

## RASYONEL B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE EĞRİ VE YÜZEY OLUŞTURMA

Abdullah YILDIZ, Alper TURAN, Barış YILANCI

**Özet** - İnterpolasyon ve veri uydurma işleminde verilen data'lara uyan yeteri kadar esnekliğe sahip, bilgisayarda kolayca hesaplanabilen fonksiyonlar tercih edilir. Polinomlar bu amaç için kullanılabilir, fakat polinomların derecesinin artırılması düzensiz salınımlar sergileyen fonksiyonlar oluşturduğundan, tercih edilmezler. Bu amaçla kullanılan polinomların derecesinin artırılması düzensiz salınımlar sergileyen fonksiyonların elde edilmesine neden olur. Spline fonksiyonlarının düzgün ve esnek olmaları, kolayca depo edilebilmeleri, hesaplamada kolaylık sağlamaları, daha yüksek boyutlara kolayca genelleştirilebilmeleri nedeniyle, interpolasyon ve veri uydurma, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde, eğri ve yüzey yaklaşımında kompleks geometrik nesnelere matematik modellemesinde sıkça kullanılırlar.

Bu çalışmada; B Spline baz fonksiyonları ve Rasyonel B-spline eğrilerinin, türevleri ve özellikleri verilmiştir. B-Spline yüzeylerinin tanımı verilmiştir. Rasyonel B-spline yüzeylerinin tanımı, özellikleri, ve dönüş yüzeyleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. C kodları kullanılarak, rasyonel B-spline eğrisi ve yüzeyleri ile ilgili örnekler yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler** - Spline, Rasyonel B-spline, Poligon Köşesi ve Ağı

**Abstract** - In the process of interpolation and data fitting we prefer some functions that have flexible, easily calculatable in computer. We can use polynom for this they increas in order of polynomial oscillation exhibiting functions they become unsatisfactory since being smoth and flexible, they store in computer calculation easily, and obtaining higher degree fastly.

We use frequently spline functios in the interpolation and curve and surface fitting, solution of differential equations etc..

Abdullah YILDIZ, Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü-SAKARYA  
Alper TURAN, Şirinevler İlköğretim Okulu-İSTANBUL  
Barış YILANCI, Beykoz Rüzgarlı Bahçe İlköğretim Okulu-İSTANBUL

Especially in this paper we analyse B-spline base functions and rational B-spline functions with some theirs properties and also derivatives.

We give definitions of B-spline surface and rational B-spline surface and some important properties were studied. Using C-language codes, some applications aremode related to rational B-spline curvatuaires and surfaces.

**Keywords** - Spline, Rational B-spline, Polygon corner and net.

### I.GİRİŞ

Polinom interpolasyonunda yaklaşım yapılacak olan fonksiyonun değerleri hızlı bir şekilde değişiyorsa polinomun derecesi artırılmalıdır. Bunun sonucunda sık sık düzensiz salınımlar yapan fonksiyonlar elde edilir. Bu durum temel aralık alt aralıklara bölündüğünde ve istenen yaklaşım fonksiyonu bu aralıklarda tanımlanan düşük dereceli, farklı polinomlarla gösterilen parçalı bir polinom olarak adlandırıldığında değişir. Bu nedenle Spline fonksiyon adı verilen yeni bir fonksiyon sınıfının kullanılması daha uygundur. Spline fonksiyon ilk defa 1946 yılında Schönberg tarafından öne sürülmüş ve 1960 yılından başlayarak teori ve pratikte büyük bir gelişme göstermiştir.

Özellikle, Spline fonksiyonu birçok alanda kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları yaklaşım teorisi, nümerik türev ve integrasyon, kısmi türevli diferansiyel denklemler, eğri ve yüzey (otomobil gövdeleri, uçak gövdeleri ve kanatları, şişe, mobilya, ayakkabı dizaynı vb.) oluşturulması ve kompleks geometrik şekilli nesnelere matematik modelinin geliştirilmesidir.

### II.EĞRİ OLUŞTURMA

#### II.1 B-Spline Eğrileri

Matematiksel açıdan, eğri poligon arasında bir ilişki kurmak için poligonun köşelerini kullanarak üretilen eğri, interpolasyona veya yaklaşım metoduna bağlıdır. Bu durum baz fonksiyonlarının seçimleri ile sağlanır. Örneğin, Bernstein bazı ile Bezier eğrileri üretilir.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.1)$$

2.2 denklemleri ile verilen  $J_{n,i}(t)$  Blendig veya Bernstein fonksiyonunun değeri, eğri üzerindeki tüm parametre değerleri için sıfırdan farklıdır.

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (0)^0 \equiv 1, 0! \equiv 1 \quad (2.2)$$

Bernstein bazını özel bir durum olarak içeren ve B-spline bazı olarak isimlendirilen başka bazlarda vardır.

B-spline bazları, baz fonksiyonunun sıfır olmadığı parametre değerlerinin aralığı üzerinde eğrinin şeklini etkiler.

B-spline bazları, baz fonksiyonlarının derecesinin değiştirilmesine dolayısıyla, poligon düğüm noktalarının sayısını değiştirmeden eğrinin değiştirilmesine izin verir.  $P(t)$  eğri boyunca olan yer vektörü olsun. B-spline eğrisi

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t), \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \quad (2.3)$$

$2 \leq k \leq n+1$

ile verilir. Burada  $B_i$ ,  $n+1$  tane poligon düğüm noktalarının yer vektörleridir ve  $N_{i,k}$  mertebesi  $k$  (derecesi  $k-1$ ) olan  $i$ . normalize edilmiş baz fonksiyonlarıdır.  $k$  mertebeli ( $k-1$  dereceli)  $i$ . normalize edilmiş B-spline baz fonksiyonu için  $N_{i,k}(t)$  baz fonksiyonları

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer hallerde} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_{i+1}} \quad (2.5)$$

ile tanımlanır.

B-spline eğrileri esnek olduğundan eğrinin şeklini değiştirmek mümkündür. Bu işlem;

- i) Düğüm vektörü ve baz fonksiyonunun tipi değiştirilerek,
- ii) Baz fonksiyonunun  $k$  mertebesi değiştirilerek,
- iii) Poligon ve düğüm noktaları kullanılarak,
- iv) Katlı poligon düğüm noktaları kullanılarak,
- v) Düğüm vektöründe katlı düğüm değerleri kullanılarak yapılır.

## II.2 Rasyonel B-spline Eğrisi

Rasyonel B-spline eğrisi, 4 boyutlu homojen koordinat uzayında tanımlı rasyonel olmayan B-spline eğrisinin 3 boyutlu uzayda ki iz düşümüdür.

$B_i^h$  4 boyutlu rasyonel olmayan B-spline eğrileri için 4 boyutlu homojen tanımlı poligon köşeleri ve  $N_{i,k}(t)$  rasyonel olmayan B-spline temel fonksiyonudur.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^h N_{i,k}(t) \quad (2.6)$$

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R_{i,k}(t) \quad (2.7)$$

$$R(t) = \frac{h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} \quad (2.8)$$

rasyonel B-spline temel fonksiyonudur. Burada  $i$ 'nin bütün değerleri için  $h_i \geq 0$  dir.

Denklemler 2.1 'den 2.3 'e kadar görüldüğü gibi, rasyonel B-spline temel fonksiyonlarının ve eğrilerinin genelleştirilmiştir. Rasyonel B-spline temel fonksiyonları rasyonel olmayan B-spline karşı parçalarının hemen hemen bütün özelliklerini ileri taşır.

Rasyonel B-spline eğrisinin özellikleri ;

- i) Her rasyonel B-spline temel fonksiyonu, bütün parametre değerleri için sıfırdan büyük veya sıfıra eşittir  $R_{i,k} \geq 0$ .
- ii) Herhangi bir  $t$  parametre değeri için rasyonel B-spline temel fonksiyonlarının toplamı 1 'dir.

$$\sum_{i=1}^{n+1} R_{i,k}(t) = 1$$

- iii)  $k=1$  değeri için her rasyonel temel fonksiyon bir maksimuma sahiptir.
- iv)  $(k-1)$ 'inci dereceden rasyonel B-spline eğrisi  $C^{k-2}$  dir ve her yerde süreklidir.
- v) Rasyonel B-spline eğrisinin maksimum dizimi, tanımlı poligon noktalarının sayısına eşittir.
- vi) Rasyonel B-spline eğrisi, azalan değişim özelliği gösterir.
- vii) Rasyonel B-spline eğrisi, genellikle tanımlanan poligonun şeklini takip eder.

viii) Rasyonel B-spline eğrisi  $k$  kadar, tanımlı poligon noktalarının yardımıyla oluşan birleşmiş dış büyük kabukların içinde yer alır.

## III. YÜZEY OLUŞTURMA

### III.1 B-Spline Yüzeyleri

B-spline yüzeyleri ;

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,\ell}(w) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $N_{i,k}(u)$  ve  $M_{j,\ell}(w)$  sırasıyla  $u$  ve  $w$  vektörleri yönlerinde ki B-spline baz fonksiyonlarıdır.

$$N_{i,k}(u) = \begin{cases} 1 & x_i \leq u \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{aksi hallerde} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-x_i)N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k}-x_{i+1}} \quad (3.3)$$

$$M_{i,\ell}(w) = \begin{cases} 1 & y_i \leq w \leq y_{i+1} \\ 0 & \text{aksi hallerde} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$M_{i,\ell}(w) = \frac{(w-y_i)N_{i,\ell-1}(w)}{y_{i+\ell}-y_i} + \frac{(y_{i+\ell}-w)N_{i+1,\ell-1}(w)}{y_{i+\ell}-y_{i+1}} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır.  $x_i$  ve  $y_i$  düğüm vektörlerinin elemanları,  $B_{i,j}$  ler poligon ağının köşeleridir.  $n$  ve  $m$  indisleri sırasıyla,  $u$  ve  $w$  yönlerinde tanımlanan düğüm noktaları sayısından bir eksiktirler.

Rasyonel ve rasyonel olmayan Bezier eğrilerinin her ikisi de rasyonel B-spline eğrilerinin özel durumunu oluşturur.

Rasyonel B-spline eğrisinin türevi denklem 2.7 ve 2.8 in türevi alınarak bulunur.

$$P'(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R'_{i,k}(t) \quad (3.6)$$

ile

$$R'_{i,k}(t) = \frac{h_i N'_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} - \frac{h_i N_{i,k}(t) \sum_{i=1}^{n+1} h_i N'_{i,k}(t)}{\left( \sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t) \right)^2} \quad (3.7)$$

$t = 0$  için ;

$$P'(0) = (k-1) \frac{h_2}{h_1} (B_2 - B_1) \quad (3.8)$$

$t = n - k + 2$  için ;

$$P'(n - k + 2) = (k-1) \frac{h_{n+1}}{h_n} (B_{n+1} - B_n) \quad (3.9)$$

Bu denklemler sırasıyla ilk ve son poligon çizgileri boyunca eğimin yönünü gösterir. Yüksek dereceden türevler benzer yollarla elde edilir.

Rasyonel eğrilerde olduğu gibi, Coons bicüvik yüzeylerin ve Bezier yüzeylerinin ikinci derece yüzeylerinin de rasyonel halleri mümkündür.

Bununla beraber hem uzayın sınırlarından hem de tüm bu yüzeylerin genelleştirilmesinin bir gösteriminden dolayı sadece rasyonel B-spline yüzeyleri düşünülmüştür.

3 boyutlu homojen koordinat uzayında kartezyen çarpım B-spline yüzeyi aşağıdaki denklemle verilmiştir.

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,\ell}(w) \quad (3.10)$$

$B_{i,j}^h$  ler burada dört boyutlu tanımlı poligon köşeleri,  $N_{i,k}(u)$  ve  $M_{j,\ell}(w)$  ler önceden denklem 2.4 te verilen rasyonel olmayan B-spline temel fonksiyonlarıdır.

3 boyutlu uzayda, izdüşümün homojen koordinatlara bölümü rasyonel B-spline yüzeyini verir.

$$Q(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,\ell}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,\ell}(w)} \quad (3.11)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, w)$$

Burada  $B_{i,j}$  ler 3 boyutlu tanımlı poligon ağ noktaları ve  $S_{i,j}(u, v)$  ler iki değişkenli rasyonel B-spline yüzeyi temel fonksiyonlarıdır.

$$S_{i,j}(u, w) = \frac{h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,\ell}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,\ell}(w)} \quad (3.12)$$

Bütün  $i, j$  ler için  $h_{i,j} \geq 0$  kabul etmek uygundur.

Rasyonel B-spline yüzeyinin özellikleri;

i ) Herhangi  $u, w$  değerleri için rasyonel temel fonksiyonlarının toplamı 1 dir.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} S_{i,j}(u, w) \equiv 1 \quad (3.13)$$

Burada  $u, w$  gibi bütün parametre değerleri için  $S_{i,j} \geq 0$  dir.

ii )  $k=1$  veya  $\ell=1$  için hariç , bütün rasyonel yüzey temel fonksiyonları fonksiyonları bir maksimuma sahiptir.

iii ) Her parametrik yönde rasyonel B-spline yüzeyinin maksimum derecesi bu yöndeki tanımlı poligon ağ köşelerinin sayısına eşittir.

iv )  $k, \ell$  mertebesinde ki rasyonel B-spline yüzeyi

$(k-1, \ell-1)$  derecede  $C^{k-2}, C^{\ell-2}$  her yerde süreklidir.

v ) Rasyonel B-spline yüzeyinin izdüşüm dönüşümü farklı değildir.

vi ) Yüzey  $k, \ell$  poligon ağ köşelerinin bütün dışbükey kabuğunun birleşimi alınarak oluşturulan, tanımlı poligon ağ köşelerinin dışbükey gövdesinin içindedir.

vii ) Tek poligon ağ köşeleri her parametrik yönde  $\pm k/2, \pm \ell/2$  aralığı ile sınırlanmıştır.

viii ) Eğer üçgenleştirilmiş ise tanımlı poligon ağ şekilleri yüzeye düzlemsel yaklaşımlardır.

Eğer tanımlı ağ köşelerinin sayısı her parametrik yöndeki dereceye eşitse ve iç düğüm vektörlerinin değerleri yoksa, rasyonel B-spline yüzeyleri rasyonel Bezier yüzeyleridir.

Sonuç olarak, rasyonel B-spline yüzeyleri rasyonel olamayan B-spline yüzeylerinin genelleştirilmiş özelliklerini gösterir.

Rasyonel B-spline yüzeylerinin güçlü çekimlerinden biride ikinci derecen yüzeyler göstermesi ve onları yüksek dereceli sculptured yüzeylere düzgünce karıştırmasıdır.

$u$  parametresi yönünde yüzeyin süpürülmesiyle yüzey gösterimi;

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, w) \quad (3.14)$$

$S_{i,j}(u, w)$  ler  $w$  parametresi yönünde ikinci sırada  $u$  parametresi yönünde eğrinin derecesidir. Ayrıca tanımlı poligon ağ köşeleri ( $u$  yönündeki)  $B_{1,j} = B_i$  ve  $B_{2,j} = B_j + sD$  dir. Burada  $D$  süpürülecek mesafeyi ve onun yönünü verir.  $s, 0 \leq s \leq 1$  aralığında bir parametredir.  $B_j$  lerde süpürülen eğri için tanımlı poligon köşeleridir. homojen koordinatlar süpürme yönünde sabit kalırlar. ( $h_{1,j} = h_{2,j} = h_j$  dir.)

dönüş yüzeyleri rasyonel B-spline lerle gösterilebilir. Bir rasyonel B-spline eğrisi olan  $[Y]$  düğüm vektörü ile

$$P(w) = \sum_{i=1}^{m+1} B_{i,j} R_{j,\ell}(w) \text{ olduğu kabul edilerek ve } g$$

poligon köşeleri tanımlı, dört çeyrek dairenin birleşmesi ile bir tam dairenin elde edileceği düşünülür. B-spline dönüş yüzeyi şu şekilde tanımlanır.

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, w) \quad (3.15)$$

Burada düğüm vektörü  $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$  dir. Dönüşün  $z$  eksenini etrafında oluşturduğu ve  $P(w)$  eğrisinin  $xz$  düzleminde tanımlandığı kabul edilerek

$1 \leq i \leq 9$  ile sabit bir  $j$   $B_{i,j}$  ler  $B_{1,j} = B_j$  olarak verilir. Tanımlı poligon köşeleri,  $z$  eksenine dik bir yüzey içinde, kenar uzunluğu dönüş dairesinin yarı çapının iki katı olan bir karenin köşelerinden ve orta noktalarından oluşur.

Rasyonel B-spline yüzeyinin türevi denklem 3.11 in biçimsel türevinden elde edilir.

$$Q_u = \frac{\bar{N}}{D} \left( \frac{\bar{N}_u}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_u}{\bar{D}} \right) \quad (3.16a)$$

$$Q_w = \frac{\bar{N}}{D} \left( \frac{\bar{N}_w}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_w}{\bar{D}} \right) \quad (3.16b)$$

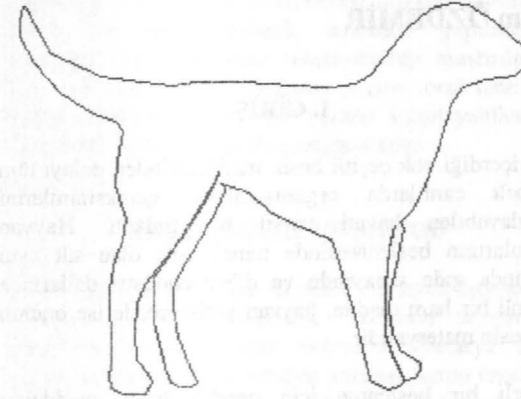
$$Q_{uw} = \frac{\bar{N}}{D} \left( \frac{\bar{N}_{uw}}{\bar{N}} - \frac{\bar{N}_u \bar{D}_w}{\bar{N} \bar{D}} - \frac{\bar{N}_w \bar{D}_u}{\bar{N} \bar{D}} + 2 \frac{\bar{D}_u \bar{D}_w}{\bar{D} \bar{D}} - \frac{\bar{D}_{uw}}{\bar{D}} \right) \quad (3.16c)$$

$$Q_{uu} = \frac{\bar{N}}{D} \left( \frac{\bar{N}_{uu}}{\bar{N}} - 2 \frac{\bar{N}_u \bar{D}_u}{\bar{N} \bar{D}} + 2 \frac{\bar{D}_u^2}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{D}_{uu}}{\bar{D}} \right) \quad (3.16d)$$

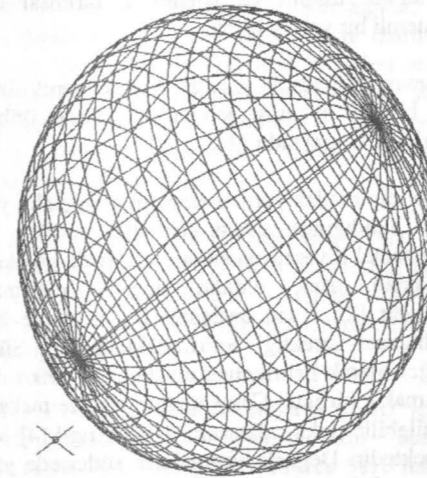
$$Q_{ww} = \frac{\bar{N}}{D} \left( \frac{\bar{N}_{ww}}{\bar{N}} - 2 \frac{\bar{N}_w \bar{D}_w}{\bar{N} \bar{D}} + 2 \frac{\bar{D}_w^2}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{D}_{ww}}{\bar{D}} \right) \quad (3.16e)$$

dir.

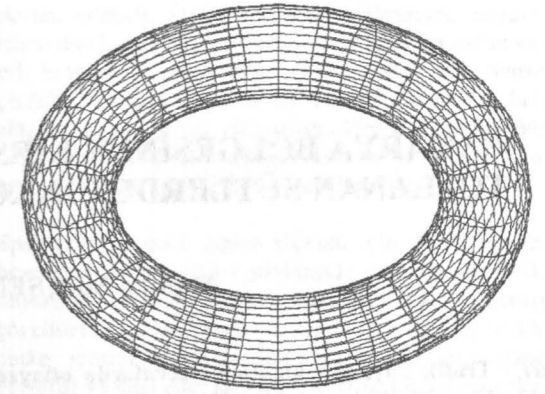
#### IV. UYGULAMALAR



Şekil 4.1 Rasyonel B-spline eğrileri ile C progama dilinde çizdirilmiş köpek resmi ,



Şekil 4.2 90° lik 2 yayın birleşmesi ile oluşan bir yarım dairenin , yarıçapı olan bir eksen etrafında döndürülmesi ile oluşan şekil



Şekil 4.3 Ofset çemberinin eksenlerden birinin etrafında döndürülmesi ile elde edilen şekil

#### KAYNAKLAR

- [1]. BARSKY, B.A., "End Conditions and Boundary Conditions for uniform B-spline Curve and Surface Representations," Comp. In Indus., Vol. 3, pp.17-29, 1982
- [2]. HILL, F.S.JR., Computer Graphics Using Open GL, Prentice Hall, New Jersey, 1990
- [3]. KINCAID, D. and CHENEY, W., Numerical Analysis, Brooks/Cole Publishing Company, California, 1991
- [4]. MATHEWS, J.H., Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1992
- [5]. PIEGL, L. and TILLER, W., The Nurbs Book, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1997
- [6]. ROGERS, D.F. and ADAMS, J.A., Mathematical Elements For Computer Graphics, Mc Graw-Hill Publishing Company, New York, 1990
- [7]. SCHAWARS, H.R., Numeric analysis, John Wiley & Sons, New York, 1989