Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Urysohn Tür İntegral Denklem ile Verilen Kontrol Sistemin Yörüngeler Kümesinin Özellikleri Üzerine

Nesir HÜSEYİN [a,*]

[a] *Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Eğitim Fakültesi, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas, TÜRKİYE*
** Sorumlu yazarın e-posta adresi: nhuseyin@cumhuriyet.edu.tr*
DOI: 10.29130/dubited.1186317

Öz

Bu çalışmada Urysohn tür integral denklem ile verilen control systemin yörüngeler kümesinin özellikleri incelenmektedir. Kontrol fonksiyonların integral kısıtı sağladığı varsayılmaktadır. Yörüngeler kümesinin control kaynağın sınırını belirleyen parametreye göre Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanmıştır. Yörüngeler kümesinin çapı için bir üst değerlendirme verilmiştir. Sistemin yörüngesinin, kalan control kaynağına göre robastlığı tartışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Doğrusal olmayan integral denklem, Kontrol sistem, İntegral kısıtlama, Yörüngeler kümesi, Robastlık*

On the Properties of the Set of Trajectories of the Control System Described by Urysohn Type Integral Equation

Abstract

In this study, the properties of the set of trajectories of the control system described by Urysohn type integral equation are studied. It is assumed that the control functions satisfy integral constraint. It is proved that the set of trajectories is Lipschitz continuous with respect to the parameter which characterizes the bound of control resource. An upper estimation for the diameter of the set of trajectories is given. Robustness of the system's trajectory with respect to the remaining control resource is discussed.

Keywords: *Nonlinear integral equation, Control system, Integral constraint, Set of trajectories, Robustness*

Geliş: 10/10/2022, Düzeltme: 05/11/2022, Kabul: 28/12/2022

I. GİRİŞ

İntegral denklemler teori ve uygulamalarda ortaya çıkan bir çok süreçlerin matematiksel modellerinde kullanılan uygun yapılardan biridir. XX asrın önemli bilim adamlarından W.Heisenberg ünlü "Fizik ve Felsefe" kitabında integral denklemlerin öneminden aşağıdaki biçimde bahsetmektedir: "Maddenin hareketinin son denklemi büyük olasılıkla nicelenmiş doğrusal olmayan dalga denklemidir… Bu dalga denklemi muhtemelen oldukça karmaşık integral denklemler sistemine eşdeğer olacaktır…" (bkz., [1, s.68]). Ayrıca integral denklemler teorisi çağdaş fonksiyonel analizin kökenlerinden biri olarak kabul edilmektedir (bkz., [2, bölüm 1, s.2]). Diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemleri için çözüm kavramı uygun integral denklemin çözümü kavramına indirgenmektedir. İntegral denklemlerle tasvir edilen bazı süreçler, kontrol etki denilen bazı dış etkilere maruz kalmaktadır. Kontrol kaynakların türüne göre, kontrol sistemler aşağıdaki biçimde sınıflandırılmaktadır: a) kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemler; b) kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemler; c) kontrol fonksiyonları karmaşık sınırlı olan kontrol sistemler. Geometrik kısıtlı kontrol fonksiyonlar verilen kümede değerler alan fonksiyonlar ve kullandığında tükenmeyen kontrol etkilerdir (bkz., [3] - [5]). İntegral kısıtlamalar kullanıldığında tükenen, örneğin enerji, yakıt, finans gibi kontrol etkilerde ortaya çıkmaktadır (bkz., [6] - [12). Kontrol fonksiyonları karmaşık kısıtlı olan kontrol sistemler, aynı zamanda geometrik ve integral kısıtlı kontrol fonksiyonları içeren kontrol sistemlerdir. Kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı olan kontrol sistemler, diferansiyel ve integral içermeler teorisi kapsamında da incelenmektedir (bkz., [13] - [15]).

Urysohn tür integral denklem ile verilen kontrol sistemlerin farklı özellikleri [16]-[21] 'de incelenmektedir. [18]-[20] çalışmalarında yörüngeler kümesinin yaklaşımı, [21], [22] 'de kompaktlığı tartışılmaktadır. Ele alınan çalışmada davranışı Urysohn tür integral denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemler araştırılmaktadır. Denklemin kontrol vektöre göre afin, kontrol fonksiyonların ise $E \subset R^k$ kompakt küme olmak üzere $L_p(E; R^m)$, $p > 1$ uzayının kapalı yuvarından seçildiği varsayılmaktadır. Sistemin yörüngesi, sistem denklemini her yerde sağlayan sürekli fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Yörüngeler kümesinin kaynak sınırına bağımlılığı ve yörüngeler kümesinin çapı incelenmektedir.

Makalenin içeriği aşağıdaki gibidir. 2.Bölümde daha sonraki araştırmalarda kullanılacak ve sistem denkleminin sağlaması gereken temel koşullar verilmiştir. 3.Bölümde sistemin yörüngeler kümesinin bir küme değerli dönüşüm olarak, sistemin kontrol kaynağının sınırı olan r parametresine göre Lipschitz sürekli olduğu kanıtlanmıştır (Teorem 3.1). 4.Bölümde yörüngeler kümesinin çapı için bir üst değerlendirme verilmiştir (Teorem 4.1). 5.Bölümde sistemin yörüngesinin kalan kontrol kaynağa göre robast olduğu kanıtlanmış (Teorem 5.1) ve her yörüngenin kontrol kaynağı tam tüketmek üzere elde edilen yörünge ile yaklaştırıla bilirliği gösterilmiştir (Teorem 5.2).

II. SİSTEMİN DAVRANIŞI

Davranışı Urysohn tür

$$x(\omega) = g\big(\omega, x(\omega)\big) + \lambda \int_E [\, F_1\big(\omega, s, x(s)\big) + F_2(\omega, s, x(s)) v(s)] ds, \qquad \omega \in \Omega, \tag{1}$$

integral denklemi ile verilen kontrol sistem ele alalım. Burada $x(\omega) \in R^n$ durum vektörü, $u(s) \in R^m$ kontrol vektörü, $\lambda \geq 0$ verilen sayı $E \subset R^k$, $\Omega \subset R^k$ kompakt kümeler, $E \subseteq \Omega$. (1) sistemi kontrol vektörüne göre afin, durum vektörüne göre ise doğrusal olmayandır. Bundan dolayı (1) sistemi afin sistem olarak adlanır.

$p > 1$ ve $r \geq 0$ verilen sayılar olsun.

$G_{p,r} = \{v(\cdot) \in L_p(E; R^m): \|v(\cdot)\|_p \le r\}$

kümesine mümkün kontrol fonksiyonları kümesi ve her $v(\cdot) \in G_{p,r}$ fonksiyonuna ise mümkün kontrol fonksiyonu denir. Burada $L_p(E; R^m)$ Lebesgue ölçülebilir ve $\|v(\cdot)\|_p < \infty$ olacak biçimdeki $v(\cdot): E \to R^m$ fonksiyonlar uzayıdır, $\|v(\cdot)\|_p = \left(\int_E \|v(s)\|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}}$ olarak tanımlıdır, $\|\cdot\|$ Euclid normu göstermektedir.

Açıktır ki, $G_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonları kümesi $L_p(E; R^m)$ uzayın merkezi orijinde, yarıçapı r olan kapalı yuvarıdır.

(1) sisteminde verilen fonksiyonların ve λ sayısının aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılmaktadır:

2.A. $g(\cdot\,,\ \cdot): \Omega \times R^n \to R^n$, $F_1(\cdot\,,\ \cdot\,,\ \cdot): \Omega \times E \times R^n \to R^n$ ve $F_2(\cdot\,,\ \cdot\,,\ \cdot): \Omega \times E \times R^n \to R^{n\times m}$ fonksiyonları süreklidir;

2.B. keyfi $(\omega, x_1) \in \Omega \times R^n$, $(\omega, x_2) \in \Omega \times R^n$ için

$\|g(\omega, x_1) - g(\omega, x_2)\| \le \kappa_0 \|x_1 - x_2\|$

ve keyfi $(\omega, s, x_1) \in \Omega \times E \times R^n$, $(\omega, s, x_2) \in \Omega \times E \times R^n$ için

$\|F_1(\omega, s, x_1) - F_1(\omega, s, x_2)\| \le \kappa_1 \|x_1 - x_2\|$, $\|F_2(\omega, s, x_1) - F_2(\omega, s, x_2)\| \le \kappa_2 \|x_1 - x_2\|$

olacak biçimde $\kappa_0 \in [0,1)$, $\kappa_1 \ge 0$ ve $\kappa_2 \ge 0$ sayıları vardır;

2.C. $\lambda \left(\kappa_1 \mu(E) + \kappa_2 r_* [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}\right) < 1 - \kappa_0$ olacak biçimde $p > 1$ and $r_* > 0$ sayıları vardır. Burada $\mu(E)$ sayısı E kümesinin Lebesgue ölçümünü göstermektedir.

$$P(\lambda; p, r) = \kappa_0 + \lambda \left(\kappa_1 \mu(E) + \kappa_2 r [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}\right) \tag{2}$$

olsun. 2.C koşulundan $P(\lambda; p, r_*) < 1$ olduğu elde edilir. O halde her $r \in [0, r_* + \tau_*]$ için $P(\lambda; p, r) < 1$ olacak biçimde $\tau_* > 0$ vardır.

$$P_*(\lambda; p) = \kappa_0 + \lambda \left[\kappa_1 \mu(E) + \kappa_2 (r_* + \tau_*) \cdot [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}\right] \tag{3}$$

olarak gösterelim. Açıktır ki, $P_*(\lambda; p) < 1$. Bundan sonra $r \in [0, r_* + \tau_*]$ olduğunu varsayacağız.

Şimdi (1) sisteminin verilen mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesini tanımlayalım. $v(\cdot) \in G_{p,r}$ olsun. Her $\omega \in \Omega$ için (1) denklemini sağlayan sürekli $x(\cdot): \Omega \to R^n$ fonksiyonuna (1) sisteminin $v(\cdot) \in G_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi denir. (1) sisteminin tüm $v(\cdot) \in G_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesini $T_{p,r}$ olarak gösterelim ve verilen $\omega \in \Omega$ için

$$T_{p,r}(\omega) = \{x(\omega) \in R^n : x(\cdot) \in T_{p,r}\} \tag{4}$$

olsun. $T_{p,r}$ kümesine (1) sisteminin yörüngeler kümesi denir. Açıktır ki, $T_{p,r} \subset C(\Omega; R^n)$. Burada $C(\Omega; R^n)$, normu $\|x(\cdot)\|_C = \max\{\|x(\omega)\| : \omega \in \Omega\}$ olarak tanımlı sürekli $x(\cdot): \Omega \to R^n$ fonksiyonlar uzayıdır.

$c_0 = \max\{\|f(\omega, 0)\|: \omega \in \Omega\}$,

$c_1 = \max\{\|F_1(\omega, s, 0)\|: (\omega, s) \in \Omega \times E\}$,

$c_2 = \max\{\|F_2(\omega, s, 0)\|: (\omega, s) \in \Omega \times E\}$,

$\Gamma(\lambda; p) = c_0 + \lambda\left(c_1\mu(E) + c_2(r_* + \tau_*)[\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}\right)$,

$$\gamma_* = \frac{\Gamma(\lambda; p)}{1 - P_*(\lambda; p)} \qquad (5)$$

olsun. (5) ‘te verilen $P_*(\lambda; p)$, (3) ile tanımlıdır.

$V \subset R^n$ ve $U \subset R^n$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı $h_n(V, U)$ ile, $W \subset C(\Omega; R^n)$ ve $E \subset C(\Omega; R^n)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı ise $h_C(W, E)$ ile gösterelim (bkz., [13], [14]).

Daha sonraki incelemelerde kullanacağımız bazı yardımcı önermeler verelim.

Önerme 2.1. Her $v_*(\cdot) \in G_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonu (1) sisteminin tek yörüngesini üretir.

Önerme 2.2. Her $x(\cdot) \in T_{p,r}$ ve $r \in [0, r_* + \tau_*]$ için $\|x(\cdot)\|_C \leq \gamma_*$ eşitsizliği sağlanıyor.

Önerme 2.3. $\omega \to T_{p,r}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, küme değerli dönüşümü Hausdorff metriğine göre süreklidir.

Teorem 2.1. (1) sisteminin $T_{p,r}$ yörüngeler kümesi $C(\Omega; R^n)$ uzayının kompakt alt kümesidir.

Önerme 2.1, Önerme 2.2, Önerme 2.3 ve Teorem 2.1 ‘in kanıtı uygun olarak [21] ‘de verilen Teorem 1, Teorem 2, Sonuç 1 ve Teorem 5 ‘in kanıtlarına benzerdir.

III. YÖRÜNGELER KÜMESİNİN r ‘ye BAĞLANTISI

$$M_2 = \max\{\|F_2(\omega, s, x)\|: (\omega, s, x) \in \Omega \times E \times B_n(\gamma_*)\}, \qquad (6)$$

$$M_* = \frac{\lambda M_2[\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}}{1 - P_*(\lambda; p)} \qquad (7)$$

olarak gösterelim. Burada $B_n(\gamma_*) = \{x \in R^n: \|x\| \leq \gamma_*\}$, $\gamma_* > 0$ sayısı (5) eşitliği ile tanımlanmıştır.

Teorem 3.1. Keyfi $r_1 \in [0, r_* + \tau_*]$ ve $r_2 \in [0, r_* + \tau_*]$ için

$h_C\left(T_{p,r_1}, T_{p,r_2}\right) \leq M_*|r_1 - r_2|$

eşitsizliği sağlanıyor.

Kanıt. Genelliği bozmaksızın $r_1 < r_2$ olduğunu varsayalım. O halde

$$T_{p,r_1} \subseteq T_{p,r_2} \qquad (8)$$

olur. Şimdi herhangi $x_*(\cdot) \in T_{p,r_2}$ yörüngesi seçelim ve bu yörüngeyi $v_*(\cdot) \in G_{p,r_2}$ mümkün kontrol fonksiyonunun ürettiğini varsayalım.

$$v_0(s) = \frac{r_1}{r_2} v_*(s), \qquad s \in E, \tag{9}$$

olmak üzere yeni $v_0(\cdot): E \to R^m$ kontrol fonksiyonu tanımlayalım. $v_*(\cdot) \in G_{p,r_2}$ içermesi kullanılarak kolayca $v_0(\cdot) \in G_{p,r_1}$ olduğu kanıtlanabilir. $x_0(\cdot) \in T_{p,r_1}$ (1) sisteminin $v_0(\cdot) \in G_{p,r_1}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi olsun. (3), (6), (7), (9), Önerme 2.2, 2.B koşulu ve Hölder eşitsizliğinden, keyfi $\omega \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\|x_*(\omega) - x_0(\omega)\| &\le \kappa_0 \|x_*(\omega) - x_0(\omega)\| + \lambda \int_E (\kappa_1 + \kappa_2 \|v_*(s)\|)\, \|x_*(s) - x_0(s)\|\, ds \\
&\quad + \lambda \int_E \left\|F_2\big(\omega, s, x_0(s)\big)\right\| \cdot \|v_*(s) - v_0(s)\|\, ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \kappa_0 \|x_*(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C + \lambda \int_E (\kappa_1 + \kappa_2 \|v_*(s)\|)\, ds \cdot \max\{\|x_*(s) - x_0(s)\| : s \in E\} \\
&\quad + \lambda M_2 \int_E \left\| v_*(s) - \frac{r_1}{r_2} v_*(s) \right\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \kappa_0 \|x_*(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C + \lambda \left(\kappa_1 \mu(E) + \kappa_2 r_2 [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}} \right) \cdot \|x_*(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C \\
&\quad + \lambda M_2 \frac{|r_1 - r_2|}{r_2} \int_E \|v_*(s)\|\, ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le P_*(\lambda; p) \cdot \|x_*(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C + \lambda M_2 \frac{|r_1 - r_2|}{r_2}\, r_2 [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= P_*(\lambda; p) \cdot \|x_*(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C + \lambda M_2 [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}} \cdot |r_1 - r_2|
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir ve buradan

$$\|x_*(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C \le \frac{\lambda M_2 [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}}{1 - P_*(\lambda; p)} \cdot |r_1 - r_2| = M_* \cdot |r_1 - r_2| \tag{10}$$

olarak bulunur. Böylece keyfi seçilmiş $x_*(\cdot) \in T_{p,r_2}$ yörüngesi için (10) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $x_0(\cdot) \in T_{p,r_1}$ olduğunu gördük. Bu ise

$$T_{p,r_2} \subseteq T_{p,r_1} + M_* |r_1 - r_2| \cdot B_C(1) \tag{11}$$

olması demektir. Burada $B_C(1) = \{x(\cdot) \in C(\Omega; R^n) : \|x(\cdot)\|_C \le 1\}$ olarak tanımlıdır.

Son olarak, (8) ve (11) ‘den teoremin kanıtı elde edilir.

Teorem 3.1 ‘den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1. Her $r_1 \in [0, r_* + \tau_*]$ ve $r_2 \in [0, r_* + \tau_*]$ için

$$h_n\left(T_{p,r_1}(\omega), T_{p,r_2}(\omega)\right) \le M_* |r_1 - r_2|$$

eşitsizliği keyfi $\omega \in \Omega$ için doğrudur. Burada $T_{p,r}(\omega) \subset R^n$ kümesi (4) ile tanımlıdır.

IV. YÖRÜNGELER KÜMESİNİN ÇAPI

$(Z, d_Z(\cdot,\cdot))$ metrik uzay, $Q \subset Z$ olsun. Q kümesinin çapı $diam\ (Q)$ olarak gösterilir ve

$$diam\ (Q) = \sup\{d_Z(y,z) : y \in Q, z \in Q\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.

$$diam\ (T_{p,r}) \leq \frac{2\lambda M_2 r[\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}}{1 - P(\lambda; p, r)}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $P(\lambda; p, r)$ ifadesi (2) ile tanımlıdır.

Kanıt. Uygun olarak $u(\cdot) \in G_{p,r}$ ve $v(\cdot) \in G_{p,r}$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen keyfi $x(\cdot) \in T_{p,r}$ ve $y(\cdot) \in T_{p,r}$ yörüngeleri alalım O halde (1), (2), (6), 2.B koşulu, Önerme 2.2 ve Hölder eşitsizliğinden keyfi $\omega \in \Omega$ için

$$\|x(\omega) - y(\omega)\| \leq \kappa_0 \|x(\omega) - y(\omega)\| + \lambda \int_E (\kappa_1 + \kappa_2 \|u(s)\|)\, \|x(s) - y(s)\|\, ds$$
$$+\lambda \int_E \|F_2(\omega, s, y(s))\| \cdot \|u(s) - v(s)\|\, ds$$

$$\leq \kappa_0 \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C + \lambda \int_E (\kappa_1 + \kappa_2 \|u(s)\|)\, ds \cdot \max\{\|x(s) - y(s)\| : s \in E\}$$
$$+\lambda\, M_2 \int_E \|u(s) - v(s)\|\, ds$$

$$\leq \kappa_0 \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C + \lambda \left(\kappa_1 \mu(E) + \kappa_2 r[\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}\right) \cdot \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C + 2\lambda M_2 r\, [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= P(\lambda; p, r) \cdot \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C + 2\lambda M_2 r\, [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}$$

olduğu elde edilir. Son eşitsizlikten ise

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_C \leq \frac{2\lambda M_2 r[\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}}{1 - P(\lambda; p, r)} \tag{12}$$

eşitsizliği elde edilir. $x(\cdot) \in T_{p,r}$ ve $y(\cdot) \in T_{p,r}$ keyfi seçilmiş yörüngeler olduğundan, (12) eşitsizliği teoremin kanıtını bitirir.

V. YÖRÜNGELERİN ROBASTLIĞI

Bu bölümde yörüngenin kalan kontrol kaynağına göre robastlığı incelenecektir.

Teorem 5.1. $\varepsilon > 0$ verilen sayı, $x(\cdot) \in T_{p,r}$ (1) sisteminin $\|u(\cdot)\|_p = r_* < r$ olacak biçimdeki $u(\cdot) \in G_{p,r}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi, $E_* \subset E$ herhangi Lebesgue ölçülebilir küme, $u_*(\cdot) : E \to R^m$ fonksiyonu $\|u_*(\cdot)\|_p = r$ olmak üzere

$$u_*(s) = \begin{cases} u(s) & eğer \;\; s \in E \setminus E_*, \\ v(s) & eğer \;\; s \in E_*, \end{cases} \tag{13}$$

biçiminde tanımlı ve $x_*(\cdot) \in T_{p,r}$ (1) sisteminin $u_*(\cdot) \in G_{p,r}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi olsun. Eğer

$$\mu(E_*) \le \left[\frac{1 - P(\lambda; p, r)}{2\lambda r M_2} \cdot \varepsilon\right]^{\frac{p}{p-1}} \tag{14}$$

ise, o halde $\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le \varepsilon$ olur. Burada $P(\lambda; p, r)$ (2) ile tanımlıdır.

Kanıt. (1), (2), (6), (13), Önerme 2.2, 2.B koşulu, $u(\cdot) \in G_{p,r}$, $u_*(\cdot) \in G_{p,r}$ içermelerinden ve Hölder eşitsizliğinden keyfi $\omega \in \Omega$ için

$$\|x(\omega) - x_*(\omega)\| \le \kappa_0 \|x(\omega) - x_*(\omega)\| + \lambda \int_E (\kappa_1 + \kappa_2 \|u(s)\|) \, \|x(s) - x_*(s)\| \, ds$$
$$+ \lambda \int_E \left\|F_2(\omega, s, x_*(s))\right\| \cdot \|u(s) - u_*(s)\| \, ds$$

$$\le \kappa_0 \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C + \lambda \int_E (\kappa_1 + \kappa_2 \|u(s)\|) \, ds \cdot \max\{\|x(s) - x_*(s)\| : s \in E\}$$
$$+ \lambda M_2 \int_{E_*} \|u(s) - u_*(s)\| \, ds$$

$$\le \kappa_0 \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C + \lambda \left(\kappa_1 \mu(E) + \kappa_2 r [\mu(E)]^{\frac{p-1}{p}}\right) \cdot \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C + 2\lambda r M_2 \, [\mu(E_*)]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliğinin doğruluğu ve buradan ise

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le P(\lambda; p, r) \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C + 2\lambda r M_2 \, [\mu(E_*)]^{\frac{p-1}{p}}$$

olduğu elde edilir. Son eşitsizlik, (14) ve 2.C koşulundan

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le \frac{2\lambda r M_2}{1 - P(\lambda; p, r)} \, [\mu(E_*)]^{\frac{p-1}{p}} \le \varepsilon$$

olduğu bulunur.

Teorem 5.1 den, kalan kontrol kaynağın tümünü Lebesgue ölçümü yeterince küçük olan bölgede tüketirken, yörüngenin az değişmesi gözlenmektedir.

$$G_{p,r}^* = \{v(\cdot) \in L_p(E; R^m) : \|v(\cdot)\|_p = r\}$$

ve $T_{p,r}^*$ kümesi (1) sisteminin tüm $u(\cdot) \in G_{p,r}^*$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi olsun.

Teorem 5.2. $T_{p,r} = cl(T_{p,r}^*)$ eşitliği doğrudur. Burada cl verilen kümenin kapanışını göstermektedir.

Kanıt. $\|u_*(\cdot)\|_p = r_* < r$ olmak üzere $x_*(\cdot) \in T_{p,r}$ (1) sisteminin $u_*(\cdot) \in G_{p,r}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi olsun. Keyfi $\sigma > 0$ sayısı ve

$$\mu(V_*) \le \left[\frac{1-P(\lambda;p,r)}{2\lambda r M_2}\cdot\sigma\right]^{\frac{p}{p-1}} \tag{15}$$

olacak biçimde keyfi $V_* \subset E$ kümesi alalım. Burada $P(\lambda;p,r)$ ifadesi (2) ile, M_2 ise (6) ile tanımlıdır. $\int_{E\setminus V_*}\|u_*(s)\|^p ds = r_1^p$ olduğunu varsayalım.

$$v_*(s) = \begin{cases} u_*(s) & eğer \quad s\in E\setminus V_*\,, \\ \left[\dfrac{r^p - r_1^p}{\mu(V_*)}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot g_0 & eğer\ \ s\in V_* \end{cases}$$

olmak üzere yeni $v_*(\cdot): E \to R^m$ fonksiyonu tanımlayalım. Burada $\|g_0\| = 1$ olmak üzere $g_0 \in R^m$ keyfi seçilmiş ögedir. Açıktır ki, $\|v_*(\cdot)\|_p = r$, yani $v_*(\cdot) \in G^*_{p,r}$. $y_*(\cdot)$ (1) sisteminin $v_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi olsun. O halde $y_*(\cdot) \in T^*_{p,r}$. (15) 'i dikkate alırsak, Teorem 5.1 'den $\|x_*(\cdot) - y_*(\cdot)\|_C \le \sigma$ olduğu bulunur. $\sigma > 0$ keyfi seçildiğinden, $x_*(\cdot) \in cl(T^*_{p,r})$ olduğu elde edilir. Bu ise $T_{p,r} \subset cl(T^*_{p,r})$ olması demektir. Önerme 2.2. gereği, $T_{p,r}$ yörüngeler kümesi $C(\Omega; R^n)$ uzayında kompakt kümedir. Son olarak, teoremin kanıtı $T^*_{p,r} \subset T_{p,r}$ içermesinden elde edilir.

Teorem 5.2 'ye göre, her $x_*(\cdot) \in T_{p,r}$ yörüngesi, kontrol kaynağın tamamını tüketen kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörünge ile yaklaştırıla bilir.

Teorem 5.2 'den aşağıdaki sonucun doğruluğu elde edilir.

Sonuç 5.1. Keyfi $\omega \in \Omega$ için

$$T_{p,r}(\omega) = cl\left(T^*_{p,r}(\omega)\right)$$

eşitliği doğrudur. Burada $T_{p,r}(\omega)$ kümesi (4) ile,

$$T^*_{p,r}(\omega) = \{x(\omega) \in R^n : x(\cdot) \in T^*_{p,r}\}$$

olarak tanımlıdır.

VI. SONUÇ

Yörüngeler kümesinin r 'ye göre Lipschitz sürekli bağımlılığı, sistem davranışının matematiksel modelinde enerji türü kontrol etkilerin üst sınırının belirlenmesinde ortaya çıkacak küçük hataların, sistemin yörüngeler kümesini az etkileyeceğini öngörmeye imkan sağlıyor. Yörüngeler kümesinin çapının üstten değerlendirmesi, sistemin durum evriminin genel değerlendirilmesi için faydalı bir araç olarak kullanılabilir. Yörüngelerin kalan kontrol kaynağa göre robastlığı, enerji tür kontrol etkinin Lebesgue ölçümü yeteri küçük olan bölgelerde büyük porsiyonlar halinde tüketilmesinin efektif kontrol etkisi olamayacağını göstermektedir.

VII. KAYNAKLAR

[1] W. Heisenberg, *Physics and Philosophy. The Revolution in Modern Science*, London, Great Britain: George Allen & Unwin, 1958.

[2] D. Hilbert, *Grundzüge Einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen*, Leipzig und Berlin, Germany: Druck und Verlag von B.G.Teubner,1912.

[3] N.N. Krasovskii, and A.I. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, New York, USA: Springer, 1988.

[4] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York, USA: John Wiley & Sons, 1962.

[5] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, New York, USA: Academic Press, 1972.

[6] R. Conti, *Problemi di Controllo e di Controllo Ottimale*. Torino, Italy: UTET, 1974.

[7] Kh.G. Guseinov, A.A. Neznakhin, and V.N. Ushakov, “Approximate construction of reachable sets of control systems with integral constraints on the controls,” *J. Appl. Math. Mech*., vol. 63, no. 4, pp. 557-567, 1999.

[8] M.I. Gusev, and I.V. Zykov, “On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints,” *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, vol. 23, no. 1, pp. 103-115, 2017.

[9] G. Ibragimov, I.A. Alias, U. Waziri, and A.B. Jaafaru, “Differential game of optimal pursuit for an infinite system of differential equations,” *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*., vol. 42, pp. 391-403, 2019.

[10] E.K. Kostousova, “State estimates of bilinear discrete-time systems with integral constraints through polyhedral techniques,” *IFAC Papers Online*, vol. 51, no. 32, pp. 245-250, 2018.

[11] N.N. Krasovskii, *Theory of Control of Motion: Linear Systems*, Moscow, USSR: Nauka, 1968.

[12] N.N. Subbotina, and A.I. Subbotin, “Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players' controls,” *J. Appl. Math. Mech*., vol. 39, no. 3, pp. 376-385, 1975.

[13] J.P. Aubin, and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Berlin, Germany: Springer, 1984.

[14] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, Berlin, Germany: Walter De Gruyter, 1992.

[15] A.I. Panasyuk, and V.I Panasyuk, “An equation generated by a differential inclusion,” *Mat. Zametki*, vol. 27, no. 3, pp. 429-437, 1980.

[16] E.J. Balder, “On existence problems for the optimal control of certain nonlinear integral equations of Urysohn type,” *J. Optim. Theory Appl*., vol. 42, no. 3, pp. 447-465, 1984.

[17] M.L. Bennati, “An existence theorem for optimal controls of systems defined by Uryson integral equations,” *Ann. Mat. Pura. Appl*., vol. 121, no. 4, pp. 187-197, 1979.

[18] N. Huseyin, A. Huseyin, and Kh.G. Guseinov, “Approximation of the set of trajectories of the nonlinear control system with limited control resources,” *Math. Model. Anal*., vol. 23, no. 1, pp. 152-166, 2018.

[19] N. Huseyin, A. Huseyin, and Kh.G. Guseinov, “Approximation of the set of trajectories of the control system described by a Urysohn type integral equation,” *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, vol. 21, no. 2, pp. 59-72, 2015.

[20] A. Huseyin, N. Huseyin, and K.G. Guseinov, "Approximation of the integral funnel of a nonlinear control system with limited control resources," *Minimax Theory and its Applications*, vol. 5, no.2, pp. 327-346, 2020.

[21] N. Huseyin, "Compactness of the set of trajectories of the control system described by a Urysohn type integral equation," *Int. J. Optim. Control. Theor. Appl. IJOCTA*, vol. 7, no.1, pp. 59-65, 2017.

[22] I.A. Alias, N. Huseyin, and A. Huseyin, "Compactness of the set of trajectories of the control system described by a Urysohn type integral equation with quadratic integral constraints on the control functions," *J. Inequal. Appl*., Paper No. 36, 14 pp., 2016.