Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi
Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science
2022, 17(2): 522-531
DOI: 10.29233/sdufeffd.1188974
Atıf için / For Citation: O. Palancı, "İşbirlikçi Oyun Teorisindeki Bir Çözümün Aksiyomatik Karakterizasyonu", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 17(2), 522-531, 2022.

Araştırma Makalesi

İşbirlikçi Oyun Teorisindeki Bir Çözümün Aksiyomatik Karakterizasyonu

Osman PALANCI*[1]

[1]*Süleyman Demirel Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, 32260, Isparta, Türkiye*
**yazışılan yazar e-posta: osmanpalanci@sdu.edu.tr*

(Alınış / Received: 14.10.2022, Kabul / Accepted: 02.11.2022, Yayımlanma / Published: 25.11.2022)

Öz: İşbirlikçi oyun teorisinin yöneylem araştırması uygulamalarındaki en yaygın kullanılan çözümlerinden biri olan Shapley değeri farklı oyun teorisi modellerinde tanımlanmış ve aksiyomatik olarak karakterize edilmiştir. Bu makalede diferansiyel marjinaliti aksiyomu kullanılarak işbirlikçi oyunlardaki en önemli çözüm kavramlarından biri olan Shapley değeri için yeni bir karakterizasyon verilecektir. Bu aksiyom, iki oyuncunun ödeme farklılıklarının sadece marjinal katkılarının farklılıklarına bağlı olduğunu göstermektedir. Verimlilik aksiyomu, oyuncuların ödemelerinin toplamının büyük koalisyonun ödemesine eşit olması olarak tanımlanmaktadır. Null oyuncu özelliği, bir oyunda null oyuncu varsa bu oyuncunun oyuna herhangi bir katkısı olmaması demektir. Bu çalışmada, Shapley değeri verimlilik aksiyomu, null oyuncu özelliği ve diferansiyel marjinaliti aksiyomları ile yeniden tanımlanacaktır.

***Anahtar kelimeler**:* Oyun teorisi, İşbirlikçi oyunlar, Shapley değeri, Aksiyomatik karakterizasyon, Adalet aksiyomu, Diferansiyel marjinaliti aksiyomu.

The Axiomatic Characterization of the Value in Cooperative Game Theory

Abstract: The Shapley value, one of the most widespread concepts in operations Research applications of cooperative game theory, was defined and axiomatically characterized in different game-theoretic models. In this paper we provide a new axiomatization of the Shapley value which probably is the most important one-point solution concept for the cooperative games using a differential marginality axiom. This axiom states that two players' payoff differential is completely determined by the differences of their marginal contributions. Efficiency means that the worth generated by the grand coalition is fully allocated to the players. Null player property means that the marginal contributions of null players in a game are zero payoffs. In this study we show that the Shapley value is redefined by efficiency axiom, the null player property and differential marginality axiom.

***Key words**:* Game theory, Cooperative games, Shapley value, Axiomatic characterization, Fairness axiom, Differential marginality axiom.

Osman PALANCI, osmanpalanci@sdu.edu.tr, ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-9921-7191

1. Giriş

Oyun teorisi, uygulamalı matematiğin anlaşmazlık ve işbirliği ile ilgilenen bir alt dalı olarak bilinmektedir. Oyun teorisi, uygulamalı matematik dışında başta ekonomi olmak üzere diğer disiplinlerde de kullanılmaktadır. Ayrıca oyun teorisi, işbirlikçi ve işbirlikçi olmayan olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Bu çalışmada, işbirlikçi oyunlar ile ilgileneceğiz.

İşbirlikçi oyunlar genel olarak oyuncuların yaptıklarını kontrol eden ve kazançlarını paylaşan koalisyonlarla ilgilenmektedir. İşbirlikçi oyun teorisinin ana problemi "Tüm koalisyonlar oluşturulduğunda, kazanç ve kayıp oyuncular arasında nasıl paylaştırılır?" sorusunun cevabını bulmaya çalışmaktır. Bu sorunun cevabı işbirlikçi oyunlardaki çözüm kavramlarındadır.

İşbirlikçi oyun teorisindeki önemli çözüm kavramları arasında von Neumann çözümü [6], kararlı kümeler [7], çekirdek kümesi [3], Shapley değeri [8] ve τ-değeri [11] bulunur. Çözüm kavramlarından bazıları küme değerli çözümler iken bazıları tek nokta çözümleridir. Örneğin, Shapley değeri ve τ-değeri tek nokta çözümleri iken kararlı kümeler ve çekirdek kümesi küme değerli çözümlerdir. Bu çalışmada, tek nokta çözüm kavramlarından biri olan Shapley değeri ile ilgilenilecektir.

İşbirlikçi oyun teorisinin en etkili tek nokta çözüm kavramlarından biri olan Shapley değeri [8] tarafından bulunmuştur. Bu değer verimlilik, toplamsallık, simetri ve null oyuncu özellikleri kullanılarak aksiyomatik olarak karakterize edilmiştir [8]. Aksiyomatik karakterizasyon, bir çözümün belirli aksiyomları sağlayana tek çözüm olduğunu göstermek anlamına gelmektedir.

Literatürde Shapley değerinin aksiyomatik karakterizasyonları ile ilgili olarak birçok çalışma vardır. [4], verimlilik, simetri ve güçlü monotonluk özelliğini kullanarak; [14], stratejik denklik adını verdiği bir aksiyom kullanarak; [10], adalet özelliğini kullanarak; [1], diferansiyel marjinaliti özelliğini kullanarak; Casajus [2] verimlilik ve toplamsallık şartını kullanmadan Shapley değerini karakterize etmişlerdir. Bazı çalışmalarda, Shapley değeri ve diğer çözüm kavramları, gri sayılar kullanılarak yeniden tanımlanmış ve aksiyomatik olarak karakterize edilmiştir [9,13]. Bu çalışmada Shapley değeri, verimlilik aksiyomu, null oyuncu özelliği ve diferansiyel marjinaliti aksiyomları kullanılarak aksiyomatik olarak karakterize edilecektir.

Bu çalışmada, Kısım 2'de işbirlikçi oyun teorisindeki temel kavramlardan ve Shapley değerinin aksiyomatik karakterizasyonunda kullanılan bazı önemli aksiyomlardan bahsedilmiştir. Kısım 3'de makalenin ana teoremini ispat etmek için kullanılan önermeler ve ana teorem ispatları ile birlikte verilmiştir. Son kısımda, makalenin sonuçları yeniden hatırlatılmış ve gelecek çalışmalarda ne yapılacağına yer verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde işbirlikçi oyun teorisindeki bazı önemli kavramlarından bahsedeceğiz [12].

Koalisyonel formda işbirlikçi bir oyun $\langle N, v\rangle$ sıralı ikilisi ile gösterilir. Burada; $v: 2^N \to \mathbb{R}$ karakteristik fonksiyondur. 2^N kümesi, N nin alt kümelerin oluşan kümedir ve bu kümenin her bir elemanı koalisyon olarak adlandırılmaktadır. Koalisyonel formda işbirlikçi bir oyun çoğu zaman transfer edilebilir fayda oyunu (TU-oyunu) olarak kullanılmaktadır. Koalisyonel formda tüm işbirlikçi oyuncuların kümesi G^N ile gösterilmektedir. Bir oyunun karakteristik fonksiyonu olan $v \in G^N$, her $S \in 2^N$ koalisyonuna karşılık $v(S)$ ödemesini karşılık getirir. Bu çalışma boyunca, S koalisyonunun eleman sayısı $|S|$ yerine s ifadesi kullanılacaktır.

Örnek 1. $N = \{1, 2, 3\}$ oyuncuların kümesi olarak verilsin. 1. ve 2. oyuncular sol eldiven, 3. oyuncu ise sağ eldiven üretmek istemektedir. Sadece sol ya da sadece sağ eldiven üretmenin oyunu katkısı 0 iken, eldivenleri birlikte üretmenin oyuna katkısı 30 birimdir. Bu durumu $\langle N, v\rangle$ oyunu ile ifade edebilir. Burada, karakteristik fonksiyonlar

$$v(\emptyset) = 0$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = 0$$
$$v(13) = v(23) = v(N) = 30$$

şeklindedir.

Şimdi, işbirlikçi oyun teorisindeki tek nokta çözüm kavramlarından biri olan Shapley değerinden bahsedilecektir. Tek nokta çözümleri $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ dönüşümü ile gösterilmektedir.

Tanım 2. $v \in G^N$ oyununun Shapley değeri,

$$\Phi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

olmak üzere

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{\Delta_v(S)}{s}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, $S \subset N$ için

$$\Delta_v(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T)$$

kar payı olarak isimlendirilir ve [5] tarafından bulunmuştur.

G^N kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayının bir tabanı oybirliği oyunudur. $T \subset N$ için u_T oybirliği oyun

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & , \quad T \subset S \ ise \\ 0 & , \quad aksi \ halde \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve her $v \in G^N$ oyunu

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \Delta_v(S) u_T$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ tek nokta çözümleri için bazı bilinen aksiyomlardan bahsedeceğiz.

Aksiyom 3 (Verimlilik). Her $v \in G^N$ için

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$$

dir.

Her $S \subset N$ için

$$v(S) = v(S \backslash \{i\})$$

ise $i \in N$ oyuncusuna $v \in G^N$ oyununda bir null oyuncu denir.

Aksiyom 4 (Toplamsallık). Her $v, w \in G^N$ için,

$$f_i(v+w) = f_i(v) + f_i(w)$$

dur.

Aksiyom 5 (Null oyuncu özelliği). Eğer $i \in N$, $v \in G^N$ oyununda bir null oyuncu ise

$$f_i(v) = 0$$

dır.

Her $S \subset N \setminus \{i, j\}$ için

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$$

ise, $i, j \in N$ oyuncularına simetrik oyuncular denir.

Aksiyom 6 (Simetri). Eğer, $i, j \in N$, $v \in G^N$ oyununda simetrik oyuncular ise

$$f_i(v) = f_j(v)$$

dir.

Aksiyom 7 (Adalet). Eğer, $i, j \in N$, $v \in G^N$ oyununda simetrik oyuncular ise

$$f_i(v+w) - f_i(v) = f_j(v+w) - f_j(w)$$

dir [9].

Aksiyom 8 (Diferansiyel marjinaliti). Her $v, w \in G^N$ ve her $i, j \in N$ için

$$v(S \cup i) - v(S) - [v(S \cup j) - v(S)] = w(S \cup i) - w(S) - [w(S \cup j) - w(S)]$$

eşitliğinin sağlanması

$$f_i(v) - f_j(v) = f_i(w) - f_j(w)$$

olmasını gerektirir [1].

3. Bulgular

Bu bölümde, ilk olarak Shapley değerinin aksiyomatik karakterizasyonunda kullanılacak olan önermeler ispatları ile birlikte verilecektir.

Önerme 9. $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü simetri ve toplamsallık aksiyomlarını sağlarsa, adalet aksiyomunu da sağlar.

İspat. $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü simetri ve toplamsallık aksiyomlarını sağlasın. Eğer $i, j \in N$ oyuncuları $w \in G^N$ de simetrik oyuncular ise, her $v \in G^N$ için

$$\begin{aligned} f_i(v+w) - f_i(v) &= f_i(v) + f_i(w) - f_i(v) \\ &= f_i(w) = f_j(w) \\ &= f_j(w) + f_j(v) - f_j(v) \\ &= f_j(v+w) - f_j(v) \end{aligned}$$

olup adalet aksiyomu sağlanır.

Önerme 10. $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü null oyuncu özelliği ve adalet aksiyomunu sağlarsa, simetri aksiyomunu da sağlar.

İspat. $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümü null oyuncu özelliği ve adalet aksiyomunu sağlasın. Her $S \subset N$ olmak üzere $v_0(S) = 0$ olarak verilen $v_0 \in G^N$ null oyunu için, null oyuncu özelliği her $i \in N$ için $f_i(v_0) = 0$ olmasını gerektirir. Eğer $i, j \in N$ oyuncuları $v \in G^N$ de simetrik oyuncular ise adalet aksiyomu ve v_0 durumu dikkate alındığında,

$$f_i(v) = f_i(v_0 + v) - f_i(v_0) = f_j(v_0 + v) - f_j(v_0) = f_j(v)$$

olup f çözümü simetri özelliğini sağlar.

Adalet aksiyomu ile diferansiyel marjinaliti aksiyomunun eşit olduğu ve birbiri yerine kullanabildiğini [1] göstermiştir. Bundan dolayı, Shapley değeri için aksiyomatik karakterizasyonda adalet aksiyomu yerine diferansiyel marjinaliti aksiyomu kullanılacaktır. Şimdi, bu çalışmanın ana teoremini ifade edelim.

Teorem 11. $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümünün verimlilik aksiyomu, null oyuncu özelliği ve diferansiyel marjinaliti aksiyomunu sağlaması için gerek ve geter şart f çözümünün Shapley değerine eşit olmasıdır.

İspat. Shapley değerinin verimlilik aksiyomu ve null oyuncu özelliğini sağladığı iyi bilinmektedir. Önerme 9'dan, Shapley değeri simetri ve toplamsallık aksiyomlarını sağladığı için adalet aksiyomunu da sağlar. Adalet aksiyomu ile diferansiyel marjinaliti aksiyomu eşit olduğundan dolayı Shapley değeri diferansiyel marjinaliti aksiyomunu da sağlar.

Şimdi $f: G^N \to \mathbb{R}^N$ çözümünün verimlilik aksiyomu, null oyuncu özelliği ve diferansiyel marjinaliti aksiyomunu sağladığını varsayalım. Her $v \in G^N$ için

$$P(v) = \{T \subset N \mid \Delta_v(T) \neq 0\}$$

ve $p(v) = |P(v)|$ kümesini tanımlayalım.

$v \in G^N$ olsun. $f(v)$ çözümünün $p(v)$ üzerinden tümevarım yaparak tek türlü olarak belirleneceğini gösterelim.

Eğer $p(v) = 0$ ise, v oyunu null oyundur. Null oyuncu özelliği her $i \in N$ için $f_i(v) = 0$ olduğunu gösterir.

Eğer $p(v) = 1$ ise, v oyunu $T \subset N$ koalisyonu için oybirliği oyununun bir katıdır. $T \subset N$, $c_T \in \mathbb{R}$ ve $c_T \neq 0$ olmak üzere $v = c_T u_T$ oyununu dikkate alalım. Null oyuncu özelliği her $i \in N \backslash T$ için $f_i(c_T u_T) = 0$ olduğunu gösterir. Önerme 10'dan, null oyuncu özelliği ve diferansiyel marjinaliti aksiyomu simetriyi gerektirir ve her $i \in T$ için $f_i(c_T u_T) = c^*$ olacak şekilde c^* sabiti vardır. Verimlilik özelliğinden $c^* = \frac{c_T}{|T|}$ olur. Böylece,

$$f_i(c_T u_T) = \begin{cases} \dfrac{c^*}{|T|} & , \quad i \in T \; ise \\ 0 & , \quad aksi \; halde \end{cases}$$

olur.

Tümevarımla ilerlersek,

$$d(v') \leq m (m \geq 1) \text{ ve } d(v) = m + 1$$

olacak şekilde her $v' \in G^N$ için $f(v')$ çözümünün tek türlü olarak belirlendiğini varsayalım. $d(v) \geq 2$ olmak üzere her $v \in G^N$ için $\langle N, G_v \rangle$ grafını şu şekilde tanımlayalım: $\{i, j\} \in G_v$ olması için gerek ve yeter koşul $i \neq j$ olması ve

$$\{i, j\} \subset T \text{ veya } \{i, j\} \cap T = \emptyset$$

olacak şekilde $T \in D(v)$ koalisyonunun var olmasıdır.

Eğer $a = 1$ veya her $i, j \in A$ ve $i \neq j$ için, $i_1 = i$, $i_m = j$ ve her $k \in \{1, \dots, m-1\}$ için $\{i_k, i_{k+1}\} \in G_v$ olacak şekilde $i_1, \dots, i_m$ oyuncuları varsa $A \subset N$ koalisyonuna G_v'de bağlantılı koalisyon denir. Her ne zaman $i \in A$ ve $j \in N \backslash A$ olduğunda eğer $\{i, j\} \not\in G_v$ ise, A bağlantılı koalisyonuna bileşen ya da maksimal bağlantılı koalisyon denir. O zaman N'nin maksimal bağlantılı olma ve olmama durumunu göz önünde bulundurarak G_v'ye göre aşağıdaki iki durum vardır.

1. Durum: N'nin, G_v'de bir bileşen olduğunu varsayalım. Yani; $\langle N, G_v \rangle$ bağlantılı graf olsun.

$v \in G^N$'deki null oyuncuların oluşturduğu

$$F(v) = \{i \in N \mid \exists i \in T \ için \ \Delta_v(T) \neq 0\}$$

kümesini tanımlayalım. $j \in F(v)$ olsun. $T^0 = \{j\}$ ve $k \in \mathbb{R}$ için

$$T^k = \left\{ i \in N \backslash \bigcup_{l=0}^{k=1} T^l \ \middle| \ \{i, h\} \in G_v \ olmak \ üzere \ h \in T^{k-1} \ vardır. \right\}$$

kümelerini de tanımlayalım.

Şimdi, bu kümelerin N'nin bir parçalanışını verdiğini göstereceğiz. $k \neq l$ için $T^k \cap T^l = \emptyset$ olduğu açıktır.

$$N \backslash \bigcup_{l=0}^{k=1} T^l \neq \emptyset \ ve \ T^k = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. O zaman her

$$i \in N \backslash \bigcup_{l=0}^{k=1} T^l \ \ ve \ \ h \in \bigcup_{l=0}^{k=1} T^l$$

için $\{i, h\} \not\in G_v$ olur ki bu durum N'nin G_v'de maksimal bağlantılı olmasına aykırıdır. N'nin sonlu olması, sadece boş kümeden farklı $T^0, T^1, \dots, T^m$ kümeleri N'nin bir parçalanışını oluşturacak şekilde $m \in \mathbb{R}$ nin var olduğunu gösterir.

$\exists c^* \in \mathbb{R}$ için $f_i(v) = c^*$ olsun ve $c_j = 0$ olarak tanımlansın. $k \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere her $i \in T^k$ için, $f_i \in T^k$ için, $f_i(v)$ yi aşağıdaki şekilde c^* ın bir lineer fonksiyonu olarak belirleyelim. $k \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere her $i \in T^k$ için $\{i, h\} \subset T$ veya $\{i, h\} \cap T = \emptyset$ olacak şekilde $h \in T^{k-1}$ ve $T \in D(v)$ vardır. Diferansiyel marjinaliti aksiyomu

$$f_i(v) - f_i(v - \Delta_v(T)u_T) = f_h(v) - f_h(v - \Delta_v(T)u_T)$$

olduğunu gösterir. Ancak $f_i(v - \Delta_v(T)u_T)$ ve $f_h(v - \Delta_v(T)u_T)$ ifadeleri tümevarım hipotezinden dolayı belirlendiği ve $h \in T^{k-1}$ için c_h da belirlendiğinden dolayı $c_i = c_h - f_h(v - \Delta_v(T)u_T) + f_i(v - \Delta_v(T)u_T)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} f_i(v) &= f_h(v) - f_h(v - \Delta_v(T)u_T) + f_i(v - \Delta_v(T)u_T) \qquad (1) \\ &= c^* + c_h - f_h(v - \Delta_v(T)u_T) + f_i(v - \Delta_v(T)u_T) \\ &= c^* + c_i \end{aligned}$$

ifadesi de belirlenmiştir.

Verimlilik aksiyomu

$$\sum_{i\in N} f_i(v) = |N| \cdot c^* + \sum_{i\in N} c_i = v(N)$$

olduğunu gösterir ve böylece

$$c^* = \frac{1}{|N|}\left(v(N) - \sum_{i\in N} c_i\right)$$

değeri tek türlü belirlenmiştir. $f_j(v) = c^*$ ve (1) denkleminin $i \in N$ olmak üzere tüm $f_i(v)$ değerleri de tek türlü belirlenmiştir.

2. Durum: N'nin, G_v'de bir bileşen olmadığını varsayalım. Yani; $\langle N, G_v\rangle$ bağlantılı graf olmasın. O zaman, G_v'de en az iki tane bileşen vardır. Açıkçası, birbirinden farklı A_1 ve A_2 bileşenleri için $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ olur.

İlk olarak G_v'nin iki bileşene sahip olduğunu göstereceğiz. Aksine, G_v'de üç farklı A_1, A_2 ve A_3 bileşenleri olsun. $d(v) \geq 2$ olduğu için $D(v) \neq \emptyset$ dir. $T \subset A_3$ olacak şekilde $T \in D(v)$ vardır. Eğer $i \in A_1$ ve $j \in A_2$ ise o zaman $\{i, j\} \cap T = \emptyset$ dir. Ancak $\{i, j\} \in G_v$ olması G_v de farklı A_1 ve A_2 bileşenlerinin olması ile çelişir.

Bundan dolayı, G_v'de tam olarak iki bileşenin olduğunu dikkate almak zorundayız. Bu bileşenlere T ve R diyelim. $d(v) \geq 2$ olduğu için, $v \in G^N$ oyunu iki oybirliği oyununun toplamı $c_T, c_R \neq 0$ olmak üzere

$$v = c_T u_T + c_R u_R$$

şeklinde yazılabilir. Dahası, $T \cap R = \emptyset$ ve $T \cup R = N$ dir.

$|N|$'ye aşağıdaki iki duruma ayırıyoruz.

i) İlk olarak $|N| \geq 3$ olsun. Genellemeden kaçınmaksızın $|T| \geq 2$ olduğunu varsayalım. $j \in T$ ve $r \in R$ olsun. Ayrıca, $w \in G^N$ oyununu

$$w = v + c_T u_{(T\setminus\{j\})\cup\{r\}} = c_T u_T + c_T c_{(T\setminus\{j\})\{r\}} + c_R u_R$$

şeklinde tanımlayalım.

İlk olarak $f(w)$'yu belirlemeliyiz. $f_r(w) = c^*$ olsun. Diferansiyel marjinaliti aksiyomu

$$f_j(w) - f_j(c_R u_R) = f_r(w) - f_r(c_R u_R)$$

olduğunu gösterir. $d(c_R u_R) = 1$ olduğu için, $f_j(c_R u_R) = 0$ ve $f_r(c_R u_R) = \frac{c_R}{|R|}$ olur. Bundan dolayı,

$$f_j(w) = f_r(w) - f_r(c_R u_R) + f_j(c_R u_R) = c^* - \frac{c_R}{|R|}$$

olur.

Null player özelliği, $i \in R\setminus\{r\}$ için $f_i\left(c_T u_T + c_T u_{(T\setminus\{j\})\cup\{r\}}\right) = 0$ olduğunu gösterir. Diferansiyel marjinaliti aksiyomundan ve $d\left(c_T u_{(T\setminus\{j\})\cup\{r\}}\right) = 1$ olmasından dolayı $i \in R\setminus\{r\}$ için

$$\begin{aligned} f_r\left(c_T c_T + c_T u_{(T\setminus\{j\})\cup\{r\}}\right) &= f_i\left(c_T u_T + c_T u_{(T\setminus\{j\})\cup\{r\}}\right) - f_i\left(c_T u_T + c_T u_{(T\setminus\{j\})\cup\{r\}}\right) \\ &\quad - f_r\left(c_T c_T + c_T u_{(T\setminus\{j\})\cup\{r\}}\right) \\ &= \frac{c_T}{|T|} \end{aligned}$$

olur.

Her $i \in R \backslash \{r\}$ için, diferansiyel marjinaliti aksiyomu

$$f_i(w) = f_r(w) - f_r\left(c_T u_T + c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right) + f_i\left(c_T u_R + c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right)$$
$$= c^* - \frac{c_T}{|T|}$$

olduğunu gösterir.

Her $i \in T \backslash \{j\}$ için, diferansiyel marjinaliti aksiyomu

$$f_i(w) - f_i\left(c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right) = f_j(w) - f_j\left(c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right)$$

olduğunu gösterir. $d\left(c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right) = 1$ olduğu için, $f_j\left(c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right) = 0$ ve her $i \in T \backslash \{j\}$ için $f_i\left(c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right) = \frac{c_T}{|T|}$ olur. Böylece

$$f_i(w) = f_j(w) - f_j\left(c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right) + f_i\left(c_T u_{(T\backslash\{j\})\cup\{r\}}\right)$$
$$= c^* - \frac{c_R}{|R|} + \frac{c_T}{|T|}$$

olur. Buradan, $f_i(w)$ çözümü

$$f_i(w) = \begin{cases} c^* , & i = r \text{ ise} \\ c^* - \frac{c_R}{|R|} , & i = j \text{ ise} \\ c^* - \frac{c_T}{|T|} , & i \in R \backslash \{r\} \text{ ise} \\ c^* - \frac{c_R}{|R|} + \frac{c_T}{|T|} , & i \in T \backslash \{j\} \text{ ise} \end{cases} \tag{2}$$

şeklinde belirlenir.

Verimlilik aksiyomundan,

$$\sum_{i \in N} f_i(w) = |N|c^* - \frac{|T|}{|R|} c_R + \frac{(|T| - |R|)}{|T|} c_T$$

ifadesi $2c_T + c_R$ ifadesine eşit olmalıdır.

Böylece,

$$c^* = \frac{2|T| - |T| + |R|}{|T| \cdot |N|} c_T + \frac{|R| + |T|}{|R| \cdot |N|} = \frac{c_T}{|T|} + \frac{c_R}{|R|}$$

tek olarak belirlenir ve (2) denkleminde yerine yazılırsa

$$f_i(w) = \begin{cases} \frac{c_T}{|T|} + \frac{c_R}{|R|} , & i = r \text{ ise} \\ \frac{c_R}{|T|} , & i = j \text{ ise} \\ \frac{c_R}{|R|} , & i \in R \backslash \{r\} \text{ ise} \\ 2\frac{c_T}{|T|} , & i \in T \backslash \{j\} \text{ ise} \end{cases} \tag{3}$$

olarak elde edilir.

$i \in N$ için $f_i(v)$ değerlerini belirleyelim. $f_r(v) = c^{**}$ olsun. Diferansiyel marjinaliti aksiyomu ve null oyuncu özelliği Önerme 10 ile birlikte $f_i(v) = c^{**}$ olduğunu gösterir.

Her $i \in T \backslash \{j\}$ için, diferansiyel marjinaliti aksiyomu

$$f_i(v) - f_i(w) = f_r(v) - f_r(w)$$

olduğunu gösterir ve böylece (3) denklemi ile birlikte her $i \in T\backslash\{j\}$ için

$$f_i(v) = f_r(v) - f_r(w) + f_i(w) = c^{**} - \frac{c_R}{|R|} + \frac{c_T}{|T|}$$

olur.

Önerme 10 aynı zamanda her $i \in T\backslash\{j\}$ için $f_j(v) = f_i(v)$ olduğunu gösterir ve buradan $f_j(v) = c^{**} - \frac{c_R}{|R|} + \frac{c_T}{|T|}$ olur. Böylece

$$f_i(v) = \begin{cases} c^{**} & , \quad i \in R \; ise \\ c^{**} - \frac{c_R}{|R|} + \frac{c_T}{|T|} & , \quad i \in T \; ise \end{cases} \tag{4}$$

olur.

Verimlilik aksiyomundan,

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = |N|c^{**} - \frac{|T|}{|R|}c_R + c_T$$

ifadesi $c_T + c_R$ ifadesine eşit olmalıdır.

Böylece,

$$c^{**} = \frac{|R| + |T|}{|R| \cdot |N|}c_R = \frac{c_R}{|R|}$$

tek olarak belirlenir ve (4) denkleminde yerine yazılırsa

$$f_i(v) = \begin{cases} \dfrac{c_R}{|R|} & , \quad i \in R \; ise \\ \dfrac{c_T}{|T|} & , \quad i \in T \; ise \end{cases}$$

olarak elde edilir.

ii) $|N| = 2$ olduğunu varsayalım. Yani; $N = \{i, j\}$, $i \neq j$ ve $v = c_{\{i\}}u_{\{i\}} + c_{\{j\}}u_{\{j\}}$ olsun. $c_{\{i\}} \geq c_{\{j\}}$ olduğunu varsayalım ve $f_j(v) = c^*$ olsun.

Null oyuncu özelliği $f_j\left(\left(c_{\{i\}} - c_{\{j\}}\right)u_{\{i\}}\right) = 0$ olduğunu gösterir. Verimlilik aksiyomundan

$$f_i\left(\left(c_{\{i\}} - c_{\{j\}}\right)u_{\{i\}}\right) = c_{\{i\}} - c_{\{j\}}$$

olur. Diferansiyel marjinaliti aksiyomundan

$$f_i(v) - f_i\left(\left(c_{\{i\}} - c_{\{j\}}\right)u_{\{i\}}\right) = f_j(v) - f_j\left(\left(c_{\{i\}} - c_{\{j\}}\right)u_{\{i\}}\right)$$

olup buradan

$$f_i(v) = c^* + c_{\{i\}} - c_{\{j\}}$$

olur. Verimlilik aksiyomu

$$f_i(v) + f_j(v) = 2c^* + c_{\{i\}} - c_{\{j\}}$$

ifadesinin $c_{\{i\}} + c_{\{j\}}$ ifadesine eşit olması gerektiğini gösterir. Böylece $c^* = c_{\{j\}}$ olur ve bu da

$$f_j(v) = c^* = c_{\{j\}} \text{ ve } f_i(v) = c^* + c_{\{i\}} - c_{\{j\}} = c_{\{i\}}$$

çözümlerinin tek türlü belirlendiğini gösterir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. Sonuç

Bu makalede işbirlikçi oyun teorisinin en etkili çözümlerinden biri olan Shapley değeri, bazı aksiyomlar kullanılarak karakterize edilmiştir. Bu aksiyomlar; verimlilik, null oyuncu özelliği ve diferansiyel marjinaliti aksiyomudur. İlerleyen zamanlarda, Shapley değeri yeni ve farklı aksiyomlarla yeniden karakterize edilecektir. Gelecek çalışmalarımızda, işbirlikçi oyun teorisindeki diğer çözüm kavramları da aksiyomatik olarak karakterize edilecektir.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Osman PALANCI: Araştırma, Metodoloji, İnceleme ve Düzenleme, Makalenin Yazılması.

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir destek ve teşekkür beyanım bulunmadığını bildiririm.

Çatışma Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir çatışma beyanım bulunmadığını bildiririm.

Etik Kurul Onayı ve/veya Aydınlatılmış Onam Bilgileri

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir etik kurul onayı ve/veya aydınlatılmış onam bilgileri beyanım bulunmadığını bildiririm.

Kaynakça

[1] A. Casajus, “Differential marginality, van den Brink fairness, and the Shapley value,” *Theory Decis.*, 71 (2), 163-174, 2011.

[2] A. Casajus, “The Shapley value without efficiency and additivity,” *Math. Social Sci.*, 68, 1-4, 2014.

[3] D. B. Gillies, “Solutions to general non-zero-sum games,” in *Contributions to the Theory of Games IV*, vol. 40, A. W. Tucker, R. D. Luce, Ed. Princeton: Princeton UP, 1959, pp 47-85.

[4] H. P. Young, “Monotonic solutions of cooperative games,” *Int. J. Game Theory*, 14, 65-72, 1985.

[5] J. C. Harsanyi, “A Bargaining Model for Cooperative n-Person Games,” in *Contributions to the Theory of Games IV*, vol. 40, A. W. Tucker, R. D. Luce, Ed. Princeton: Princeton UP, 1959, pp 625-355.

[6] J. von Neumann, “Zur theorie der gesellschaftsspiele,” *Math. Ann.*, 100 (1), 295-320, 1928.

[7] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[8] L. S. Shapley, “A value for *n*-person games,” *Ann. Math. Stud.*, 28, 307-317, 1953

[9] O. Palancı, M. Ekici and S. Z. A. Gök, “On the equal surplus sharing interval solutions and an application,” *J. Dyn. Games.*, 8 (2), 139-150, 2021.

[10] R. van den Brink, “An axiomatization of the Shapley value using a fairness property,” *Int. J. Game Theory*, 30, 309-319, 2001.

[11] S. H. Tijs, “Bounds for the core and the τ-value,” in *Game Theory and Mathematical Economics*, O. Moeschlin, D. Pallaschke, Ed. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1981, pp 123-132.

[12] S. H. Tijs, *Introduction to Game Theory*, Hindustan Book Agency, India, 2003.

[13] U. A. Yılmaz, S. Z. A. Gök, M. Ekici and O. Palancı, “On the grey equal surplus sharing solutions,” *Int. J. Supply Oper. Manag.*, 5 (1), 1-10, 2018.

[14] Y. Chun, “On the symmetric and weighted Shapley values,” *Int. J. Game Theory*, 20, 183-190, 1991.