Genelleştirilmiş Sasz Operatörü

Mine Aktaş*

Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara, mineaktas0607@gmail.com

*İletişimden sorumlu yazar/ Corresponding author

Geliş / Recieved: 6 Nisan (April) 2016
Kabul / Accepted: 11 Ağustos (Agust) 2016
DOI: http://dx.doi.org/10.18466/cbujos.64224

Özet

Sonlu bir aralıkta tanımlanmış herhangi sürekli fonksiyona yakınsayan polinomlar dizisinin varlığını K. Weiestrass göstermiştir. 1912 yılında Bernstein, sürekli fonksiyonlara yakınsayan polinomlar dizisinin açık şeklini $B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ 0\le x\le 1$ ile tanımlamıştır. Bernstein polinomlarının tanımlanma yöntemi sürekli fonksiyonlara yaklaşan bir çok yeni polinomlar dizisinin tanımlanmasına yardımcı olmuştur. Stancu Bernstein polinomunun yeni bir genelleşmesini

$$P(u;f)=e^{ux}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon!}ux^{\upsilon}f\left(\frac{\upsilon}{u}\right), u>0$$

şeklinde tanımlamış ve bu genelleştirilmiş polinomun [0,1] üzerinde sürekli fonksiyonlara yaklaştığını göstermiştir. X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere, X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y'de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa L, X uzayında bir operatördür. f_1, f_2 reel X uzayında herhangi iki fonksiyon α_1 ve α_2'ler keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü,

$$L(a_1f_1+a_2f_2;x)=a_1L(f_1;x)+a_2L(f_2;x)$$

koşulu gerçekleniyorsa L operatörü lineer operatördür. Bernstein polinomlarının yapısından görüldüğü gibi bu polinomlar pozitif bir f fonksiyonunu yine pozitif bir $B_n(f;x)$ fonksiyonlar dizisine dönüştürmektedir. Bu nedenle Bernstein polinomları Lineer Pozitif Operatörlerdir. Bernstein polinomları aynı zamanda monotondur.
$B_n(f;x)$ dizisinin n ye göre monoton olması f fonksiyonunun özelliklerine bağlıdır. Bu problem bir çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, Bernstein polinomlarının $[0,\infty]$ aralığında benzeri olan Sasz operatörünün Stancu tipinde bir genelleştirilmiş polinomunun türevi incelenmiştir. Bu araştırmada, $\forall R>0$ için f(x), $0\le x\le R$ aralığında sınırlı ve x, ∞'a yaklaşırken $f(x)=0(x^k)$ ve herhangi bir ξ için $f'(\xi)$ var ise

$$P_n^f(x)=e^{-nx}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}\right)$$

için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\xi}P_n^f(\xi)=\frac{d}{d\xi}f(\xi)$$

elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernstein Polinomu, Lineer Pozitif Operatör, Operatör, Sasz Operatörü, Stancu Polinomu.

Generalized Sasz Operator

Abstract

K. Weiestrass had shown the existence of sequence of polynomials converging any continuous function which is defined on a finite interval. Clear form of the sequence polynomials converging continuous functions was defined as

$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$, $0\le x\le 1$

by Bernstein in 1912. The definition method of Bernstein's polynomials had helped many new sequences of polynomials approaching to the continuous functions. Stancu had defined new generalization of the polynomial as
$P(u;f) = e^{ux}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon!}ux^{\upsilon}f\left(\frac{\upsilon}{u}\right), u > 0$ like Bernstein and had shown that this generalization of polynomial approaches to the continuous function between interval of [0,1]. In case of be two function spaces X and Y, If there is L rule which is convert to a function f in Y of any function taken from X, L is called an operator. As seen from the structure of Bernstein polynomial, these polynomials convert a positive function f to again a positive $B_n(f;x)$. For this reason, Bernstein polynomials are Linear Positive Operators. Bernstein polynomials are also monotone. Monotonicity property of the sequence of $B_n(f;x)$ with n depends on the characteristics of function f. This problem has been investigated by many mathematicians. In this study, derivative of a generalized polynomial with a generalization similar to that of Stancu of Sasz operator like Bernstein polynomial at [0, ∞] had been investigated. At the end of the research, if f(x) is bounded between $0 \le x \le R$ for $\forall R > 0$ and when x approaches to ∞,
$f(x) = O(x^k)$ and for any point ξ $f'(\xi)$ exists, then is obtained for

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\xi}P_n^f(\xi) = \frac{d}{d\xi}f(\xi)$$

$$P_n^f(x) = e^{-nx}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}\right).$$

Key Words: Bernstein Polynomial, Linear Positive Operator, Operator, Sasz Operator, Stancu Polynomial.

1 Giriş

Bernstein, sürekli fonksiyonlara yaklaşan polinomlar dizisinin açık şeklini

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}, 0 \le x \le 1$$

ile tanımlamıştır ($C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$) [2].

Bernstein polinomlarının [0,∞] aralığında benzeri olan Sasz operatörü

$$S_n(f,x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$$

biçimindedir [3]. $n \longrightarrow \infty$ iken a>0 keyfi bir sayı olmak üzere [0,a] aralığında

$$S_n(f,x) \rightrightarrows f(x)$$

dir, burada f, [0,a] da sürekli, [0,∞] aralığında sınırlı fonksiyondur, burada "⇉" düzgün yakınsamayı göstermektedir.

Bu operatörün Stancu (1966) tipinde genelleşmesi

$$P_n^f(x) = e^{-nx}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}\right)\frac{(nx)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

göz önüne alınsın. $\alpha = \beta = 0$ ise

$$S_n(f,x) = P_n^f(x)$$

dır.

Eğer $f^r(x)$ var, k>0 için $x \to \infty$ iken $f^r(x) = O(x^r)$ ve x=ξ noktasında $P_n^f(x)$ sürekli ise $P_u^f(x)$, x=ξ de düzgün olarak $f^r(x)$'e yaklaşır [1].

Ayrıca
$$\sum_{|\upsilon-u|}(\upsilon-u)^2\frac{u^{\upsilon}}{\upsilon!} = ue^u$$

ve $0 < \delta < 1$ için

$$\sum_{|\upsilon-u|>\delta u} e^u\frac{u^{\upsilon}}{\upsilon!} = O\left\{exp\left(\frac{-\delta^2 u}{3}\right)\right\}, u \to \infty$$

dır [1].

2 Genelleştirilmiş Sasz Operatörünün Türevi

Bu bölümde, Bernstein polinomlarının $[0,\infty]$ aralığında benzeri olan Sasz operatörünün Stancu tipinde genelleştirilmiş polinomunun türevi incelenmiştir.

Teorem 2.1. f(x), $\forall R > 0$ için $0 \leq x \leq R$ aralığında sınırlı, x→ ∞ iken $f(x) = O(x^k)$
ve $f'(\xi)$ var olduğu herhangi bir ξ noktasında

$$P_n^f(x) = e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right) \frac{(nx)^v}{v!} \tag{1}$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = \frac{d}{d\xi} f(\xi) \tag{2}$$

dir.

İspat: (1)'den

$$P_n^f(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right) \frac{(n\xi)^v}{v!} +$$

$$e^{-n\xi} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right) \frac{n(n\xi)^{v-1} v}{v!}$$

elde edilir. Sadeleşme yapılırsa

$$\frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = -ne^{-n\xi} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right) \frac{(n\xi)^v}{v!} +$$

$$e^{-n\xi} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right) \frac{n(n\xi)^{v-1}}{(v-1)!}$$

çıkar. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamda ν yerine $\nu + 1$ alınırsa

$$\frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = -ne^{-n\xi} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right) \frac{(n\xi)^v}{v!} +$$

$$ne^{-n\xi} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha+1}{n+\beta}\right) \frac{(n\xi)^v}{v!}$$

bulunur. Aynı toplam altında toplanırsa

$$\frac{d}{d\xi} P_n^f(\xi) = -ne^{-n\xi} \sum_{v=0}^{\infty} [f\left(\frac{v+\alpha+1}{n+\beta}\right) - f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right)] \frac{(n\xi)^v}{v!}$$

elde edilir.

$$n\left[f\left(x + \frac{1}{n+\beta}\right) - f(x)\right] \to f'(x)$$

olduğundan türev var ve $f'(0)$ var ise $\xi = 0$ da (2) bağıntısı vardır. $\xi > 0$ olsun.

$$f(x) = f(\xi) + (x-\xi)f'(\xi) + \epsilon(x)(x-\xi)$$

dır. $|x-\xi| < \delta$ için $|\epsilon(x) \leq \eta(\delta)|$ ve $\delta \to 0$ $\eta(\delta) \to 0$ olmak üzere

$$p(x) = f(\xi) + (x-\xi)f'(\xi)$$

$g(x) = (x-\xi)\epsilon(x)$ olsun. $g(\xi) = g'(\xi) = 0$ dır.

$$\frac{d}{dx} P_n^f(x) = \frac{d}{dx} P_n^p(x) = \frac{d}{dx} P_n^g(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$P_n^p(x) = e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right) \frac{(nx)^v}{v!}$$

olsun. $P_n^p(x)$'in x'e göre türevi alınır ve $p(x) = f(\xi) + (x-\xi)f'(\xi)$ değeri yerine konursa

$$\frac{d}{dx} P_n^p(x) = \frac{n}{n+\beta} e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f'(\xi) \frac{(nx)^v}{v!}$$

bulunur.

$$\frac{d}{dx} P_n^g(x) = \frac{n}{n+\beta} e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f(\frac{v+\alpha}{n+\beta}) \frac{(nx)^v}{v!}$$

idi. $g(x) = (x-\xi)\epsilon(x)$ yazılır ve $P_n^g(x)$ in x'e göre türevi alınırsa eğitliğin sağındaki ikinci toplamda v yerine $v+1$ alınırsa

$$\frac{d}{dx} P_n^g(x) = -ne^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v+\alpha}{n+\beta} - \xi\right) \epsilon_v(n) \frac{(nx)^v}{v!} +$$

$$ne^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+\alpha+1}{n+\beta} - \xi\right) e_v(n) \frac{(nx)^v}{v!}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{dx} P_n^g(x) = \frac{n}{n+\beta} e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} \epsilon_v(n) \frac{(nx)^v}{v!}$$

çıkar.

$$\frac{d}{dx} P_n^p(x) + \frac{d}{dx} P_n^g(x) =$$

$$\frac{n}{n+\beta} e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} [f'(\xi) + \epsilon_v(n)] \frac{(nx)^v}{v!}$$

dır.

$$\frac{d}{dx} P_n^f(x) = -ne^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} [f\left(\frac{v+\alpha+1}{n+\beta}\right)$$

$$-f\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}\right)]\frac{(nx)^{\upsilon}}{\nu!}$$

idi. Şimdi $f\left(\frac{\upsilon+\alpha+1}{n+\beta}\right)$ ve $f\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}\right)$ değerlerini bulalım.

$$f\left(\frac{\upsilon+\alpha+1}{n+\beta}\right)=f(\xi)+\left(\frac{\upsilon+\alpha+1}{n+\beta}-\xi\right)f'(\xi)$$

$$+\epsilon_{\upsilon}(n)\left(\frac{\upsilon+\alpha+1}{n+\beta}-\xi\right)$$

$$f\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}\right)=f(\xi)+\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}-\xi\right)f'(\xi)$$

$$+\epsilon_{\upsilon}(n)\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}-\xi\right)$$

dır. Buradan

$$\frac{d}{dx}P_n^f(x)=\frac{n}{n+\beta}e^{-nx}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}[f'(\xi)\epsilon_{\upsilon}(n)\frac{(nx)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

elde edilir.
Böylece

$$\frac{d}{dx}P_n^f(x)=\frac{d}{dx}P_n^p(x)+\frac{d}{dx}P_n^g(x)$$

olduğu gösterilmiş oldu. [1]'den teoremin ispatlanması için sadece $x\to\infty$ için sağ taraftaki ikinci terimin sıfıra yaklaştığının gösterilmesi yeterlidir. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\xi}P_n^p(\xi)=\frac{d}{d\xi}f(x)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\xi}P_n^g(\xi)=0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$P_n^g(x)=e^{-nx}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\upsilon+\alpha+1}{n+\beta}-\xi\right)\epsilon_{\upsilon}(n)\frac{(nx)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

idi. Her iki taraftan x'e göre türev alınırsa

$$\frac{d}{dx}P_n^g(x)=\frac{e^{-nx}}{x}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}[\upsilon\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}-\xi\right)$$

$$-\left(\frac{\upsilon+\alpha}{n+\beta}-\xi\right)nx]\epsilon_{\upsilon}(n)\frac{(nx)^{\upsilon}}{\nu!}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamın içindeki parantez açık bir şekilde yazılırsa

$$\frac{d}{dx}P_n^g(x)=\frac{e^{nx}}{x(n+\beta)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}[\upsilon^2+\upsilon\alpha-\xi\upsilon n-\xi\upsilon\beta$$

$$-nx\upsilon+nx\alpha+\xi n^2x+\xi xn\beta]\epsilon_{\upsilon}(n)\frac{nx^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

elde edilir. x yerine ξ alınırsa

$$\frac{d}{d\xi}P_n^g(\xi)=\frac{e^{n\xi}}{\xi(n+\beta)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}[\upsilon^2+\upsilon\alpha-\xi\upsilon n-\xi\upsilon\beta$$

$$-n\xi\upsilon+n\xi\alpha+\xi n^2x+\xi^2n\beta]\epsilon_{\upsilon}(n)\frac{n\xi^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

bulunur.
Eşitliğin sağ tarafı üç ayrı toplam şeklinde yazılırsa

$$\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\epsilon_{\upsilon}(n)[(\upsilon-\xi n)^2+(\upsilon-\xi n)(\alpha-\xi\beta)(\alpha-\xi\beta)]\frac{(n\xi)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$=\sum_{|t\xi-h|\le t\eth}[\epsilon_{\upsilon}(n)(\upsilon-\xi n)^2+(\upsilon-\xi n)(\alpha-\xi\beta)(\alpha-\xi\beta)]\frac{(n\xi)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$+\sum_{|t\xi-h|\ge t\eth}[\epsilon_{\upsilon}(n)(\upsilon-\xi n)^2+(\upsilon-\xi n)(\alpha-\xi\beta)(\alpha-\xi\beta)]\frac{(n\xi)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$+\sum_{|h-t\xi|\ge t\eth}[\epsilon_{\upsilon}(n)(\upsilon-\xi n)^2+(\upsilon-\xi n)(\alpha-\xi\beta)(\alpha-\xi\beta)]\frac{(n\xi)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$=T_1+T_2+T_3$$

elde edilir. Burada $h=\upsilon+\alpha, t=n+\beta$ dır.
Şimdi

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n+\beta)}|T_1|$$

değerini bulalım.

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n+\beta)}|T_1|$$

$$\leq \frac{e^{-n\xi}}{\xi(n+\beta)} \sum_{|h-t\xi|\leq t\eth} |e_v(n)| \left| \begin{matrix} (v-\xi n)^2 \\ +(1+\alpha-\xi\beta) \end{matrix} \right| \frac{(n\xi)^v}{v!}$$

çıkar. $|e_v(x)| \leq \eta(\delta)$ olduğundan ve [1]' den

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n+\beta)}|T_1| = O(\eta(\delta))$$

bulunur. $sup_{x\leq\xi}|f(x)| = M(\xi)$ olsun.

$$f(x) = f(\xi) + (x-\xi)f(\xi) + \epsilon_v(n) + (x-\xi)$$

idi. $x = \frac{v+\alpha}{n+\beta}$ yazalım. $sup_x|f(x)| = M(\xi)$ olduğunu göz önüne alınırsa (4) eşitliğinden

$$|T_2| \leq (n+\beta)(\xi\beta-\alpha)[M(\xi)$$

$$+\eta|f'(\xi)|] \sum_{(t\xi-h)\geq t\delta} \frac{(n\xi)^v}{v!}$$

bulunur. [1]' den

$$\frac{e^{-n\xi}}{\xi(n+\beta)}|T_2| \leq O\left((n+\beta)exp\left(-\frac{\delta^2(n+\beta)}{3\xi}\right)\right)$$

çıkar.

$$\epsilon_v(n)[(v-\xi n)^2 + (v-\xi n)(\alpha-\xi\beta)](v-\xi n)$$

$$\leq (n+\beta)(v-\alpha)f\left(\frac{v+\alpha}{n+\beta}\right)$$

eşitsizliğinde $f(x) = O(x^k)$ kullanılırsa

$$e_v(n)[(v-\xi n)^2 + (v-\xi n)(\alpha-\xi\beta)](v-\xi n)$$

$$= O\left\{n^2\left[\frac{(v+\alpha)^{k+1}}{(n+\beta)^{k+1}}\right]\right\}$$

elde edilir.
Sonuç olarak

$$T_3 = O\left\{\sum_{(h-t\xi)\geq t\delta-k-1} n^2 \frac{(n\xi)^v}{v!}\right\}$$

bulunur. [1]' den

$$\frac{e^{n\xi}}{\xi(n+\beta)}T_3 = O\left\{(n+\beta)\exp(-\frac{\delta^2(n+\beta)}{3\xi})\right\}$$

çıkar. T_1, T_2, T_3 değerleri yerine yazılırsa

$$\left|\frac{d}{d\xi}P_n^g(\xi)\right| \leq O(\eta(\delta)\delta^2) + O\left\{(n+\beta)exp\left(-\frac{\delta^2(n+\beta)}{3\xi}\right)\right\}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\xi}P_n^f(\xi) = \frac{d}{d\xi}f(\xi)$$

eşitliği elde edilir.

3 Referanslar

[1] Butzer, P. L. On the extensions of of Bernstein Polynomials to the infinite interval, *Proc.* Amer. Math. Soch., 1954; 5, 547-553.
[2] Lorenz, G. G. Bernstein Polynomials, Toronto,1953.
[3]Sasz, O. Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval. Journal of Research of the National Bureau of Standards. 1950; 45(3), 239-244.
[4] Stancu, D. D. On the monotonicity of the sequence formed by the first order derivatives of the Bernstein polynomials. Math. Zeitschr. 1966; 98, 46-51.