ISSN 2757-5543 GÜFFD 4. Cilt (1): 1-6 (2023)

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
https://dergipark.org.tr/tr/pub/guffd

GÜFFD
GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Sıra Sürekli Operatörlerin Genelleştirmesinin Modülü

Merve Bülbül*, Birol Altın

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Çalışmada, sıra yakınsaklık tanımı verilmiştir.
- Sıra-norm topolojik sürekli operatörler ve sıra-zayıf topolojik operatörler verilmiştir.
- Sıra norm topolojik sürekli operatörlerin modülünün varlığı incelenmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 14/10/2022
Kabul: 27/01/2023

Anahtar Kelimeler

Sıra yakınsaklık,
Sıra-norm topolojik sürekli operatörler,
Sıra-zayıf topolojik sürekli operatör.

Öz

Kazem Hanghnejad Azar, Seyed AliReza Jalili ve Mohammad Bagher Farshbaf Moghimi 2021 yılında 'order-to-topology continuous operators' isimli makalelerinde sıra-norm topolojik sürekli operatörler ve sıra-zayıf topolojik sürekli operatörleri tanıtmışlardır. Aynı çalışmada bu operatörlerin özelliklerini incelemişler ve yazarlar bu çalışmada herhangi bir Riesz uzayından bir normlu Riesz uzayına tanımlı her sıra norm topolojik sürekli operatörlerinin modülünün var olup olmadığını açık problem olarak bırakmışlardır. Bu çalışmada sıra-norm topolojik sürekli operatörlerin modülünün olmadığını vereceğiz.

Modulus of Generalization of Order Continuous Operators

Highlights

- In the study, the definition of order convergent is given.
- Order-to-norm topology continuous operators and order-to-weak topology operators are given.
- The existence of the modulus of order-to-norm topology continuous operators is investigated.

Article Info

Received: 14/10/2022
Accepted: 27/01/2023

Keywords

Order convergent,
Order-to-norm topologycontinuous operators,
Order-to-weak topology,
Continuous operators.

Abstract

Kazem Hanghnejad Azar, Seyed AliReza Jalili and Mohammad Bagher Farshbaf Moghimi introduced order-to-norm topology continuous operators and order-to-weak topology continuous operators in their paper titled 'order-to-topology continuous operators' in 2021. In this study, they examined the properties of these operators and the authors left as an open problem whether there is a modulus of each order-to-norm continuous operators from any Riesz space into a normed Riesz space. In this study, we will give that the order-to-norm topology continuous operators have no modulus.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Merve Bülbül, merve4214@gmail.com

1. GİRİŞ

Matematiğin önemli çalışma alanlarından biri sıralamadan doğan yakınsama ve bu yakınsamalarla elde edilen süreklilik kavramlarıdır. Geçmişten günümüze bu kavramlarla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış ve yapılan bu çalışmalardan sonra bu alana duyulan ilgi artmıştır ve Nakano, Ogasawara, Yosida, Vulikh gibi matematikçiler de bu alanda çalışmalar yaparak alandaki gelişmelere katkı sağlamışlardır. Bu yüzden süreklilik kavramının genellemeleri matematik alanındaki önemli konulardan biridir. Son yıllarda birçok matematikçi sıra sürekli operatörlerin genelleştirmesi olan bu kavramın yeni farklı türlerini tanıtmış ve çalışmışlardır. Bu çalışmalardan biri olan sıra yakınsama kavramı T. Ogasawara tarafından 1940'lı yıllarda tanımlanmıştır. Yakınsama yardımıyla elde edilen sıra sürekli operatörlerin bir genelleştirmesi olan sıra-topolojik sürekli operatörleri Seyed AliReza Jalili, Kazem Hanghnejad Azar ve Mohammad Bagher Farsbaf Moghili isimli yazarlar ''order-to-topology continuous operators''(Positivity, 2021) isimli çalışmasında vermişlerdir [1].

Tanım 1.1. E bir Riesz uzayı ve $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ bir ağ olsun. Eğer her $\beta \in B$ için en az bir $\alpha = \alpha(\beta) \in A$ var ve her $\alpha \geq \alpha(\beta)$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde $\{y_\beta : \beta \in B\} \subseteq E$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağına x'e sıra yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir [2].

Tanım 1.2. E ve F iki Riesz uzayı $T: E \longrightarrow F$ operatör olsun. Eğer her $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ağı için $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $T(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ise T operatörüne E'den F'ye sıra sürekli operatör denir. E'den F'ye bütün sıra sürekli operatörler uzayı $L_n(E, F)$ ile gösterilecektir [2].

Tanım 1.3. E Riesz uzayı ve F normlu Riesz uzayı ve $T: E \longrightarrow F$ operatör (lineer dönüşüm) olsun. Eğer her $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ağı için $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $T(x_\alpha) \xrightarrow{\|.\|} 0$ ise T operatörüne E'den F'ye sıra-norm topolojik sürekli operatör denir. E'den F'ye bütün sıra-norm topolojik sürekli operatörler uzayı $L_{on}(E, F)$ ile gösterilecektir [2].

Tanım 1.4. E bir normlu Riesz uzayı $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ağı ve $x \in E$ olsun. Eğer her $f \in E'$ için $f(x_\alpha) \to f(x)$ ise $\{x_\alpha\}$ ağına x'e zayıf yakınsar denir ve $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 1.5. E Riesz uzayı ve F normlu Riesz uzayı ve $T: E \longrightarrow F$ operatör (lineer dönüşüm) olsun. Eğer her $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ağı için $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken $T(x_\alpha) \xrightarrow{w} 0$ ise T operatörüne E'den F'ye sıra-zayıf topolojik sürekli operatör denir. E'den F'ye bütün sıra-zayıf topolojik sürekli operatörler uzayı $L_{ow}(E, F)$ ile gösterilecektir [2].

Her normda yakınsak ağ zayıf yakınsak olduğundan $L_{on}(E, F) \subseteq L_{ow}(E, F)$ olur.

Tanım 1.6. E ve F Riesz uzayları ve $T: E \to F$ operatör olsun. Eğer $L(E, F)$ sıralı vektör uzayında $\{T, -T\}$ kümesinin supremumu var ise T operatörünün modülü vardır denir ve $|T| := T \vee (-T)$ ile gösterilir.

Tanım 1.7. Pozitif iki operatörün farkı şeklinde yazılabilen operatörlere regüler operatör denir ve regüler operatörlerden oluşan uzay $L_r(E, F)$ şeklinde gösterilir [1].

T operatörü regüler ise $T = T_1 - T_2$ olacak şekilde pozitif T_1 ve T_2 operatörleri vardır. O halde $T_1 \leq T$ elde edilir. Diğer yandan eğer $T \leq S$ olacak şekilde en az pozitif bir S operatörü varsa $T = S - (S - T)$ olacağından T regülerdir. O halde bir operatörün regüler olması için gerek ve yeter şart $T \leq S$ olacak şekilde en az bir $S \geq 0$ operatörünün var olması yeterlidir önermesi elde edilir. Her pozitif operatör sıra sınırlıdır, dahası her regüler operatörde sıra sınırlıdır. O halde buradan $|T|$ varsa $T = |T| - (|T| - T)$ olacağından T regülerdir.

Lemma 1.8. E ve F iki Riesz uzayı $T: E \longrightarrow F$ bir operatör ve $|T|$ mevcut olsun. O zaman T sıra sınırlı olur.

Tanımlamadığımız terim ve notosyonlar için [1]'e bağlı kalınmıştır.

2. SIRA NORM TOPOLOJİK SÜREKLİ OPERATÖRLER

Seyed AliReza Jalili, Kazem Hanghnejad Azar ve Mohammad Bagher Farsbaf Moghili isimli yazarlar ''order-to-topology continuous operators'' isimli makalelerinde aşağıdaki açık problemi bırakmışlardır [2].

Problem 2.1. E Riesz uzayı ve F normlu Riesz uzayı $T \in L_{on}(E,F)$(veya $T \in L_{ow}(E,F)$) ise |T| var mıdır ve bu modül $L_{on}(E,F)$ (veya $|T| \in L_{ow}(E,F)$)'e ait midir?

Çözüm. $E = L_1([0,1])$, $F = c_0$ uzayları ve

$$T: L_1([0,1]) \longrightarrow c_0$$
$$f \longrightarrow T(f) = \left(\int_0^1 f(x) \sin nx \, dx\right)_{n=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlı operatörün lineer olduğu kolaylıkla görülür. T süreklidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_0^1 f(x)\sin(nx)dx\right| \\ &\le sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |f(x)||\sin(nx)|dx \\ &\le sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= \|f\|_1 \end{aligned}$$

$$\|T(f)\| \le \|f\|_1$$

olduğundan T sınırlı lineer operatördür. Dolayısıyla T sürekli operatördür. Sıra-norm topolojik sürekli olduğunu görmek için $f_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olacak biçimde $(f_\alpha)_{\alpha\in A} \subset L_1([0,1])$ seçelim. O zaman her $\beta \in B$ için en az bir $\alpha = \alpha(\beta) \in A$ vardır ve her $\alpha \ge \alpha(\beta)$ için $|f_\alpha| \le g_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde bir $(g_\beta) \subseteq E$ vardır. $L_1([0,1])$ bir AL-uzayı olduğundan sıra sürekli norma sahiptir [3]. Dolayısıyla $g_\beta \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. $|f_\alpha| \le g_\beta$ her $\alpha \ge \alpha(\beta)$ için sağlandığından $f_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. T sürekli ve

$$\|T(f_\alpha)\| \le \|T\|\|f_\alpha\|$$

olduğunda

$$T(f_\alpha) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

olur. Bu $T \in L_{on}(E,F)$ olduğunu verir.

İddia ediyoruz ki T sıra sınırlı değildir. Gerçekten,

$$\mathbf{1}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \mathbf{1}(x) = 1$$

olmak üzere

$$A = \{g_n : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } g_n(x) = sin(nx)\} \subseteq L_1([0,1])$$
$$0 \le |g_n(x)| = |sin(nx)| \le 1 = \mathbf{1}(x)$$

olduğundan A kümesi $L_1([0,1])$'de sıra sınırlı bir kümedir. Kabul edelim ki T sıra sınırlı olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|T(g_n)| \leq z_n, \qquad (z = (z_n) \in c_0)$$

vardır ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|T(sin(kx))| = \left|\left(\int_0^1 sin(kx)\, sin(nx)\ dx\right)\right| \leq z_n$$

k=n alırsak

$$\left|\int_0^1 sin^2(nx)\, dx\right| \leq z_n$$

olur.

$$\left|\int_0^1 sin^2(nx)\, dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{1-\cos(2nx)}{2} dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\int_0^1 1 - \cos(2nx)\, dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\, dx - \int_0^1 \cos(2nx)\, dx\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin(2n)}{2n}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2} - \frac{\sin(2n)}{4n}\right| \leq z_n$$

olur. Buradan limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2} - \frac{sin(2n)}{4n}\right| \leq \lim_{n\to\infty} z_n$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{sin(2n)}{4n}\right)\right| \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \leq 0$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla T sıra sınırlı değildir. Lemma 1.8'den T'nin modülü mevcut olamaz. Benzer şekilde $T \in L_{ow}(E,F)$ ve T sıra sınırlı olmadığından T'nin modülü olamaz.

Yukarıdaki örnek $L_{on}(E,F)$ genelde bir Riesz uzayı olmadığını gösteriyor ancak bazı koşullar altında her sıra-norm topolojik sürekli operatörün modülü var ve sıra-norm topolojik sürekli olduğunu elde edeceğiz bunun için aşağıdaki teoreme ihtiyacımız var.

Teorem 2.2. E bir Riesz uzayı, F Dedekind tam bir Banach örgüsü, $T: E \longrightarrow F$ sıra-norm topolojik sürekli ve sıra sınırlı bir operatör olsun. O zaman, T , T^+ , T^- ve $|T|$ operatörleri sıra süreklidir.

İspat. [1] Teorem 1.14.'den $T: E \longrightarrow F$ sıra sınırlı ve sıra sürekli olsun. $T: E \longrightarrow F$ sıra sınırlı olduğundan $|T|$, T^+ ve T^- operatörleri $L_b(E,F)$'de mevcuttur.
[1] Teorem 1.56.'nın ispatında kullanılan yöntem yardımıyla T^+ operatörü sıra-norm topolojik sürekli olur. Gerçekten, $z_\gamma \xrightarrow{o} 0, \gamma \in \Gamma$, E Riesz uzayı içinde sağlansın. O zaman, her $\alpha \in A$ için en az bir $\gamma = \gamma(\alpha) \in \Gamma$ vardır ve her $\gamma \geq \gamma(\alpha)$ için $|z_\gamma| \leq a_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde bir $(a_\alpha) \subseteq E$ vardır.

$a_\alpha \downarrow 0$ ve $0 \leq t \leq T^+(a_\alpha) \downarrow$ ve t'nin sıfıra eşit olduğunu göstereceğiz. $(\beta \in \mathrm{A}$ sabitleyelim.$)$ $x = a_\beta$ seçelim.

Her, $0 \leq y \leq x$ ve $\forall \alpha \geq \beta$ için

$0 \leq y - y \wedge a_\alpha = y \wedge x - y \wedge a_\alpha \leq x - a_\alpha$ olur. Dolayısıyla,

$T(y) - T(y \wedge a_\alpha) = T(y - y \wedge a_\alpha) \leq T^+(x - a_\alpha) = T^+(x) - T^+(a_\alpha)$. Her, $0 \leq y \leq x$ ve $\forall \alpha \geq \beta$ için

$0 \leq t \leq T^+(a_\alpha) \leq T^+(x) + |T(y \wedge a_\alpha)| - T(y)$ (*) elde edilir.

$\forall \alpha \geq \beta$ için $y \wedge a_\alpha \downarrow 0$ ve T operatörü bir sıra-norm topolojik sürekli operatör olduğundan $\forall \alpha \geq \beta$ için $inf|T(a_\alpha)| = 0$ olur. Gerçekten,

$\theta \leq |T(a_\alpha)|$ ve $\forall \alpha$ *için* $0 \leq \omega \leq |T(a_\alpha)|$ olsun. F Banach örgüsü olduğundan

$0 \leq \|\omega\| \leq \|T(a_\alpha)\| \longrightarrow 0$ olduğundan $\|\omega\| = 0 \Rightarrow \omega = 0$ elde edilir. (*) dan

Her, $0 \leq y \leq x$ için $0 \leq t \leq T^+(x) - T(y)$ elde edilir. $T^+(x) = \sup\{T(y): 0 \leq y \leq x\}$ olduğu dikkate alınırsa $t = 0$ elde edilir. Böylece,

$T^+(x) \downarrow 0$ olur. Bu ise $T^+(|z_\gamma|) \leq T^+(a_\alpha) \downarrow 0$ olduğunu, yani T^+ operatörünün bir sıra sürekli operatör olduğunu verir. Ayrıca, $T^- = (-T)^+$, $|T| = T^+ + T^-$ ve $T = T^+ - T^-$ eşitliklerinden faydalanarak sırasıyla T^-, $|T|$ ve T operatörlerinin de sıra sürekli olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem, Problem 2.1'in bazı şartlar altında doğru olduğu sonucunu verecektir.

Teorem 2.3. E bir Riesz uzayı, F sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü olsun. O zaman E den F içine tanımlı her sıra sınırlı ve sıra-norm topolojik sürekli operatörün modülü $|T|$ vardır ve $|T|$ bir sıra-norm topolojik sürekli operatör olur.

İspat. F Banach örgüsü sıra sürekli norma sahip olduğundan Dedekind tam bir Riesz uzayı olur [1]. T sıra sınırlı olduğundan $|T|$ vardır [1]. Şimdi $|T|$ nin bir sıra-norm topolojik sürekli operatör olduğunu görelim. $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. Teorem 2.2'den $|T|$ bir sıra sürekli operatör olur. Dolayısıyla F uzayı içinde $|T|\,(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olur. F Banach örgüsü sıra sürekli norma sahip olduğundan F uzayı içinde $|T|\,(x_\alpha) \xrightarrow{\|.\|} 0$ sağlanır. Bu ise $|T|$ operatörünün bir sıra-norm topolojik sürekli operatör olduğunu verir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından desteklenen FYT-2022-7679 numaralı proje kapsamında gerçekleştirilmiştir. Proje için vermiş oldukları araştırma-geliştirme desteklerinden dolayı Gazi Üniversitesi'ne teşekkür ederiz.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

YAZAR KATKI ORANI

Merve Bülbül: Araştırma, İçerik analizi, Materyal temini, Yazılım, Makalenin yazımı-Orijinal taslak oluşturma. **Birol Altın:** Kavramlaştırma, Metodoloji, Makalenin yazımı- İnceleme ve Düzenleme, Danışmanlık/Kontrolörlük, Finansman edinimi.

KAYNAKLAR

[1] Aliprantis, C. D., ve Burkinshaw, O. (2006). *Positive Operators*. vol. 119, Springer, Berlin.
[2] Jalili, S. A., Azar, K. H., and Moghimi, M. B. F. (2021). Order-to-topology continuous operators. *Positivity*, 25, 1313-1322.
[3] Zaanen, A.C. (1983). *Riesz Spaces II.* North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.