $1<p<\infty$ olsun. O halde $B\in(\ell_p(V):\ell_\infty)\Leftrightarrow$ (22) ve (24) şartları sağlanır.

iii. $B\in(\ell_\infty(V):\ell_\infty)\Leftrightarrow$ (25) ve (26) şartları sağlanır.

Teorem 13.

i. $B\in(\ell_1(V):c)\Leftrightarrow\forall j\in\mathbb{N}$ için (22), (23) ve (27) şartları sağlanır.

ii. $1<p<\infty$ olsun. O halde $B\in(\ell_p(V):c)\Leftrightarrow$ (22), (24) ve (27) şartları sağlanır.

iii. $B\in(\ell_\infty(V):c)\Leftrightarrow$ (25)-(28) şartları sağlanır.

Teorem 14.

i. $B\in(\ell_1(V):c_0)\Leftrightarrow\forall j\in\mathbb{N}$ için (22), (23) ve (30) şartları sağlanır.

ii. $1<p<\infty$ olsun. O halde $B\in(\ell_p(V):c_0)\Leftrightarrow$ (22), (24) ve (27) şartları sağlanır.

$B\in(\ell_\infty(V):c_0)\Leftrightarrow$ (25) ve (29) şartları sağlanır.

$\ell_p(V)$ Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri

Bu kısımda $\ell_p(V)$ uzayının düzgün konvekslik, kesin konvekslik, yansımalılık ve süper yansımalılık gibi bazı geometrik özelliklerini araştıracağız.

Teorem 15. $\ell_1(V)$ ve $\ell_\infty(V)$ uzayları düzgün konveks değildir. Aslında bu uzaylar kesin konveks de değildir.

İspat. $x=(x_i)=\left(1,-\frac{1}{3},0,0,...\right)$ ve $y=(y_i)=\left(0,-\frac{4}{3},\frac{4}{7},0,0,...\right)$ dizilerini göz önüne alalım. Buradan $x,y\in\ell_1(V)$ olduğu açıktır ve $\|x\|_{\ell_1(V)}=1=\|y\|_{\ell_1(V)}$, $\|x-y\|_{\ell_1(V)}=2>\varepsilon$ 'dir. Ayrıca $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\ell_1(V)}=1$ ve böylece $\ell_1(V)$ uzayı düzgün konveks ve kesin konveks değildir. Benzer şekilde $u=\left(1,1,-\frac{4}{7},0,0,...\right)$ ve $z=\left(1,-\frac{5}{3},\frac{4}{7},0,0,...\right)$ dizilerini göz önüne alalım. $u,z\in\ell_\infty(V)$ olduğu açıktır ve $\|u\|_{\ell_\infty(V)}=1=\|z\|_{\ell_\infty(V)}$ ve $\|u-z\|_{\ell_\infty(V)}=2>\varepsilon$ 'dir. Ancak $\left\|\frac{u+z}{2}\right\|_{\ell_\infty(V)}=1$ olup buradan $\ell_\infty(V)$ uzayının düzgün konveks ve kesin konveks olmadığı görülür.

Teorem 16. $\ell_2(V)$ uzayı düzgün konveksdir.

İspat. $u,z\in\ell_2(V)$ olsun. $\ell_2(V)$ uzayı Hilbert uzayı olduğundan

$$\left\|\frac{u+z}{2}\right\|^2_{\ell_2(V)}+\left\|\frac{u-z}{2}\right\|^2_{\ell_2(V)}=\frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{\ell_2(V)}+\|z\|^2_{\ell_2(V)}\right) \text{ dir.}$$

$\|u\|^2_{\ell_2(V)}\le 1$, $\|z\|^2_{\ell_2(V)}\le 1$ ve $\|u-z\|_{\ell_2(V)}>\varepsilon$ ise, $\Delta=1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$ olmak üzere $\left\|\frac{u+z}{2}\right\|^2_{\ell_2(V)}<(1-\Delta)^2$ olduğu görülür.

Buradan $\ell_2(V)$ uzayının düzgün konveks uzay olduğunu elde ederiz. Ayrıca Chidume, (1965), syf 9'dan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5. $\ell_2(V)$ uzayı kesin konveks ve yansımalı uzaydır.

Teorem 17. $\ell_p(V)$, $1<p<\infty$ uzayı süper-yansımalı uzaydır.

İspat: Teorem 3'e göre $\ell_p(V)$ uzayı ℓ_p uzayına izomorf olduğundan ve Diestel, (1976)'e göre ℓ_p uzayı düzgün konveks olduğundan istenen sonuç elde edilir.

SONUÇ

Tribonacci-Lucas sayıları geçmişte ve günümüzde birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Tribonacci-Lucas özdeşlikleri, tekrarlama bağıntıları, üreteç fonksiyonları, binet formülü ve genelleştirilmiş Tribonacci-Lucas sayıları yazarlar tarafından araştırılmıştır. Ancak bu çalışmada $\ell_p(V)$, $1\le p<\infty$ Tribonacci-Lucas dizi uzayı tanıtılarak farklı bir yöne odaklanılmıştır. Bu nedenle bu çalışmanın toplanabilme teorisinde yapılacak çalışmalar için bir yol gösterici niteliği taşıması beklenmektedir. Bu çalışmadan yararlanarak Tribonacci-Lucas fark uzayları, $\ell_p(V)$ uzayının kompaktlık ölçüsü, farklı geometrik özellikleri ile c ve c_0 uzaylarında V, Tribonacci-Lucas matrisinin yakınsaklık alanı ile ilgili benzer sonuçlar araştırmacılar tarafından dikkate alınabilir.

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

KAYNAKLAR

Başar, F. (2011). Summability Theory and its Applications. *Bentham Science Publishers*. İstanbul.

Başarır, M., Başar, F., Kara, EE. (2016). On the Spaces of Fibonacci Difference Absolutely p-Summable, Null and Convergent Sequences. *Sarajevo J. Math.*, 12 (25): 167-182.

Candan, M., Kara, EE. (2015). A Study of Topological and Geometrical Characteristics of New Banach Sequence Spaces. *Gulf J. Math*., 3 (4): 67-84.

Catalani, M. (2002). Identities for Tribonacci-related Sequences. *Cornell University Library*. arXiv: 0209179.

Chandra, P., Tripathy, BC. (2002). On Generalised Köthe-Toeplitz Duals of Some Sequence Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math*., 33: 1301-1306.

Chidume, CE., (1965). Geometric Properties of Banach Spaces and Non-linear Iterations. *Lecture Notes in Mathematics. Springer*-Verlag. Berlin.

Choudary, B., Nanda, S. (1989). Functional Analysis with Applications. *Wiley Eastern Limited*. New Delhi.

Dağlı, MC., Yaying, T. (2022). Some new Paranormed Sequence Spaces Derived by Regular Tribonacci Matrix. *The Journal of Analysis*, https://doi.org/10.1007/s41478-022-00442-w.

Diestel, J. (1976). Geometry of Banach Spaces-Selected Topics. *Lecture notes in Mathematics. Vol. 485. Springer*-Verlag. Berlin.

Ercan, S., Bektaş, Ç. (2017). Some Topological and Geometric Properties of a New BK-Space Derived by Using Regular Matrix of Fibonacci Numbers. Linear and Multilinear Algebra, 65 (5): 909-921.

Feinberg, M. (1963). Fibonacci-Tribonacci. The Fibonacci Quarterly, 1 (3): 70 – 74.

Frontczak, R. (2018). Sums of Tribonacci and Tribonacci-Lucas Numbers. International *Journal of Mathematical Analysis*, 12 (1): 19-24.

Gökçe, F. (2022). Absolute Lucas Spaces with Matrix and Compact Operators. *Math. Sci. Appl. E-notes*, 10 (1): 27-44.

Gökçe, F., Sarıgöl, MA. (2020). Some Matrix and Compact Operators of the Absolute Fibonacci Series Spaces. Kragujevac *J. Math*., 44 (2): 273-286.

İlkhan, M., Kara., Kara, EE. (2021). Matrix Transformations and Compact Operators on Catalan Sequence Spaces. *J. Math. Anal. Appl*., 498 (1): 124925.

İlkhan, M., Kara, EE. (2019). A New Banach Space Defined by Euler Totient Matrix Operator. *Operators and Matrices*, 13 (2): 527-544.

İlkhan, M., Şimşek, N., Kara, EE. (2021). A New Regular Infinite Matrix Defined by Jordan Totient Function and its Matrix Domain in ℓ_p. Math. *Meth. Appl. Sci*., 44 (9): 7622-7633.

James, CR. (1972). Super Reflexive Spaces with Bases. Pasific J. Math., 41: 409-419.

Kamthan PK, Gupta M, 1981. Sequence Spaces and Series. Marcel Dekker Inc. New York and Basel.

Kara, EE. (2013). Some Topological and Geometrical Properties of New Banach Sequence Spaces. *J. Inequal. Appl.,* 38: https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-38

Kara, EE., Başarır, M. (2012). An Application of Fibonacci Numbers into Infinite Toeplitz Matrices. *Caspian J. Math. Sci.,* 1 (1): 43-47.

Kara, EE., İlkhan, M. (2015). On Some Banach Sequence Spaces Derived by a New Band Matrix. British J. Math. *Comput. Sci.,* 9 (2): 141-159.

Kara, EE., İlkhan, M. (2016). Some Properties of Generalized Fibonacci Sequence Spaces. *Linear and Multilinear Algebra*, 64 (11): 2208-2223.

Karakaş, M. (2021). Some Inclusion Results for the New Tribonacci-Lucas Matrix. *BEU J. Sci. Tech.,* 11 (2): 76-81.

Karakaş, M., Karakaş, A. (2017). New Banach Sequence Spaces that is Defined by the aid Of Lucas Numbers. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 7 (4): 103-111.

Karakaş, M., Karakaş, A. (2018). A Study on Lucas Difference Sequence Spaces $l_p\left(\hat{E}(r,s)\right)$ and $l_\infty\left(\hat{E}(r,s)\right)$. *Maejo Int. J. Sci. Tech.*, 12 (1): 70-78.

Köthe, G., Toeplitz, O. (1934). Linear Raume mit Unendlich Vielen Koordinaten and Ringe Unenlicher Matrizen. J. Rreine Angew. Math., 171: 193-226.

Mursaleen M, Noman AK, 2010. On the Spaces of $\lambda-$Convergent and Bounded Sequences. Thai J. Math., 8: 311-329.

Mursaleen, M., Noman, AK. (2011). On Some New Sequence Spaces of Non-Absolute Type Related to the Spaces ℓ_p and ℓ_∞ I. *Filomat*, 25: 33-51.

Stieglitz, M., Tietz, H. (1977). Matrixtransformationen von Folgenraumen eine Ergebnisübersicht. *Math. Z.,* 154: 1-16.

Wilansky, A. (1984). Summability Through Functional Analysis. *North-Holland Mathematics Studies* Vol. 85. Elseiver. Amsterdam.

Yaying, T., Hazarika, B. (2020). On Sequence Spaces Defined by the Domain of a Regular Tribonacci Matrix. *Math. Slovaca,* 70 (3): 697-706.

Yaying, T., Hazarika, B., Mohiuddine, SA. (2021). On Difference Sequence Spaces of Fractional Order Involving Padovan Numbers, *Asian-European J. Math.*, 14 (6): 1-24.

Yaying, T., Kara, MI. (2021). On Sequence Spaces Defined by the Domain of Tribonacci Matrix in c_0 and c. *Korean J. Math.*, 29 (1): 25-40.