ÇOK AMAÇLI BULANIK OPTİMİZASYON TEKNİĞİ İÇİN BİR ALGORİTMA

Ömer KELEŞOĞLU

Özet - **Bu çalışmada, bulanık kümeler kullanılarak, çok amaçlı bulanık optimizasyon algoritması oluşturulmuştur. Bunun için λ formülasyonu uygulanmıştır. Bulanık optimizasyon tekniğinin algoritması Ms-Excel'in makroları kullanılarak oluşturulmuştur. Geliştirilen algoritmanın uygulanabilirliği, çözülen sayısal örnekle gösterilmiştir. Çok amaçlı bulanık optimizasyon tekniğinin mühendislik problemlerinin analizinde kullanılabilecek alternatif bir metot olduğu belirtilmiştir.**

Anahtar Kelimeler - **Bulanık Kümeler, Üyelik Fonksiyonu, Optimizasyon,**

Abstract – **In this study, the algorithm has been presented of multi-objective fuzzy optimisation by using fuzzy sets. For this aim λ formulation was applied. The algorithm of fuzzy optimization was formed by using the macros of Ms-Excel. A number of design examples are presented to demonstrate the application of the algorithm. It is noticed that the multi-objective fuzzy optimization technique is alternate method that may be used for the analysis in engineer.**

Key Words - **Fuzzy Sets, Membership Function, Optimization**

Ö.Keleşoğlu, F.Ü. Teknik Eğitim Fakültesi, Yapı Eğitimi Bölümü, 23119. Elazığ

I. GİRİŞ

Bilimsel ve teknik alanda optimizasyon çok önemli bir yer tutmaktadır. Boyutlandırma, kontrol ve karar verme problemlerinin matematiksel optimizasyon olarak formülleştirilir. Optimizasyonun klasik yapısı belirli sınırlayıcılar altında amaç fonksiyonunun minimum veya maksimum hale getirilmesidir. Buna rağmen çoğu boyutlandırma problemleri birçok amaç fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Bu durumda çeşitli amaçlar arasından seçim yapılması gerekir. Böylece değişik amaç fonksiyonlarının daha az veya daha çok başarılı olmasına sebep oluşur. Buna ek olarak, problemin sınırlayıcılarını belirtmekte bazı esneklikler tanınabilir. Ayrıca karar vermedeki bazı amaç fonksiyonları sadece belli bir seviyeye kadar bilinebilir.

Tasarımcı çoğunlukla, sistemin hassas bir matematiksel modelini geliştirirken bazı problemlerle karşılaşır. Yetersiz veri, sistemin sınırlayıcıları, boyutlandırma amaçlarının yetersiz formülasyonu ve amaçlar arası bağıl önemi değerlendirmeme, hassasiyet eksikliğine sebep olur. Sistem karmaşıklaştıkça sistemin davranışı ve tasarımcının sistemi, hassas matematiksel terimlerle modellenmesi güçleşir. Boyutlandırma probleminin belirsiz ve karmaşık yapısını modellemek için bulanık küme teorisinin kullanılmalıdır. [14].

Bulanık küme teorisi Zadeh tarafından ortaya atılmıştır [13]. Bulanık küme teorisi bir optimizasyon probleminde kullanımına ilişkin ilk çalışmalar Tanaka ve Zimmermann tarafından yapılmıştır [10,14]. Mohandas Sandgren bir optimizasyon problemini modellemek için, bulanık küme teorisi olarak bir karar fonksiyonun formülasyonu verilmiştir [5]. Boyutlandırma problemlerin çözümünde tek ve çok amaçlı optimizasyonu için bulanık kümeler kullanılmış ve Rao çok amaçlı bulanık optimizasyonu için bir formülasyon vermiştir [7,8,9].
Geleneksel küme teorisinde, bir elemanın üyelik elemanı ya 0 yada 1 ile gösterilir. Halbuki, bulanık küme teorisinde, bu değer 0 ile 1 arasında herhangi bir değer olabilir. Üyelik elemanı bulanık kümeye ait olma derecesini gösterir.

Bu makalede, boyutlandırma problemlerinde bulanık kümeler kullanılarak problemlerin çok amaçlı optimizasyonu λ formülasyonun bir optimum boyutlandırmaya ulaşmak amacıyla kullanabileceğini gösterilmektedir.

II. BULANIK KÜME TEORİSİ

Bulanık mantık, bulanık küme teorisine dayanır. Bu teori aslında daha genel bir matematiksel küme yaklaşımıdır. Bu yaklaşımla çözülmesi çok güç olan problemler genel bir yapıya kavuşturularak daha kolay bir sonuca gidilir.

Bulanık küme teorisi kısmi üyeliğe izin veren bir teoridir. Yani, bir kümenin tam üyeliği ile o kümenin üyesi olmama durumları arasında, kademe kademe geçişe izin verir. Verilen bir elemanın bir kümede kısmi üyeliğinin başlaması demek, aynı zamanda bu elemanın bu kümenin üyesi olmama durumunun da kısmen başlaması demektir. Çünkü, bulanık küme teorisi hem tam üyeliğe hem de hiç üye olmamaya izin verir. İşte bundan dolayı bulanık küme teorisi, klasik küme teorisinin genelleştirilmiş bir halidir denilebilir.

Bulanık küme teorisindeki bulanıklık ile elemanların üyelik derecelerini veren üyelik fonksiyonları geliştirilerek keskin sınırlar ortadan kaldırılmıştır. Böylece üyeler ve üye olmayanlar arasında yumuşak bir geçiş sağlanmıştır.

II.1 Üyelik Fonksiyonları

Üyelik fonksiyonları olarak bilinirler ve *0* ile *1* arasında bir üyelik ağırlığına sahiptirler. Üyelik ağırlığı belirli bir değerin bir bulanık küme içerisinde yer almasının güvenirliliğinin ve eminliğinin bir işaretidir.

Şimdiye kadar yapılan açıklamaları daha matematiksel olarak yapmaya çalışalım; Eğer değerlendirme kümesinin $[0,1]$ geçek aralığı olmasına izin verilirse, o zaman *A* bir bulanık küme olarak tanımlanır. Burada $\mu_A(x)$ *x*'in *A*'daki üyelik derecesini verir. $\mu_A(x)$'in değeri *1*'e yaklaştıkça *x*'in *A* alt kümesindeki üyeliği artar. Başka bir değişle, *A, X*'in sınırları kesinlikle belirli olamayan bir alt kümesidir.

Bulanık küme teorisi, soyut küme teorisinin bir genelleştirmesidir. Başka bir değişle bulanık küme teorisindeki tanımlar, teoremler ve ispatlar bulanık olmayan kümeler için de daima doğrudur.

Bir bulanık küme, olası kısmi üyelere izin veren bir sınıftır. O taktirde *X'*deki bir *A* bulanık kümesi

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X)\} \tag{1}$$

sıralı ikililerinin bir kümesidir. $\mu_A(x)$ $[0,1]$ aralığında bir sayıdır.

X evrensel kümesindeki bir *A* kümesinin supportu (desteği) klasik kümesi olup *X'*in *A* bulanık kümesindeki *0'*dan büyük üyelik derecesi olan elemanlarını kapsar.

$$\sup A = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\} \tag{2}$$

Eğer *X* sonlu ve sayılabilir bir küme ve *A* bulanık kümesi *X*'de sonlu support varsa A aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + ... + \frac{\mu_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{x_i} \tag{3}$$

Eğer yukarıda tanımlanan *X* kümesi sonlu değilse, buna ait bir bulanık küme de şöyle ifade edilir.

$$A = \int_x \frac{\mu_A}{x} \tag{4}$$

II.2 Küme İşlemleri

Klasik küme teorisinde karakteristik fonksiyonun aldığı değer ya *0* ya da *1* dir. Bulanık küme anlayışında fonksiyonun değer kümesi $[0,1]$ kapalı aralığıdır.

X uzayında tanımlı iki *A* ve *B* kümesi düşünelim. Bu kümelerin üyelik fonksiyonları $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olsun. Burada $x \in X$ dir. Temel küme işlemleri aşağıda tanımlanmıştır.

Birleşim işlemi: $A \cup B$ kümesini üyelik fonksiyonu $\mu_{A \cup B}(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{5}$$

Kesişim işlemi: $A \cap B$ kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{A \cap B}(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{6}$$

Ters alma işlemi: *A'* kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{A'}(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{7}$$

III. BULANIK OPTİMİZASYON

Bulanık matematiksel programlama yöntemlerinden biri olan bulanık optimizasyon, bulanık ortamında karar vermeyi sağlayan bir tekniktir. Bulanık çevrede karar verme deyimiyle, sınırlayıcıların ya da amaçların ya da her ikisinin yapı olarak bulanık olduğu bir karar sürecinde kastedilmektedir. Bu amaçların ya da sınırlayıcıların sınırları kesin olarak tanımlanmamış alternatif gruplar içerdiği anlamına gelir. Amaç fonksiyonu ile sınırlayıcıların kesişimi sonucu elde edilen çözümlere ise bulanık karar denir. Bulanık alternatifler olarak adlandırılırlar. Alternatifler uzayındaki en yüksek üyelik derecesine sahip bulanık karar ya da kararlar ise, optimum karar olarak adlandırılır. Bulanık programlamada amaç optimum karara ulaşmaktır [2].

Bir problem bulanık optimizasyon yöntemi ile çözülürken dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan biri kullanılacak üyelik fonksiyonun biçiminin seçimidir. Çünkü seçilen üyelik fonksiyonu biçiminin doğruluğu ve problemin yapısına uygunluğu, problemin çözümünü doğrudan etkilemektedir.

III.1 Çok Amaçlı Bulanık Optimizasyonu İçin Matematiksel Model

Bu yöntem çok amaçlı optimizasyon tekniğine uygulanan, çok amaçlı bulanık optimizasyon yöntemidir. Boyutlandırma probleminin amaç fonksiyonları, sınırlayıcılarındaki belirsizlik ve karmaşık yapısını çözmek için bulanık kümeler kullanılarak modellenmiştir.

Başlangıçta bulanık küme bilgileri, her bir sınırlayıcı fonksiyonunun yerini tutan üyelik elemanları bulunmaktadır. Üyelik fonksiyonlarının biçimi parabol seçilerek, bulanık geçiş bölgesi en uygun şekilde tanımlanmış. Geliştirilen yöntemin formülasyonu aşağıdaki alt bölümlerde tanımlanmıştır.

Bulanık çok amaçlı optimizasyon probleminin durumu:

$$\min f(x) = \{f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)\}^T \tag{8}$$

$$g_j^{(l)} \le g_j(x) \le g_j^{(u)} \qquad j = 1,2,...,m, \tag{9}$$

Burada, x boyutlandırma değişkeni, $f(x)$ amaç fonksiyonunun vektörü, $g_j(x)$ *j.* sınırlayıcı fonksiyonu ve $\{l,\ u\}$ alt ve üst sınır değerleri olarak tanımlanır. Bulanık sınırlayıcı fonksiyonu $g_j(x)$'in üyelik derecesi $\mu_{gj}(x) > 0$ olmalıdır.

Çok amaçlı fonksiyon, $f(x)$'in bulanık kararı *D*, bulanık amaç ve bulanık sınırlayıcıların kesişimidir:

$$D = \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mu_{f_i}(x)\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} \mu_{g_j}(x)\right) \tag{10}$$

Buradan

$$\mu_D(x) = \min_{i,j}\{\mu_{f_i}[f_i(x)], \mu_{g_j}[g_j(x)]\} \tag{11}$$

elde edilir. Burada *i.* amaç ve *j.* sınırlayıcı fonksiyonun üyelik elemanları sırayla $\mu_{fi}(x)$ ve $\mu_{gj}(x)$ olarak tanımlanır. Optimum çözüm (x^*) değeri:

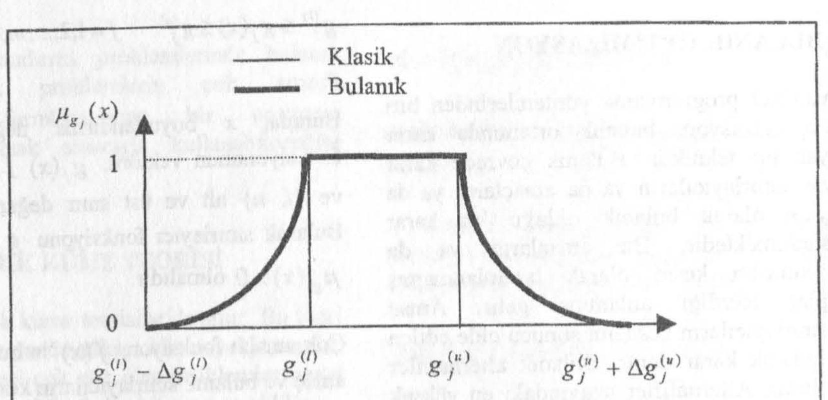
$$\mu_D(x^*) = \max \mu_D(x) \tag{12}$$

olarak tanımlanır. Amaç fonksiyonlarının minimum ve maksimum değerleri, değişkenlerin alt ve üst sınır değeri tarafından bulunur.

$$\left.\begin{aligned} f_i^{\min} &= \min_j f_i(x_j^*) = f_i(x_i^*) \\ f_i^{\max} &= \max_j f_i(x_j^*), \end{aligned}\right\}, i = 1,2,...,k, \tag{13}$$

Denklem (13) de belirtilen f_i 'nin sınır değerlerindeki, bulanık amaç fonksiyonlarının, üyelik fonksiyonları:

$$\mu_{f_i}(x) = \begin{cases} f_i(x) > f_i^{\max} & \text{ise} \quad 0. \\ f_i^{\min} < f_i(x) \le f_i^{\max} & \text{ise} \quad \left(\dfrac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}\right), i = 1,2,,...,k. \\ f_i(x) \le f_i^{\min} & \text{ise} \quad 1. \end{cases} \tag{14}$$



Şekil 1. Klasik ve Bulanık Sınırlar

λ parametresinin maksimum olması durumu, bulanık kararın en büyük değere ulaşmasını sağlar.

$$\lambda_i = [f_i^{max} - f_i(x)]/[f_i^{max} - f_i^{min}] \quad i = 1,2,\ldots,k \quad (15)$$

elde edilir.

Denklem (15) ile herbir amaç fonksiyonun λ değerleri birbirine eşitleyerek, bu eşitliği sağlayacak [0,1] aralığında birçok λ değerleri bulunur. Bulunan bu λ değerlerinden en büyüğü *(maxλ)* bulanık optimum kararı verir. Boyutlandırma probleminin üyelik elemanlarının maksimum hale getirilerek, amaç fonksiyonlarının minimizasyonu sağlanmış olur.

$$\max \lambda$$

$$\begin{aligned} &\lambda \le \mu_{f_i}(x), i = 1,2\ldots,k \\ &\lambda \le \mu_{g_j}(x), j = 1,2\ldots,m \qquad (16) \\ &\lambda \le \mu_{g_u}(x), j = 1,2\ldots,m. \end{aligned}$$

değerleri arasında bulunur.

III.2 Genel Amaçlı Bulanık Optimizasyon Makrosu

Günümüzde, elektronik tablo yazılımı, en popüler bilgisayar yazılımları arasında bulunmaktadır [1,12]. Elektronik hücreler topluluklarından oluşan elektronik tablolarda, yapılması istenen işlemler formüller halinde girilir ve otomatik olarak çalıştırılır veya bu işlemlere uygun komutlar kullanılır. Bu sebepten dolayı yaygınolarak kullanılan Ms-Excel elektronik tablolar, çeşitli hazır fonksiyonları ile kendine özgü bir programlama diline sahiptir. Elektronik tablolarla ilgili bir çok mühendislik uygulamaları yapılmıştır [3,5,6,11]. Elektronik tabloların etkileşim özelliğinden dolayı bulanık küme bilgilerinin işleme katılmasıyla çok amaçlı bulanık optimizasyon algoritması oluşturulmuştur.

IV. SAYISAL UYGULAMA

Amaç fonksiyonları;

$$\min \begin{cases} f_1(x) = x_1\sqrt{16 + y^2} + x_2\sqrt{1 + y^2} \\ f_2(x) = \dfrac{20\sqrt{16 + y^2}}{y x_1} \end{cases} \qquad (17)$$

Sınırlayıcılar ;

$$\begin{aligned} &g_1(x, y) \qquad f_1 \le 50 \\ &g_2(x, y) \qquad f_2 \le 100 \\ &g_3(x, y) \qquad \frac{80\sqrt{1 + y^2}}{y x_2} \le 250 \qquad (18) \\ &1 \le y \le 3 \\ &1 \le x_1, x_2 \le 5 \end{aligned}$$

x_1, x_2, y değişkenlerin alt ve üst sınır değerlerine göre $f_1^{max}, f_1^{min}, f_2^{max}, f_2^{min}$ değerleri bulunur.

$$f_1^{max} = 40.8114$$
$$f_1^{min} = 5.5373$$
$$f_2^{max} = 82.4611$$
$$f_2^{min} = 6.6667$$

Bulunan bu değerler denklem (14) ile (15)' de yerine yazarsak:

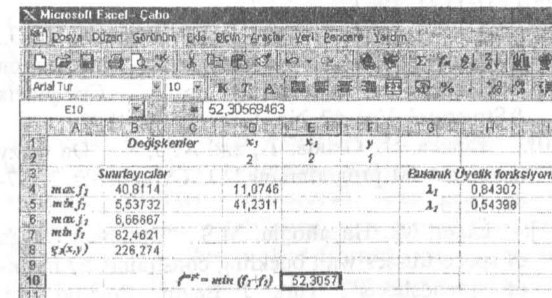
$$\mu_{f_1}(x) = \begin{cases} 0. & f_1 > 40.8114 \\ \left(\dfrac{40.8114 - f_1}{40.8114 - 5.5373}\right) & 5.5373 < f_1 \le 40.8114 \\ 1. & f_1 \le 5.5373 \end{cases} \qquad (19)$$

$$\mu_{f_2}(x) = \begin{cases} 0. & f_2 > 82.4621 \\ \left(\dfrac{82.4621 - f_2}{82.4621 - 6.6667}\right) & 6.6667 < f_2 \le 82.4621 \\ 1. & f_2 \le 6.6667 \end{cases} \qquad (20)$$

$$\lambda_1 = [40.8114 - f_1]/[40.8114 - 5.5373] \qquad (21)$$

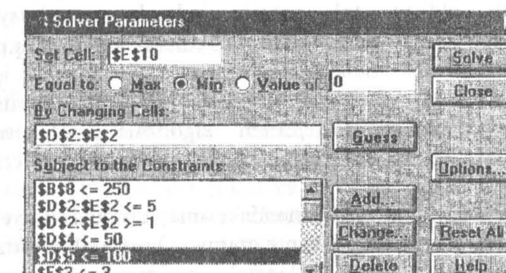
$$\lambda_2 = [82.4621 - f_2]/[82.4621 - 6.6667] \qquad (22)$$

Elektronik tablo üzerinde uygun yerlere, bağımsız değişkenin başlangıç değerleri yazılır. Bağımsız değişkenlerin bulunduğu hücreler referans gösterilerek, tablonun uygun yerlerinde amaç fonksiyonu ve sınırlayıcılar ile bulanık üyelik fonksiyonları formülize edilir. Amaç fonksiyonlarının minimum ve maksimum değerleri yazılır.



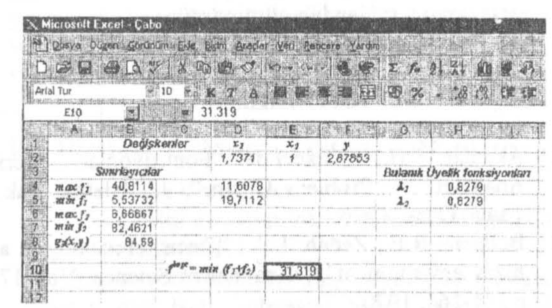
Şekil 2. Amaç Fonksiyonları ve sınırlayıcı Denklemleri

Solver çalıştırılır ve diyalog kutusunun ilgili yerlerine çok amaçlı fonksiyon ve sınırlayıcılar ile bulanık küme bilgileri girilir. Solver diyalog kutusunun options butonu yardımıyla, Solver seçenekleri diyalog kutusundan optimizasyon yöntemi, hassasiyet ve maksimum adım sayısı gibi bilgiler seçilir.



Şekil 3. Solver Parametreleri Diyalog Kutusu

Solver butonu yardımıyla bulanık optimizasyon işlemine başlanılır. Optimizasyon işlemi esnasında tablodaki değerlerin değişimi, otomatik etkileşim özelliğinden dolayı, görsel olarak izlenebilir. Yeterli yaklaşım sağlandığında, işlem sona erer.



Şekil 4. Çok Amaçlı Optimizasyonun Sonuçları

Optimizasyon yapmak için Excel'deki Solver parametresinden faydalanarak bulanık küme bilgilerinin işleme katılması ile bulanık optimizasyon yönteminin oluşturulması sağlanılmıştır. Burada λ_1, λ_2 parametrelerinden oluşan denklem (21), (22) kurulur.

Kurulan bu denklemler eşitlik sağlanacak şekilde [0,1] aralığında birçok λ değerleri bulunur. Bulunan bu λ değerlerinden en büyüğü *(max*λ*)* bulanık optimum kararı verir. Yani amaç fonksiyonlarını minimize eder.

Tablo1. Çok Amaçlı Bulanık Optimizasyon Sonuçları

max λ	$f^{bopt} = \min(f_1 + f_2)$	f_1	f_2	x_1	x_2	y
0.8279	31.3190	11.61	19.71	1.74	1	2.88

V. SONUÇLAR

Bir çok amaçlı optimizasyon probleminin belirsiz ve karmaşık yapısını boyutlandırmak için, bulanık kümeler kullanılarak bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntem Rao'nun [9] mühendislik sistemlerin çözümü için vermiş olduğu çok amaçlı bulanık optimizasyon parametresi olan λ formülasyonu katılarak kullanılmıştır.

1. Problemin bulanık optimizasyon ile çözümü için Ms-Excel' deki makroları kullanarak bir algoritma geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritma genel amaçlı olup, tek ve çok amaçlı optimizasyon problemlerine uygulanabilir.
2. Bulanık optimizasyonundaki amaç en yüksek üyelik derecesine sahip bulanık optimum karara ulaşmaktır.
3. Bulanık küme kullanarak optimizasyon yapma işleminin küçük bir yazılımla, daha hızlı bir sonuca ulaşıldığı görülmüştür.
4. Bulanık optimizasyonundaki amaç fonksiyonları da, birer sınırlayıcı olarak işleme katılmıştır.
5. Boyutlandırma probleminin belirsiz ve karmaşık yapısını modellemek için bulanık küme teorisi kullanımının uygun olduğu görülmüştür.
6. Klasik optimizasyon ile çözülebilen problem için kesinlik varsayımının sağlanması gerekirken, bulanık optimizasyonla çözülmesi için kesin olmama varsayımının sağlandığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1]. Akpınar, H., "Excel'de Fonksiyonlar, Veri Analizleri ve Problem Çözme", İ.Ü.İşletme Fak. 1.sayı, Ocak, 1996

[2]. Bellman, R.E., Zedah, L.A., "Decision-making in a fuzzy environment", Management Science, Vol. 17 p.141-164, 1970

[3]. Keleşoğlu, Ö., Aksoy, U.T., "Düzlem Çerçevelerin Elektronik Tablolarla Optimum Boyutlandırılması" F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Cilt 15, Sayı,1 ss.135-146, 2003

[4]. Keleşoğlu, Ö., Keleşoğlu, Ç., "Düzlem Kafes Sistemlerin Elektronik Tablolarla Optimum Boyutlandırılması" F.Ü. Doğu Anadolu Bölgesi Araştırmaları Dergisi (DAUM), Cilt 1, Sayı, ss.41-47, 2002

[5]. Mohandas, S.U., Phelps, T.A., Ragsdell, K.M., "Structural optimization using a fuzzy goal programming approach", Computers &Structural, Vol. 37, No. 1, pp. 1-8, 1990

[6]. Özmen, G., "Elektronik Tablolar İle Diferansiyel Denklemlerin Çözümü", İMO Teknik Dergisi, 1995

[7]. Rao, S.S., "Multiobjective optimization in structural design with uncertain parameters and stochastic processes", AIAA Jl 22, 1670-1678, 1984

[8]. Rao, S.S., "Multiobjective optimization of fuzzy structural systems", Int. J. Numer. Meth. Engng 24, 1157-1171, 1987

[9]. Rao, S.S., Sundararaju, K., Prakash, B.G., Balakrishna, C., "Multiobjective fuzzy optimization techniques for engineering design", Computers &Structural, Vol. 42, No. 1, pp. 37-44, 1992

[10]. Tanaka, H., Okuda, T., and Asia, K., "On fuzzy mathematical programming", J. Cybernetics 3, 37-46, 1974

[11]. Ülker, M., Hayalioğlu, M.S., "Optimum design of space trusses with buckling constraints by means of spreadsheets", Turk J Engin. Environ Sci, TÜBİTAK, 25, 355-367, 2001

[12]. Yurt, T., "Bilim ve teknoloji için excel uygulamaları", Alkım Kitapçılık Yayıncılık, 1994

[13]. Zedah, L., "Fuzzy sets", Information and Control 8, 338-353, 1965

[14]. Zimmermann, H.J., "Optimization in fuzzy environment", XXI International TIMS and 46th Conference, San Juan, Perto Rico, 1974