



Analysis of the vibration characteristics of a variable cross section rotor using the complex transfer matrix method and comparison with different methods

Hüseyin Tarık Niş*^{ID}, Ahmet Yıldız^{ID}

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Bursa Uludağ University, 16059, Bursa, Türkiye

Highlights:

- Variable cross section rotordynamics analysis based on the complex transfer matrix method
- Advantages of the complex transfer matrix method over the analytical method and the finite element method
- Rotordynamics model with CTMM

Keywords:

- Complex transfer matrix method
- Modal analysis
- Rotordynamic
- Finite element method

Article Info:

Research Article
Received: 15.10.2022
Accepted: 25.08.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1189807

Acknowledgement:

The study was carried out with the support of 118C103 "Development of Gas Turbine Engine Technologies" project within the scope of TUBİTAK 2244 industry doctorate program.

Correspondence:

Author: Hüseyin Tarık Niş
e-mail:
huseyintariknis@gmail.com
phone: +90 222 211 4078

Graphical/Tabular Abstract

Due to the increase in performance demand in the industry, fast and light rotors are needed. Because such rotors are delicate, engineers need to consider rotor dynamics. For this reason, there is a need for a mathematical model that will give accurate and fast results in the preliminary design phase of rotor dynamics. In this study, we have presented the mathematical model that we created by including the gyroscopic effect based on the complex transfer matrix method (CTMM). The best way to demonstrate the performance of the mathematical model based on CTMM is to compare it with commercial programs based on the finite element method (FEM) used in the industry. Two methods were followed to compare the bearing response values. The first of these is the comparison of Ansys FEM, Dyrobes FEM and CTMM for a single specific damping value, and the other is the comparison of Ansys FEM and CTMM values for different damping values. For these comparisons, the first bearing was selected and the response response was obtained for different operating speeds. In Figure A, a comparison of the deflection and force values in the first bearing with the 1.666 Hz (100 RPM) solution range for a damping value of 0.1 N.s/mm is presented. As can be seen here, the three different models gave very similar results to each other. The main advantage of CTMM has been to achieve these similarly accurate results much faster.

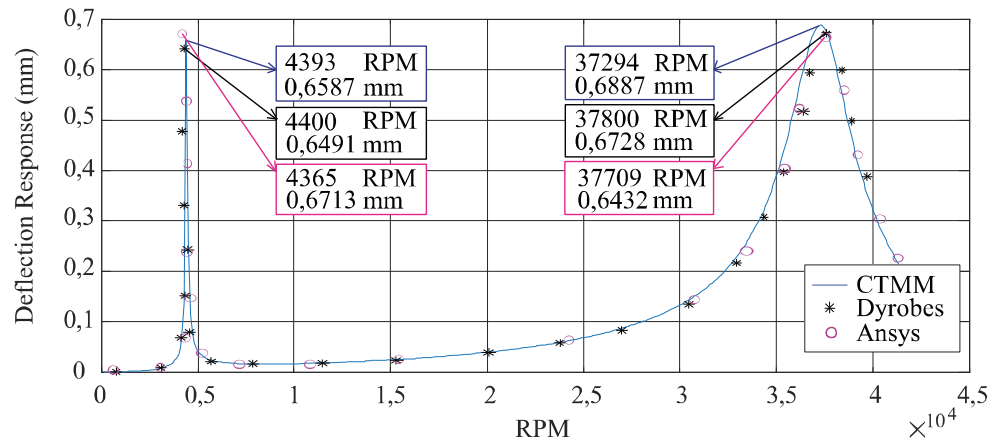


Figure A. Comparison of CTMM, ansys FEM and dyrobes FEM for first bearing deflection response

Purpose:

The main purpose of this study is to establish a comprehensive mathematical model based on CTMM, including the gyroscopic effect and bearing damping, and its application to rotor dynamics. Comparisons with the analytical method and the finite element method were also made to evaluate the performance of the CTMM.

Theory and Methods: Timoshenko beam element is used in the created CTMM rotordynamics model and rotor dynamics problems are solved using Lund-type solver and Newton Raphson method. Comparisons are performed using the Campbell diagram, mode shapes, natural frequencies and bearing response response for unbalance load.

Results: Created CTMM rotordynamic model converged to the analytical method with an error of 2.97% and obtained results 4.75 times faster than FEM.

Conclusion: CTMM should be used in rotor dynamics preliminary design phase and optimization studies.



Kompleks transfer matris yöntemi ile değişken kesitli bir rotorun titreşim karakteristiğinin analizi ve farklı yöntemlerin karşılaştırılması

Hüseyin Tarık Niş*^{ID}, Ahmet Yıldız^{ID}

Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 16059, Bursa, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Kompleks transfer matris yöntemine dayalı değişken kesitli rotor dinamiği analizi
- Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemine göre kompleks transfer matris yönteminin avantajları
- CTMM ile rotor dinamiği modeli

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 15.10.2022

Kabul: 25.08.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1189807

Anahtar Kelimeler:

Karmaşık transfer matrisi
yöntemi

Modal Analiz

rotor dinamiği

Sonlu Elemanlar Yöntemi

ÖZ

Günümüzde havacılık endüstrisinde sivil ve askeri olmak üzere birçok alanda gaz türbin motorları tercih edilmektedir. Gaz türbininin yüksek devirlerde çalışmasından ötürü rotor yapısında birtakım titreşim problemleri ortaya çıkmaktadır. Bunların en önemlileri merkezkaç kuvvetin sebep olduğu dengesizlik yükü, esnek kiriş yapısından dolayı shaftın aldığı modal şekiller ve kritik hız değerleridir. Bu problemleri tasarım sürecinde ve sonrasında çözebilmek için rotorun modal analizi oldukça önem arz etmektedir. Bu çalışmada, iki diskli ve değişken kesitli bir rotor-yatak sisteminin yataklarındaki tepkileri her iki ekseninde ölçülebilmek adına kompleks transfer matris yöntemi (complex transfer matrix method, CTMM) kullanılarak matematiksel model oluşturulmuş ve oluşturulan model klasik yöntemlerle karşılaştırılmıştır. CTMM ile oluşturulan modelin çözümünü elde etmek için Newton Raphson yöntemi kullanılmıştır. Bulunan kritik hız değerleri sonlu elemanlar yöntemiyle karşılaştırılmış ve bulunan değerlerin analitik yöntemle maksimum %2,97 hata ile örtüştüğü görülmüştür. Bu analiz sonucu CTMM'nin sonlu elemanlar yöntemine göre ele alınan model için 4,75 kat daha hızlı çözümler sunduğu tespit edilmiştir. Sonuç olarak bu çalışmada CTMM'nin daha hızlı çözüm gerçekleştirmesi sayesinde diğer yöntemlere göre rotor tasarımında uygulanmasının daha avantajlı olacağı gösterilmiştir.

Analysis of the vibration characteristics of a variable cross section rotor using the complex transfer matrix method and comparison with different methods

H I G H L I G H T S

- Variable cross section rotordynamics analysis based on the complex transfer matrix method
- Advantages of the complex transfer matrix method over the analytical method and the finite element method
- Rotordynamics model with CTMM

Article Info

Research Article

Received: 15.10.2022

Accepted: 25.08.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.1189807

Keywords:

Complex transfer matrix
method

modal analysis

rotordynamic

finite element method

ABSTRACT

Today, gas turbine engines are preferred in many areas, including civil and military, in the aviation industry. Due to the high-speed operation of the gas turbine, some vibration problems arise in the rotor structure. The most important of these are the unbalanced load caused by the centrifugal force, the modal shapes of the shaft due to the flexible beam structure, and the critical velocity values. To solve these problems during and after the design process, the modal analysis of the rotor is very important. In this study, a mathematical model of a rotor-bearing system with two discs of variable cross-section was created using the complex transfer matrix method (CTMM) to measure the responses in the bearings in both axes and compared with classical methods. Newton Raphson method was used to obtain the solution of the model created with CTMM. The critical velocity values found were compared with the finite element method and it was seen that the values found matched with the analytical method with a maximum error of 2.97%. As a result of this analysis, it has been determined that the TMM method offers 4.75 times faster solutions for this model than the finite element method. As a result, in this study, it has been shown that CTMM will be more advantageous in rotor design than other methods thanks to its faster solution advantage.

1. Giriş (Introduction)

1940'lı yılların başlarında, titreşim problemleri basit modeller olarak tablo desteği ile çözülmekteydi. Bu yıllardan sonra bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile daha karmaşık titreşim problemleri bilgisayarlarla çözülmeye başlandı. Teorinin bilgisayar tarafından uygulanmasını daha kolay hale getirilen ilk yöntemlerden biri ise transfer matrisi yöntemi (transfer matrix method, TMM) [1]. Sonraki yıllarda bilgisayarların hesaplama gücündeki artışla birlikte sonlu elemanlar yönteminin (finite element method, FEM) kullanılması, statik ve dinamik analizlerin yanında rotor-yatak sistemleri için de yaygın hale geldi [2]. Karmaşık yapıları üç boyutlu veya iki boyutlu olarak modelleyebilme gücüne sahip olması FEM'in kullanımını ve geliştirilmesini öne çıkarmıştır. Fakat titreşim analizi bir stres analizinden farklı olarak daha basit modellerdir. Bu nedenle bir rotor titreşim modelinin karmaşık üç boyutlu modeli yerine tek boyutlu basit kiriş modelinin oluşturulması rotorun analizi için yeterli görülmektedir [3]. Çünkü model ne kadar karmaşık olursa, karşımıza o kadar problem çıkmaktadır. FEM ile karmaşık modellemede oluşan tekillik noktaları ve sonuç alma süresinin uzunluğu bu problemlerden bazılarıdır. TMM ise basit modelleme ve hesaplama sürecinde sistemin serbestlik derecesi arttıkça matrisinin boyutu artmadığından dolayı daha az işlem ve daha hızlı sonuç sağlayarak bu problemlere çözüm sağlamaktadır. Nihayetinde, rotor dinamiği sorunu için, TMM'nin hızlı ve etkili bir yaklaşım olduğu söylenebilir. Sağladığı bu avantajlar sebebiyle TMM, karmaşık döner makinelerin dinamik analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır [4].

Günümüz literatür çalışmaları incelendiğinde farklı esnek rotor modelleri için, TMM ve FEM ile ilgili çalışmalar bulunabilmektedir. Ahmedian vd. [5] yağ film yataklı rotor için, Varney ve Green [6] viskoelastik yataklar için, Deng vd. [7] ise esnek bir rotor sistemi için TMM'yi kullanmıştır. Bunlara ek olarak kirişin enine titreşimi ve burulma titreşimleri üzerine TMM ile Behzad [8] tarafından çalışmalar yapılmıştır. FEM ve TMM yönteminin kıyaslaması ise bir kiriş problemi olarak Gökdağ ve Kopmaz [9] tarafından ve bir rotor problemi olarak da Yang vd. [4] tarafından gerçekleştirilmiştir. Fakat bütün bu çalışmalara bakıldığında kapsamlı bir rotor problemi ele alınmayıp tek bir noktaya odaklanılmıştır. Bununla birlikte mühendisler için TMM ile paket program tarzında bir tasarım kriteri sağlayıp kapsamlı bir çözüm sunan çalışma görülmemiştir. Kıyaslama çalışmalarından Yang vd. [4] bir rotor problemi ele almış olsa da, buradaki problemde rulman sönümüne ve jiroskopik etkiye girmemiş olup gerçek bir rotor probleminden ziyade bir kiriş problemi gibi sistemin indirgenip çözümlenmesini ve kıyaslamasını gerçekleştirmiştir.

Diğer yandan FEM ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, Taplak ve Parlak [10] belirli geometrik ve mekanik özelliklere sahip bir gaz türbini rotorunun FEM ile dinamik analizini gerçekleştirmiştir. Yuan vd. [11] ise, temas etkilerini ve ön sıkma kuvvetlerini dikkate alan iki boyutlu FEM çalışması geliştirilmiştir. Bu çalışmalar FEM üzerinde de belirli bir alana yönelik araştırmalar olduğunu göstermektedir. Belirli alana yönelik bu araştırmaların nedeni rotor dinamiği yazılım modüllerinin spesifik problemler için tasarlanmamış olması ve bu modüllerin yüksek bütçeli olmasıdır. Bu durum dünyanın farklı yerlerindeki araştırmacıların kendi rotor dinamiği yazılımlarını geliştirmesine neden olmuştur. Bu kapsamda geliştirilen yazılımlara Maierhofer vd. [12] tarafından geliştirilen AMrotor, Timbó vd. [13] tarafından geliştirilen ROSS ve Ahmed vd. [14] tarafından geliştirilen VibronRotor örnek verilebilir. Bu yazılımların birbirlerine göre avantajları ve dezavantajları olsa da hepsi FEM kullanan çalışmalardır.

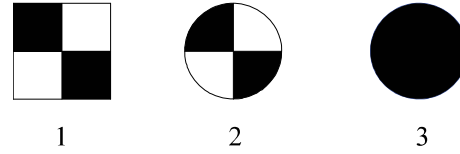
Bu çalışmalar incelendiğinde rotor dinamiğine daha kapsamlı yaklaşabilen ve FEM'den daha hızlı çözüm gerçekleştirip daha esnek

tasarım yetenekleri barındırabilen bir modellemeyi CTMM ile öngörmekteyiz. Hızlı ve hassas çözümleri ile oluşturulan model ayrıca parametrik çalışmalara izin vereceği için parçacık sürüşü optimizasyonu, yapay arı koloni optimizasyonu gibi çeşitli popülasyona dayalı optimizasyon yöntemleriyle, rotor tasarım optimizasyon problemleri çözülebilecektir [15-17]. Fakat bunun öncesinde modelin doğrulanması gerekmektedir.

Bir matematiksel modeli doğrulamak için literatürde deneysel ve yapısal analize dayalı çalışmalar mevcuttur [4, 18]. Özellikle rotor dinamiğinde sistemin çok hızlı dönmesi aşırı titreşimlere neden olmaktadır. Bu titreşim seviyesindeki rotor dinamiği davranışının tasarım fazında belirlenmesi gerektiği için doğrulama çalışması ayrıca gereklidir [19, 20]. Bu çalışma kapsamında modelin doğrulanması adına paket programlar ve analitik yöntem üzerinden doğrulama gerçekleştirilmiştir. Doğrulama çalışması değişken kesitli iki diskli rotor modeli için ANSYS ve Dyrobes programlarının FEM modeli kullanılarak FEM, CTMM ve analitik yöntem modellerinin kıyaslaması gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla doğal frekansların tüm yöntemlerle bulunup karşılaştırılması, farklı sönüm değerleri için FEM ve CTMM karşılaştırılması ve mod şekillerinin FEM ve CTMM karşılaştırılması sağlanarak CTMM'in avantajları ele alınmıştır.

2. Değişken Kesitli Rotor (Variable Section Rotor)

Modelleme için keyfi ölçülere sahip değişken kesitli bir rotor modeli oluşturulmuştur. Yatak, kütle ve dengesizlik parametrelerinin rotor üzerinde görselleştirilmesini basitleştirmek adına Şekil 1'deki semboller kullanılmıştır. Bunlardan 1 yatak elemanı, 2 disk elemanı ve 3 dengesizlik elemanını göstermektedir.



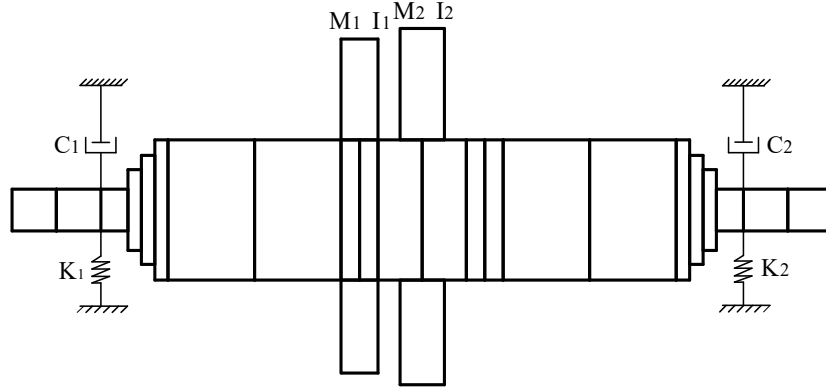
Şekil 1. Sistem Elemanları Sembolleri (System Elements Symbols)

Şekil 2'de bahsedilen rotor modeli verilmiştir. Bu değişken kesitli rotor modeli $K_{1,2}$ direngeliğine ve $C_{1,2}$ sönümüne sahip rulmanlarla iki ucundan mesnetlenmiştir. M_1 kütleli I_1 polar ataletli ve M_2 kütleli I_2 polar ataletli diskler rotor üzerine yerleştirilmiştir. Dengesizlik kütlesi M_2 diski üzerinde bulunmaktadır.

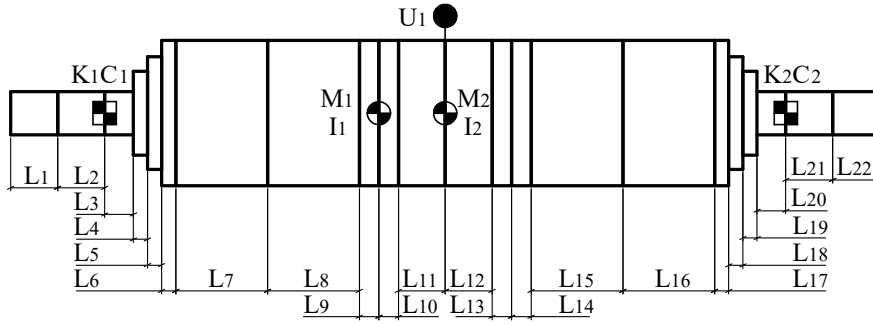
Rotor sistemi Şekil 1'deki sembolleri kullanarak transfer matris yönteminde matris çarpım sıralamasını anlaşılır kılmak için Şekil 3'teki gibi ifade edilmiştir. Elemanların sıralaması soldan sağa doğru gerçekleştirilmiş olup kiriş elemanları L_i olarak bu sıraya göre isimlendirilmiştir. İkinci diski üzerinde bulunan U_1 dengesizlik elemanının matris çarpımında kütlelin sağında ya da solunda olması disk elemanının noktasal olması nedeniyle sonucu değiştirmemektedir.

3. Kompleks Transfer Matris Yöntemi ile Rotor Dinamiği Analizi (Rotor Dynamics Analysis With Complex Transfer Matrix Method)

TMM, burulma sistemleri için Hozler [21] tarafından, eğilme titreşimleri için Myklestad [22] tarafından ilk defa kullanılmıştır. Bu yöntem robotik sistemlerin analizinde veya grafik yöntemlerde kullanılan bir noktanın konum bilgisinin belirli matris büyüklüğü ile çarpılıp diğer noktaya aktarıldığı yöntemlere benzer. Aktarılan konuma ek olarak kuvvet ve moment gibi fiziksel büyüklükler de TMM ile sağlanmaktadır.



Şekil 2. Rotor Sistemi (Rotor System)



Şekil 3. TMM için Basitleştirilmiş Rotor Sistemi (Simplified Rotor System for TMM)

Genel olarak rotor dinamiği problemleri incelendiğinde eğilme titreşiminin tasarım için daha baskın etkiye sahip olduğu gözlemlenir. Çalışma kapsamında kullanılan rotor dinamiği modelinde burulma titreşimi ve eksenel titreşim ihmal edilmiş olup eğilme titreşimleri modele dahil edilmiştir. Varsayılan indirgeme için elde edilen durum vektörünün en genel hali Eş. 1'deki gibidir.

$$\{Z_i\} = [X \theta_y M_y - V_x - Y \theta_x M_x V_y 1]^T \quad (1)$$

Eş. 1 incelendiğinde i . düğüm üzerinde bulunan yük ve deformasyon ifadelerinin Z_i durum vektöründe derlendiği görülür. Durum vektörü içerisindeki ilk sekiz terim sistem içerisindeki yük ve deformasyon ifadesini temsil ederken dokuzuncu terim sistemi tahrik etmek adına kuvvet uygulanabilmesi için eklenilmiştir. Transfer matrisi, verilen bu durum vektörü için i . düğümdeki sistem tepkisini i . elemanın transfer matrisiyle çarparak $i + 1$. düğümdeki sistem tepkisinin bulunmasını sağlar. Bahsedilen bu işlem Eş. 2'deki gibi gerçekleştirilir. Durum vektörüne benzer olarak transfer matrisinde dokuzuncu satır ve sütun dengesizlik yükü gibi dış uyartım kuvvetine ayrılmıştır.

$$\{Z_{i+1}\} = [U_i]\{Z_i\} \quad (2)$$

Sistemin her bir birimi için kiriş elemanı, jiroskopik ve kütleli etki elemanı, dengesizlik kuvveti elemanı, ve rulman elemanı olmak üzere ayrı ayrı transfer matrislerinin oluşturulması gerekmektedir. Ardından oluşturulan bu transfer matrislerinin belirli bir düzende çarpılması ile sistem transfer matrisi elde edilmiş ve oluşturulan bu sistem transfer matrisi üzerinden analizler gerçekleştirilmiştir.

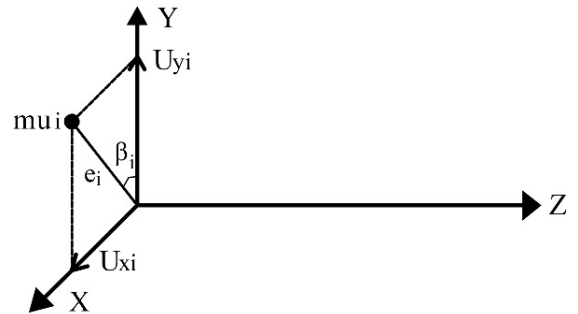
3.1. Dengesizlik Kuvveti Matrisi (Unbalance Force Matrix)

Rotordaki dengesizlik, imalattan sonra uygun bir dengeleme yöntemi ile giderilebilir. Bununla birlikte rotor; termal bükülme, korozyon, kir

toplama gibi nedenlerle de dengeli durumdan çıkmaya meyillidir. Bu nedenle, rotolar ne kadar iyi dengelendiğine bakılmaksızın bir miktar artık dengesizliğe sahip olduğu varsayılır. Sahip olunan dengesizlik, kritik hız civarında rezonansın rotor üzerindeki olumsuz etkisini arttıracaktır. Bu hızlarda titreşim seviyesinin belirlenmesi için dengesizlik tepki analizi bir zorunluluktur. Bu nedenle transfer matrisi içerisinde dengesizliğin katılması önemlidir [8].

$$\begin{aligned} u_{yi} &= m_{u_i} e_i \cos \beta_i \\ u_{xi} &= m_{u_i} e_i \sin \beta_i \end{aligned} \quad (3)$$

Eş. 3'te m_{u_i} , i . diskteki dengesizlik kütleliğini, e_i , belirtilen dengesizlik kütlelerinin dönme eksenine uzaklığını, β_i , bu dengesizlik kütlelerinin Y eksenine göre açılma konumunu, u_{xi} ve u_{yi} , asal eksenlere göre oluşan dengesizlik miktarını temsil etmektedir. Şekil 4'te dengesizlik Kartezyen ekseninde X ve Y bileşenlerine ayrıştırılmıştır. Böylece dengesizlik kuvvetleri asal eksenlere göre Eş. 4'teki gibi yazılmıştır [23].



Şekil 4. Dengesizliğin Kartezyen Ekseninde Gösterimi (Representation of Imbalance on the Cartesian Axis)

$$\begin{aligned}
P_{xi} &= \Omega^2 u_{xi} \cos \Omega t + \Omega^2 u_{yi} \sin \Omega t \\
&= R_e \{ \Omega^2 (u_{xi} - j u_{yi}) e^{j \Omega t} \} \\
P_{yi} &= -\Omega^2 u_{xi} \sin \Omega t + \Omega^2 u_{yi} \cos \Omega t \\
&= R_e \{ \Omega^2 (j u_{xi} + u_{yi}) e^{j \Omega t} \}
\end{aligned} \quad (4)$$

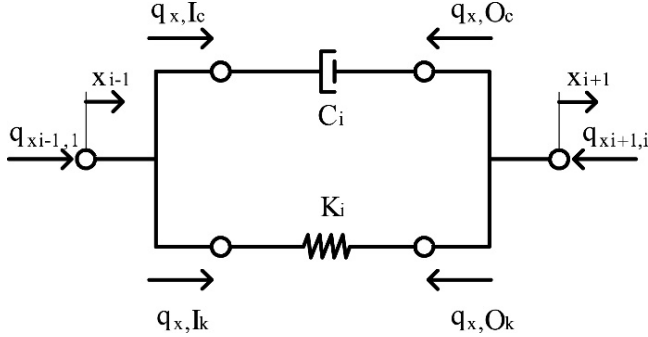
Eş. 4'te Ω , sistemin işletim frekansını temsil ederek $\cos \Omega t$ ve $\sin \Omega t$ terimlerinin karmaşık düzlemde ifade edilmesini sağlamıştır. Karmaşık düzlemin kullanılmasıyla birden fazla dengesizlik yükünün faz farkı ile tanımlanabilmesi sağlanmıştır. Bu kapsamda dengesizlik matrisi ise Eş. 5'teki gibi elde edilir.

$$[U_{nB_i}] = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 1} & O_{3 \times 1} \\ O_{1 \times 3} & 1 & O_{1 \times 3} & 0 & \Omega^2 (u_x - j u_y) \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 1} & I_{3 \times 3} & O_{3 \times 1} & O_{3 \times 1} \\ O_{1 \times 3} & 0 & O_{1 \times 3} & 1 & \Omega^2 (-j u_x - u_y) \\ O_{1 \times 3} & 0 & O_{1 \times 3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Eş. 5'te I_{ixj} , alt indisine göre oluşturulmuş birim matris ve O_{ixj} , alt indisine göre oluşturulmuş sıfır matrisi temsil etmektedir. Transfer matrisinin dokuzuncu sütun ve satırı dış uyarım kuvvetine ait olduğu için dengesizlik yükü buraya yerleştirilmiş ve kalan kısım birim matris olarak ifade edilmiştir.

3.2. Rulman Elemanı Matrisi (Bearing Element Matrix)

Kompleks transfer matris yöntemi (CTMM), transfer matrisinde boyut ve karmaşıklığı azaltmak için kullanılır [24]. Buradaki kullanım amacı da 17×17 matris oluşturmak yerine 9×9 matris oluşturarak sistem alt harmoniklerini reel ve imajiner ifadeye bağlı olarak tanımlayabilmek ve sönüm ifadesini probleme katabilmektir.



Şekil 5. Direngenlik-Sönüm Elemanı İçin Serbest Cisim Diyagramı (Free Body Diagram for Resistivity-Damper Element)

Şekil 5'te $q_{i,j}$, i. elemanın j. direngenlik ya da sönüm elemanına uyguladığı kuvveti ve $x_{i,j}$, i. elemanın j. direngenlik ya da sönüm elemanına uyguladığı yer değiştirmeyi, K_i , rulman direngenliğini ve C_i , rulman sönüm değerini temsil etmektedir. Bu elemanın transfer matrisinin elde edilmesi adına kuvvet eşitliği sağlanır ve her iki istasyon noktasının birbirleri arasındaki ilişkiler tanımlanır. Direngenlik-Sönüm elemanının iki ucundaki kuvvet birbirine eşit ve bununla birlikte $x = e^{j \omega t}$ harmonik çözümü var ise, Kompleks Sönüm Kuvveti:

$$\bar{q}_{x,OC} = \bar{q}_{x,IC} = -C_i \omega (\bar{x}_{i+1,i} - \bar{x}_{i-1,i}) \quad (6)$$

Direngenlik Kuvveti:

$$\bar{q}_{x,OK} = \bar{q}_{x,IK} = -K_i (\bar{x}_{i+1,i} - \bar{x}_{i-1,i}) \quad (7)$$

Kompleks İç Kuvvetler:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{xi+1,i} &= \bar{q}_{xi-1,i} = \bar{q}_{x,IC} + \bar{q}_{x,IK} \\ &= -(K_i + C_i \omega) (\bar{x}_{i+1,i} - \bar{x}_{i-1,i}) \end{aligned} \quad (8)$$

Dolayısıyla kuvvet ve yer değiştirme arasındaki ilişki Eş. 9'daki gibi yazılabilir,

$$\bar{x}_{i+1,i} = \bar{x}_{i-1,i} - \frac{1}{K_i + j \omega C_i} \bar{q}_{xi-1,i} \quad (9)$$

Eş. 9'da ω , işletim hızına karşılık gelmektedir. Bu ifadeyi matris formunda Eş. 10'daki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{q}_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{K_i + j \omega C_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{q}_{x0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Eş. 10 bir ucu sabit bir referansa tutturulmuş rotora uyarlanırsa Eş. 11'deki transfer matrisi elde edilir.

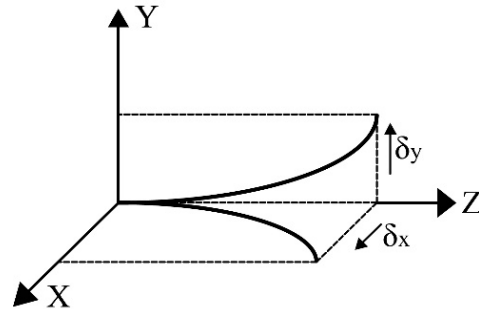
$$[U_{c,a}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(K + j C \omega) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (11)$$

Eş. 11'i 9×9 boyutunda bir matrise çevrilirse direngenlik-sönüm transfer matrisi Eş. 12'deki gibi elde edilir.

$$[U_c]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} [U_{c,a}]_{4 \times 4} & O_{4 \times 4} & O_{4 \times 1} \\ O_{4 \times 4} & [U_{c,a}]_{4 \times 4} & O_{4 \times 1} \\ O_{1 \times 4} & O_{1 \times 4} & 1 \end{bmatrix}_{9 \times 9} \quad (12)$$

3.3. Kiriş Transfer Matrisi (Beam Transfer Matrix)

Alan matrisi olarak da adlandırılan bu matris, Timoshenko kiriş modeli için kiriş elemanın transfer matrisini tanımlar. Sırasıyla, XZ düzleminde ve YZ düzleminde gerçekleşen sehim için transfer matris ifadeleri $[\delta_x]$ ve $[\delta_y]$ olarak tanımlanabilir. Buradaki alan matrisleri yani X ve Y için genlikler $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ ifadelerinin harmoniği olarak tanımlanabilir [25]. Böylece sönüm yerleşiminin daha kolay olabilmesi adına CTMM kullanılır. Bu sayede $\cos \omega t$ terimi reel, $\sin \omega t$ terimi sanal ifadeyi temsil edecektir [26]. Şekil 6'daki gösterilen XZ düzlemi ve YZ düzlemi için alan matrislerini ifade edilirse;



Şekil 6. Kirişin YZ ve XZ Düzlemindeki Sehimi (Deflection of Beam in YZ and XZ Planes)

$$\begin{bmatrix} -Y \\ \theta_x \\ M_x \\ V_y \end{bmatrix}^L = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y \\ \theta_x \\ M_x \\ V_y \end{bmatrix}^R \quad (13)$$

Eş. 13'te b_{ij} katsayılarından oluşan matris, $[\delta_Y]$ olarak yazılıp YZ düzleminin alan transfer matrisini ifade etmektedir.

$$\begin{bmatrix} X \\ \theta_y \\ M_y \\ -V_x \end{bmatrix}^L = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \theta_y \\ M_y \\ -V_x \end{bmatrix}^R \quad (14)$$

Eş. 14'te b_{ij} katsayılarından oluşan matris, $[\delta_X]$ olarak yazılıp XZ düzleminin alan transfer matrisini ifade etmektedir. b_{ij} katsayılarının elde edilmesi için Timoshenko kiriş elemanına göre yük ve deformasyon arasındaki ilişkinin tanımlanması gerekir.

Timoshenko birim kiriş eleman için Newton'un 2. yasası kullanılarak elde edilen hareket denklemi Eş. 15'deki gibi verilmiştir [27].

$$\frac{\delta^4 Y(z)}{\delta z^4} + \frac{\bar{m}\omega^2}{EI_d} \left(\frac{EI_d}{GA_s} + \rho_z^2 \right) - \frac{\bar{m}\omega^2}{EI_d} \left(1 - \frac{\bar{m}\rho_z^2\omega^2}{GA_s} \right) Y(z) = 0 \quad (15)$$

Eş. 15'teki $\frac{\delta^i}{\delta z^i}$ dönme eksenindeki konuma göre i . türevi, $Y(z)$, Y asal eksenindeki sehmin fonksiyonunu, \bar{m} , birim uzunluk başına kütle, E , elastisite modülünü, G , kayma modülünü, ρ_z , eylemsizlik yarıçapını ve A_s , kesit alanı temsil etmektedir. Eş. 15'in anlamlı çözümünü için Timoshenko kirişin konum, açı, moment ve kuvvet eşitliklerini sürekli fonksiyonlar cinsinden Eş. 16, Eş. 17, Eş. 18 ve Eş. 19'daki gibi yazılmıştır [25].

$$Y^i(z) = A^i \cosh(\lambda_1 z) + B^i \sinh(\lambda_1 z) + C^i \cos(\lambda_2 z) + D^i \sin(\lambda_2 z) \quad (16)$$

$$\theta^i(z) = A^i F_1 \sinh(\lambda_1 z) + B^i F_1 \cosh(\lambda_1 z) + C^i F_2 \sin(\lambda_2 z) - D^i F_2 \cos(\lambda_2 z) \quad (17)$$

$$M^i(z) = A^i E_1 \cosh(\lambda_1 z) + B^i E_1 \sinh(\lambda_1 z) + C^i E_2 \cos(\lambda_2 z) + D^i E_2 \sin(\lambda_2 z) \quad (18)$$

$$Q^i(z) = A^i \frac{\bar{m}\omega^2}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 z) + B^i \frac{\bar{m}\omega^2}{\lambda_1} \cosh(\lambda_1 z) + C^i \frac{\bar{m}\omega^2}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 z) - D^i \frac{\bar{m}\omega^2}{\lambda_2} \cos(\lambda_2 z) \quad (19)$$

Eş. 16, Eş. 17, Eş. 18 ve Eş. 19'daki eşitlikleri kısaltmak için kullanılan E_1 , E_2 , F_1 , F_2 , λ_1 ve λ_2 ifadelerinin açılımları takip eden eşitlikler de sırasıyla verilmiştir.

$$E_1 = EI_d \left(\frac{\bar{m}\omega^2}{GA_s} + \lambda_1^2 \right), E_2 = EI_d \left(\frac{\bar{m}\omega^2}{GA_s} - \lambda_2^2 \right) \quad (20)$$

$$F_1 = \frac{\bar{m}\omega^2}{GA_s \lambda_1} + \lambda_1, F_2 = \frac{\bar{m}\omega^2}{GA_s \lambda_2} - \lambda_2 \quad (21)$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\bar{m}\omega^2}{EI_d} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{m}\omega^2}{GA_s} - \frac{\bar{m}\rho_z^2\omega^2}{EI_d} \right)^2}{\frac{1}{2} \frac{\bar{m}\omega^2}{GA_s} + \frac{\bar{m}\rho_z^2\omega^2}{EI_d}}} \pm \quad (22)$$

Eş. 16, Eş. 17, Eş. 18 ve Eş. 19 için verilen ifadeler $c_{i,j}(z)$ fonksiyonlarıyla basitleştirilerek matris formunda Eş. 23'teki gibi yazılmıştır.

$$\{Z(z)\} = \begin{bmatrix} c_{11}(z) & c_{12}(z) & c_{13}(z) & c_{14}(z) \\ c_{21}(z) & c_{22}(z) & c_{23}(z) & c_{24}(z) \\ c_{31}(z) & c_{32}(z) & c_{33}(z) & c_{34}(z) \\ c_{41}(z) & c_{42}(z) & c_{43}(z) & c_{44}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^i \\ B^i \\ C^i \\ D^i \end{bmatrix} \quad (23)$$

Bu matris ifadesini l uzunluğundaki kiriş elemanın transfer matrisi olarak tanımlamak için $z=0$ ve $z=l$ olmak üzere Eş. 24'teki gibi yazılır.

$$\{Z_{(0)}\} = [C(0)]\{A^i\}, \{Z_{(l)}\} = [C(l)]\{A^i\} \quad (24)$$

Eş. 2'ye Eş. 24 uygulanırsa,

$$[C(l)]\{A^i\} = [U][C(0)]\{A^i\} \quad (25)$$

Buradan belirli uzunluktaki kiriş elemanı için Timoshenko transfer matris katsayıları b_{ij} Eş. 26'daki gibi elde edilir.

$$[U] = [C(l)][C(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Buradan birim kiriş elemanın alan matrisi Eş. 27'deki gibi ifade edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} Z_x \\ Z_y \\ 1 \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} [\delta_x]_{4x4} & O_{4x4} & O_{4x1} \\ O_{4x4} & [\delta_y]_{4x4} & O_{4x1} \\ O_{1x4} & O_{1x4} & 1 \end{bmatrix}_{9x9} \begin{bmatrix} Z_x \\ Z_y \\ 1 \end{bmatrix}^L \quad (27)$$

Eş. 27'de yer alan Z_x ve Z_y ifadesinin açımı Eş. 28'deki gibidir.

$$\{Z_x\} = \begin{bmatrix} X \\ \theta_y \\ M_y \\ -V_x \end{bmatrix}, \{Z_y\} = \begin{bmatrix} -Y \\ \theta_x \\ M_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

Böylece alan transfer matrisi Eş. 29'teki gibi yazılmış olur.

$$[U]_{9x9} = \begin{bmatrix} [\delta_x]_{4x4} & O_{4x4} & O_{4x1} \\ O_{4x4} & [\delta_y]_{4x4} & O_{4x1} \\ O_{1x4} & O_{1x4} & 1 \end{bmatrix}_{9x9} \quad (29)$$

3.4. Jiroskopik ve Kütleli Etki Matrisi (Gyroscopic and Mass Effect Matrix)

Nokta matrisi olarak da bilinen bu matris, moment ve jiroskopik etki kaynaklı diskte oluşan santrifüj kuvvetini temsil eder. Moment denklemlerinden elde edilen jiroskopik etki, işletim hızının bir fonksiyonu olup disk ataletinin radyal ve eksenel momentine bağlıdır. Rotor hızı arttıkça şaftı katılaştırma gibi dinamik etkiye sahip olduğundan jiroskopik etki sonucu rotorun doğal frekansı da artar. Jiroskopik etki altında sistem doğal frekansları işletim hızının fonksiyonu olarak çizdirilirse Campbell diyagramı elde edilir. Bu diyagram üzerinden kritik hızların tayini gerçekleştirilebilir. Tek serbestlik dereceli jiroskopik etki için hareket denklemi Eş. 30'daki gibi yazılır,

$$I_d \ddot{\theta} - j\Omega I_p \dot{\theta} + k_\theta \theta = 0 \quad (30)$$

Eş. 30'da I_p ve I_d , sırasıyla polar atalet momentini ve alan atalet momentini ve k_θ , burulma direngenliğini temsil etmektedir. $\theta = ae^{j\omega t}$ gibi bir çözüm olursa Eş. 31 elde edilir [3].

$$I_d \omega^2 - \Omega I_p \omega = k_\theta \theta \quad (31)$$

θ ve moment arasındaki ilişki Eş. 32 ve Eş. 33'teki gibi belirtilmiştir.

$$M_x^i = M_x^{i+1} + \omega I_p \Omega \theta_x - \omega^2 I_d \theta_y \quad (32)$$

$$M_y^i = M_y^{i+1} - \omega I_p \Omega \theta_y - \omega^2 I_d \theta_x \quad (33)$$

Burada M_j^i , i . durum vektöründe ve j eksenindeki moment ifadesini temsil etmektedir. Sistemin simetrik olmasından dolayı $\theta_x = \theta_y$ yazılır [8].

Böylece kütle ve jiroskopik etki tek bir transfer matrisi olarak Eş. 34 ve Eş. 35'teki gibi yazılır.

$$[U_{bi_1}]_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{pi} \Omega \omega - I_{di} \omega^2 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4} \quad (34)$$

$$[U_{bi_2}]_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{pi} \Omega \omega - I_{di} \omega^2 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4} \quad (35)$$

Burada m_i , diskin kütlelerini noktasal olarak temsil etmektedir. Böylece nokta transfer matrisi Eş. 36'daki gibi yazılmış olur.

$$[U_{bi}]_{9x9} = \begin{bmatrix} [U_{bi_1}]_{4x4} & O_{4x4} & O_{4x1} \\ O_{4x4} & [U_{bi_2}]_{4x4} & O_{4x1} \\ O_{1x4} & O_{1x4} & 1 \end{bmatrix}_{9x9} \quad (36)$$

3.5. Sistem Transfer Matrisi (System Transfer Matrix)

Sistem transfer matrisi için eleman düzeyindeki transfer matrisleri ilgili eşitliklerden aşağıdaki gibi çekilir.

Dengesizlik Matrisi

$$\text{Eş. 5'ten} \quad [U_{nB_i}]$$

Yatak Elemanı

$$\text{Eş. 12'den} \quad [U_c]_{9x9}$$

Alan Matrisi

$$\text{Eş. 29'dan} \quad [U]_{9x9}$$

Nokta Matrisi

$$\text{Eş. 36'dan} \quad [U_{bi}]_{9x9}$$

İlgili modelin parametrelerine göre eleman düzeyindeki transfer matrisleri oluşturulur. Daha sonra rotor için Şekil 3'ten faydalanılarak oluşturulan transfer matrisler sıralanır. Bu sıralama soldan sağa gerçekleştirilir. Sıralamaya göre elemanlar birbirleriyle çarpılarak sistem transfer matrisi Eş. 37'deki gibi elde edilir.

$$[U_{J2sistem}] = [U_1][U_2][U_c][U_3][U_4][U_5][U_6][U_7][U_8][U_9] \dots [U_{b1}][U_{10}][U_{11}][U_{nB1}][U_{b2}][U_{12}][U_{13}][U_{14}] \dots [U_{15}][U_{16}][U_{17}][U_{18}][U_{19}][U_{20}][U_c][U_{21}][U_{22}] \quad (37)$$

Oluşturulan bu sistem transfer matrisi 9x9 boyutunda bir matristir. Sistem transfer matrisi açılarak yazılırsa Eş. 38'teki gibi gözükecektir.

$$[U_{sistem}]_{9x9} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{81} & a_{92} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{98} & a_{99} \\ a_{91} & a_{92} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix}_{9x9} \quad (38)$$

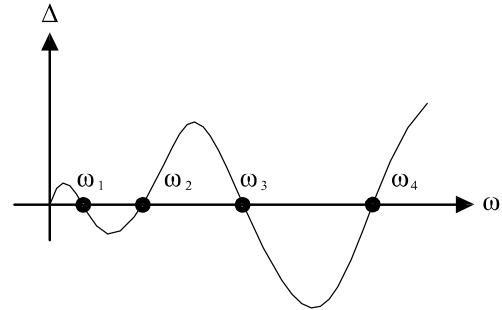
Eş. 38'de a_{ij} katsayısı, kolektif olarak çarpılmış ve artık parametrik olarak ifade edilemeyecek sistem transfer matrisinin katsayılarını temsil etmektedir. Sağ ve sol serbest uçlarda kuvvet ve moment değerinin sıfır olacağı fakat konum ve açı değerlerinin sıfırdan farklı olacağı şekilde sınır şartlarını ifade eden durum vektörü Eş. 39'daki gibi yazılır.

$$\{Z_x\} = [X \ \theta_y \ 0 \ 0]^T \\ \{Z_y\} = [-Y \ \theta_x \ 0 \ 0]^T \quad (39)$$

Eş. 39'un Eş. 38'e uygulanması ile sistem için bir karakteristik matris, yani determinantının sıfır olması beklenen bir matris ifadesi Eş. 40'ta elde edilmiş olur.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{46} \\ a_{71} & a_{72} & a_{75} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{85} & a_{86} \end{bmatrix} = 0 \quad (40)$$

Burada özdeğer bulma stratejisi uygulanır. Özdeğer bulma stratejisi belirli ω arımları ile determinantın sıfır olduğu noktaları bulmaya dayanır. Şekil 7 uygulanan bu yöntemi daha anlaşılır kılmaktadır. Böylece sistemin doğal frekansları bulunmuş olur. Ayrıca kök değerleri bulmak için koddan Newton Raphson yöntemi uygulanmıştır.



Şekil 7. ω Artırımı İçin Δ Grafiği (Δ Chart for ω Increment)

Sistem doğal frekansları elde edildikten sonra durum vektörleri için bir başlangıç değeri belirlenerek mod şekilleri bulunur. Bununla birlikte kritik hız değerlerini içeren Campbell diyagramı çizilir. Son olarak sistem için belirli bir dakika devir sayısı (revolution per minute, RPM) aralığında sahip olduğu dengesizliğe binaen oluşturduğu tepki yükü ve deformasyon değerleri saptanır. Bahsedilen bu sonuçlar bir rotor sisteminin analizi için gerekli verilerdir.

Dengesizlik yükünün belirlenmesinde ilk olarak en sağ uçtaki durum vektörü katsayılarının bulunması sağlanır. Bu katsayıların bulunması Eş. 40'taki karakteristik matris üzerinden gerçekleşir. Takip eden eşitliklerde sağ uçtaki durum vektörünün başlangıç değerleri tanımlanmıştır.

$$\theta_{y0} = \frac{a_{39} a_{41} - a_{49} a_{31}}{a_{31} a_{42} - a_{32} a_{41}} \quad (41)$$

$$X_0 = \frac{-a_{39} - \theta_{y0} a_{32}}{a_{31}} \quad (42)$$

$$\theta_{X0} = \frac{a_{79}a_{85} - a_{89}a_{75}}{a_{75}a_{86} - a_{76}a_{85}} \quad (43)$$

$$Y_0 = \frac{-a_{79} - \theta_{X0}a_{76}}{a_{75}} \quad (44)$$

Elde edilen başlangıç değerleri Eş. 45'deki gibi tek bir durum vektörü üzerine yerleştirilirse,

$$\{Z_0\} = [X_0 \ \theta_0 \ 0 \ 0 \ Y_0 \ \theta_0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (45)$$

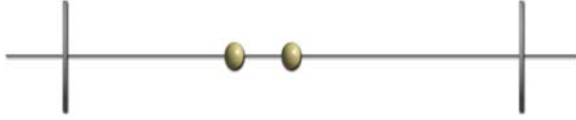
Disk 2 üzerinde yük ve deformasyon değerini okumak için Eş. 46'daki çarpımın yapılması gerekir.

$$\{Z_{Disk1}\} = [U_{nB_1}][U_{b2}][U_{12}][U_{13}][U_{14}][U_{15}][U_{16}] \dots [U_{17}][U_{18}][U_{19}][U_{20}][U_c][U_{21}][U_{22}]\{Z_0\} \quad (46)$$

4. Karşılaştırılacak Yöntemler (Comparative Methods)

4.1. FEM ile Rotorun Dinamik Modeli (Dynamic Model of Rotor With FEM)

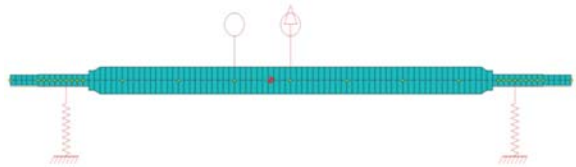
Elde edilen sonuçların güvenilirliğini artırmak için yüksek doğrulukta sonuçlar verebilen FEM'e dayanan Ansys ve Dyrobes kullanılarak değişken kesitli rotor ayrıca modellenmiş ve elde edilen sonuçlar birbirleri ile kıyaslanmıştır. Değişken kesitli rotor Ansys'te kiriş eleman kullanılarak modellenmiş ve diskler noktasal kütle olarak eklenerek içerisine gerekli kütle ve atalet değerleri girilmiştir. Nihayetinde oluşan model Şekil 8'deki gibidir.



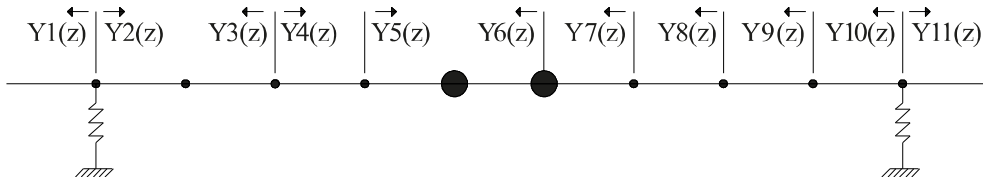
Şekil 8. Ansys Rotor Modeli (Ansys Rotor Model)

Sistem için öncelikle Ansys'te modal analiz yapıp mod şekilleri doğal frekanslar elde edilmiş, daha sonrasında harmonik analiz gerçekleştirilerek belirli yataklar için tepki değerleri elde edilmiştir.

Ansys spesifik olarak rotor dinamiği için geliştirilmiş bir program değildir. Bu nedenle rotor dinamiği analizlerinde kullanılan ve FEM yöntemine dayalı çözümler gerçekleştiren Dyrobes yazılımı üzerinden de bir model kurulmuştur. Rotor modeli Dyrobes'ta ufak elemanlara bölünmüş kiriş model olarak modellenmiş ve diskler benzer şekilde noktasal kütle olarak sistem üzerine yerleştirilmiştir. Nihayetinde oluşan model Şekil 9'daki gibidir.



Şekil 9. Dyrobes Rotor Modeli (Dyrobes Rotor Model)



Şekil 10. Sürekli Sistem Elemanlarının Yönelimi ve Gösterimi (Orientation and Display of Continuous System Elements)

4.2. Analitik Yöntem ile Rotorun Dinamik Modeli (Dynamic Model of Rotor with Analytical Method)

Ansys ve Dyrobes modellerinde eşit aralıklı kademeli geçişi temsil etmek adına 5 mm eleman boyutu seçilmiştir. Seçilen eleman boyutuna karşılık eleman sayısı 100 olarak elde edilmiştir. Belirtilen eleman sayısının artırılmasının elde edilen doğal frekans değerlerinde %1 altında ayrılmaya sebep olması modelin yeterli miktarda eleman içerdiğini göstermektedir.

Literatürde, CTMM ve FEM yaklaşık yöntemler olarak geçmektedir. Bu yaklaşık yöntemler birim eleman için sürekli sistem modelinden çıkarımda bulunarak bir tanımlama yapar. Bu tanımlama ile sistem n elemana ayrıştırılarak çözülebilir. Bu n adet ayrıştırma neticesinde sistemin yaklaşık olarak adlandırılan fakat yeterince iyi modelleme ile kaliteli sonuçlar veren bir matematiksel modeli elde edilir.

Genel olarak ayrı bir sistemin sürekli bir sistemden daha kolay çözülebileceği söylenebilir. Fakat yapılan indirgenme nedeni ile ayrı bir model kullanılarak elde edilen veriler, sistemi sürekli modeli temsil ederek elde edilen veriler kadar doğru olmayabilir. Bu nedenle, problem ihtiyacına göre, çözümün uygunluğu ve doğruluğu arasında seçim yapılması gerekir [27]. Böyle bir farkın yer aldığı göz önünde bulundurulurken kıyaslamaya analitik yöntem de eklenmiştir.

Analitik yöntem için Eş. 15 ve sonrasında verilen Timoshenko kiriş elemanı denklemleri kullanılmıştır. Bu denklemlerde A^i, B^i, C^i ve D^i , katsayıları her ayrı eleman için tanımlanmış bilinmeyen parametreler olup 11 elemanlı analitik model için toplam 44 tane bilinmeyen parametre vardır.

Genel denklemleri verilen sistemin değişken kesitli rotor için gösterimi Şekil 10'daki gibidir. Sistemin çözülmesi 11 adet sürekli eleman üzerinden gerçekleştirilmiştir. Bu elemanların başlangıç konumu ve yayılımı da Şekil 10'da gösterilmiş olup sınır şartları Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1'deki denklemler kullanılarak A^i, B^i, C^i ve D^i , olmak üzere 44 bilinmeyen eş zamanlı çözdürülürse sistemin doğal frekansları elde edilmiş olur.

5. Elde Edilen Verilerin Karşılaştırması (Comparison of the Data Obtained)

5.1. Rotor Parametreleri (Rotor Parameters)

Şekil 3'teki değişken kesitli rotorun bahsedilen yöntemler ile çözülebilmesi için rotorun fiziksel parametreleri gereklidir. Fiziksel parametreler Tablo 2'de verildiği gibidir. Parametrelerin tanımlanıp numaralandırılması soldan sağa CTMM modelini oluşturacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Tablo 2'de L_i , i . kiriş elemanının uzunluğunu, ρ , kirişin yoğunluğunu, E , elastisite modülünü, G , kesme modülünü, k_s , dairesel kesit şekil faktörünü, g , yer çekimi ivmesini, m_i , i . diskin kütleliğini, I_p ve I_d , sırasıyla polar ataleti ve alan ataleti, $K_{1,2}$, birinci ve ikinci rulman dirençliğini, $C_{1,2}$, birinci ve ikinci rulman sönümünü,

U , dengesizlik miktarını ve $U\theta$, dengesizlik açılal konumunu temsil etmektedir.

5.2. Doğal Frekansların Karşılaştırılması (Comparison of Natural Frequencies)

Jiroskopik etkiden dolayı rotorun doğal frekansı, işletim hızına bağlı bir fonksiyon olur. İşletim hızının doğal frekans ile çakıştığı ve rezonansa sebep olduğu değer kritik hız olarak adlandırılır. İşletim hızı belirlenirse rotorun belirlenen bu işletim hızı için doğal frekansları gözlemlenir. Bunun için birinci işletim hızı değeri 4428 RPM, ikinci işletim hızı değeri 37807 RPM ve üçüncü işletim hızı değeri 53517 RPM olarak seçilmiştir. Belirlenen bu işletim hızlarına karşılık elde edilen doğal frekans sonuçları Tablo 3'teki gibi

verilmiştir. Tablo 3 incelendiğinde genel olarak kritik hız değeri için benzer sonuçlar elde edildiği görülür. Analitik yöntem ile elde edilen değerler genele bakıldığında en düşük doğal frekans değerlerini içerirken diğer yöntemler daha yüksek doğal frekanslara sahiptir. Analitik yöntem dışındaki yöntemler yaklaşık yöntem oldukları için daha fazla sınırlamaya sahiptir. Bu nedenle elde edilen doğal frekans değerlerinin bir miktar yüksek çıktığı düşünülmektedir.

Bu sonuçların daha anlamlı ifadesi için analitik yöntemle bağlı olarak bağıl hata oranları belirlenmiştir. Bağıl hata oranları Tablo 4'te verildiği gibi olup bunlar arasında analitik yöntemle en yakın olan yöntemin CTMM olduğu gözlemlenmiştir. Bu sonuç CTMM'ye dayalı oluşturulmuş modelin ne kadar iyi sonuç verdiğini göstermektedir.

Tablo 1. Analitik Çözüm İçin Sınır Şartları (Boundary Conditions for Analytical Solution)

Geçiş	$Y_1 - Y_2$	$Y_2 - Y_3$	$Y_3 - Y_4$
Konum	$Y^1(0) = Y^2(0)$	$Y^2(l_2) = Y^3(l_3)$	$Y^3(0) = Y^4(0)$
Açı	$\theta^1(0) + \theta^2(0) = 0$	$\theta^2(l_2) + \theta^3(l_3) = 0$	$\theta^3(0) + \theta^4(0) = 0$
Moment	$M^1(0) = M^2(0)$	$M^2(l_2) = M^3(l_3)$	$M^3(0) = M^4(0)$
Kuvvet	$Q^1(0) + k_1 Y^1(0) + Q^2(0) = 0$	$Q^2(l_2) + Q^3(l_3) = 0$	$Q^3(0) + Q^4(0) = 0$
Geçiş	$Y_4 - Y_5$	$Y_5 - Y_6$	$Y_6 - Y_7$
Konum	$Y^4(l_4) = Y^5(0)$	$Y^5(l_5) = Y^6(l_6)$	$Y^6(0) = Y^7(l_7)$
Açı	$\theta^4(l_4) = \theta^5(0)$	$\theta^5(l_5) + \theta^6(l_6) = 0$	$\theta^6(0) = \theta^7(l_7)$
Moment	$M^4(l_4) = M^5(0)$	$M^5(l_5) - (I_{p1}\omega\Omega + I_{d1}\omega^2)\theta^5(l_5) = M^6(l_6)$	$M^6(0) - (I_{p2}\omega\Omega + I_{d2}\omega^2)\theta^6(0) = M^7(l_7)$
Kuvvet	$Q^4(l_4) = Q^5(0)$	$Q^5(l_5) + m_1\omega^2 Y^5(l_5) + Q^6(l_6) = 0$	$Q^6(0) + m_2\omega^2 Y^6(0) = Q^7(l_7)$
Geçiş	$Y_7 - Y_8$	$Y_8 - Y_9$	$Y_9 - Y_{10}$
Konum	$Y^7(0) = Y^8(l_8)$	$Y^8(0) = Y^9(l_9)$	$Y^9(0) = Y^{10}(l_{10})$
Açı	$\theta^7(0) = \theta^8(l_8)$	$\theta^8(0) = \theta^9(l_9)$	$\theta^9(0) = \theta^{10}(l_{10})$
Moment	$M^7(0) = M^8(l_8)$	$M^8(0) = M^9(l_9)$	$M^9(0) = M^{10}(l_{10})$
Kuvvet	$Q^7(0) = Q^8(l_8)$	$Q^8(0) = Q^9(l_9)$	$Q^9(0) = Q^{10}(l_{10})$
Geçiş	$Y_{10} - Y_{11}$	Y_{11}	Y_{11}
Konum	$Y^{10}(0) = Y^{11}(0)$	$\neq 0$	$\neq 0$
Açı	$\theta^{10}(0) + \theta^{11}(0) = 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Moment	$M^{10}(0) = M^{11}(0)$	$M^1(l_1) = 0$	$M^{11}(l_{11}) = 0$
Kuvvet	$Q^{10}(0) + k_2 Y^{10}(0) + Q^{11}(0) = 0$	$Q^1(l_1) = 0$	$Q^{11}(l_{11}) = 0$

Tablo 2. Rotor Parametreleri (Rotor Parameters)

Kiriş Parametreleri		
$L_1 = 25$ mm $R_1 = 4,5$ mm	$L_{10} = 20$ mm $R_{10} = 10$ mm	$L_{19} = 5$ mm $R_{19} = 7,5$ mm
$L_2 = 25$ mm $R_2 = 4,5$ mm	$L_{11} = 30$ mm $R_{11} = 10$ mm	$L_{20} = 20$ mm $R_{20} = 4,5$ mm
$L_3 = 20$ mm $R_3 = 4,5$ mm	$L_{12} = 20$ mm $R_{12} = 10$ mm	$L_{21} = 25$ mm $R_{21} = 4,5$ mm
$L_4 = 5$ mm $R_4 = 7,5$ mm	$L_{13} = 25$ mm $R_{13} = 10$ mm	$L_{22} = 25$ mm $R_{22} = 4,5$ mm
$L_5 = 5$ mm $R_5 = 8,75$ mm	$L_{14} = 25$ mm $R_{14} = 10$ mm	$\rho = 8220$ kg/m ³
$L_6 = 10$ mm $R_6 = 10$ mm	$L_{15} = 40$ mm $R_{15} = 10$ mm	$E = 203$ GPa
$L_7 = 40$ mm $R_7 = 10$ mm	$L_{16} = 40$ mm $R_{16} = 10$ mm	$G = 78,6$ GPa
$L_8 = 40$ mm $R_8 = 10$ mm	$L_{17} = 20$ mm $R_{17} = 10$ mm	$k_s = 1,7$
$L_9 = 30$ mm $R_9 = 10$ mm	$L_{18} = 5$ mm $R_{18} = 8,75$ mm	$g = 9,80665$ kg.m/s ²
Disk Parametreleri		
$m_1 = 1,80767$ kg	$m_2 = 2,36167$ kg	
$I_{d1} = 1,7e-3$ kg.m ²	$I_{d2} = 3,0e-3$ kg.m ²	
$I_{p1} = 3,3e-3$ kg.m ²	$I_{p2} = 5,9e-3$ kg.m ²	
Yatak Parametreleri		
$K_{1,2} = 3000$ N/mm	$C_{1,2} = 0,1$ Ns/mm	
Dengesizlik Parametresi		
$U = 206,637$ g.mm	$U\theta = 45^\circ$	

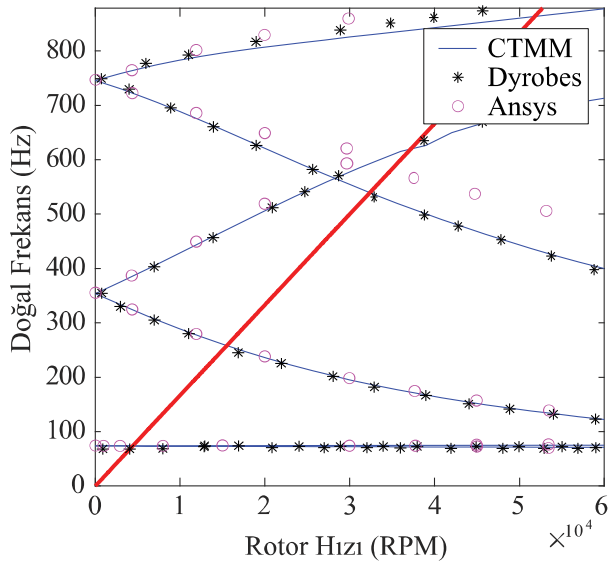
Tablo 3. Doğal Frekans Karşılaştırılması (Natural Frequency Comparison)

#	İşletim Hızı (RPM)	Analitik	Ansys FEM	Dyrobex FEM	CTMM
1. Mod (Hz)	4428	71,52	73,73	73,80	73,71
2. Mod (Hz)	37807	623,43	653,20	630,12	625,80
3. Mod (Hz)	53517	877,93	903,88	891,94	866,39

Tablo 4. Doğal Frekanslarının Analitik Yönteme Göre Bağlı Hataları
(Relative Errors of Natural Frequencies by Analytical Method)

#	Analitik-Ansys FEM	Analitik-Dyrobess FEM	Analitik-CTMM
1. Mod	%3,09	%3,08	%2,97
2. Mod	%4,77	%1,06	%0,37
3. Mod	%2,95	%1,57	%1,33

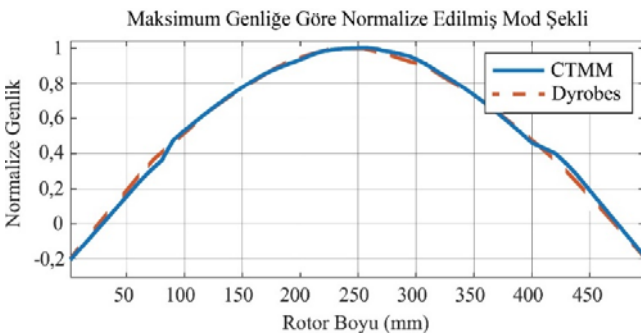
Şekil 11’de Campbell diyagramı üzerinden elde edilen sistem doğal frekans değerlerinin işletim hızına bağlı olarak gösterilmesi ele alınmıştır. Burada da incelendiğinde tablo kıyaslamasında olduğu gibi Ansys FEM modelinin Dyrobess FEM modeline göre biraz daha sapsmiş olduğu fakat genel olarak eğrilerin uyduğu gözlemlenmiştir.



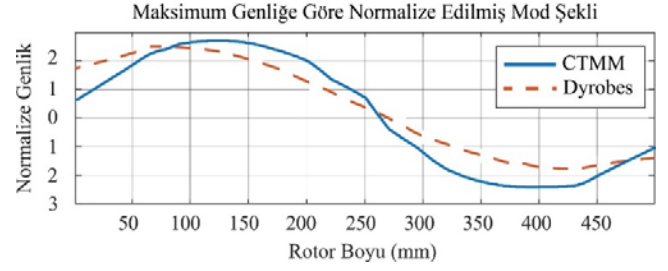
Şekil 11. Campbell Diyagramının Karşılaştırılması
(Comparison of Campbell Diagram)

5.3. Mod Şekillerinin Karşılaştırılması (Comparison of Mod Shapes)

Dyrobess FEM doğal frekans sonuçları CTMM’ye daha yakın olduğu için mod şekillerinin kıyaslamasında Dyrobess FEM ve CTMM karşılaştırılmıştır. Şekil 12 ve Şekil 13 incelendiğinde mod şekillerinin de son derece tutarlı olduğu gözlemlenmiştir. Bu konuda da TMM yönteminin iyi sonuçlar verdiği ortaya konulmuştur.



Şekil 12. 1. Mod Şekli Karşılaştırılması (1. Mode Shape Comparison)

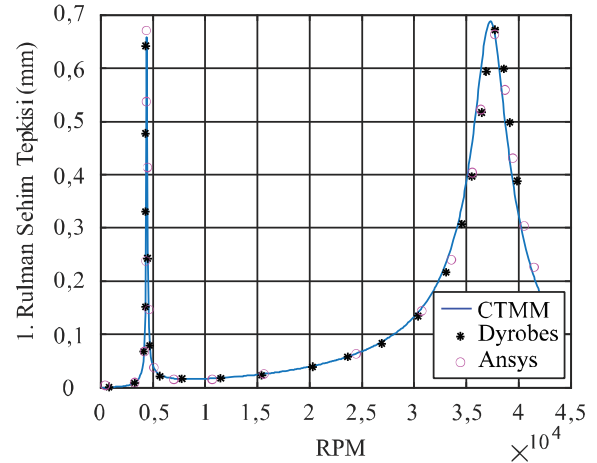


Şekil 13. 2. Mod Şekli Karşılaştırılması (2. Mode Shape Comparison)

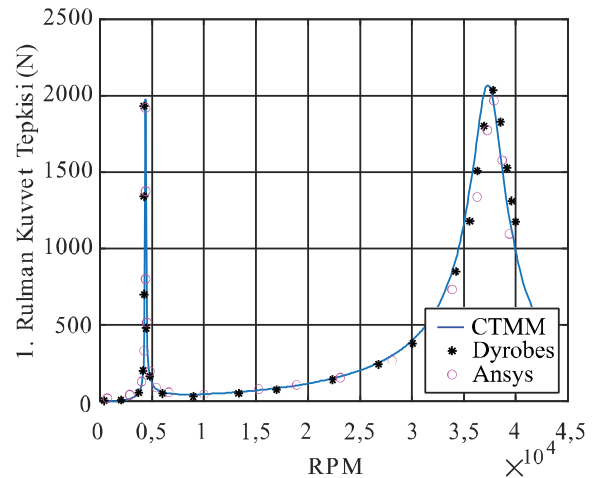
5.4. Rulman Tepki Değerlerinin Karşılaştırılması (Comparison of Bearing Response Values)

Yatak tepki değerlerinin kıyaslaması için iki yöntem izlenmiştir. Bunlardan birincisi tek belirli bir sönüm değeri için Ansys FEM, Dyrobess FEM ve CTMM kıyası ve diğeri farklı sönüm değerleri için Ansys FEM ve TMM değerlerinin kıyası şeklindedir. Bu kıyaslar için 1. rulman seçilmiş ve farklı çalışma hızı için tepki cevabı elde edilmiştir.

Şekil 14 ve Şekil 15’te 0,1 N.s/mm sönüm değeri için 1,666 Hz (100 RPM) çözüm aralığı ile 1. rulmanda elde edilen sehim ve kuvvet tepki değerleri çizdirilmiştir.



Şekil 14. 1. Rulmanın İşletim Hızına Bağlı Sehimi Grafiği
(Deflection Graph of 1. Bearing Depending on Operating Speed)



Şekil 15. 1. Rulmanın İşletim Hızına Bağlı Kuvveti Grafiği
(Force Graph of 1. Bearing Depending on Operating Speed)

Tablo 5. Elde Edilen 1. Rulman Tepki Değerlerinin Karşılaştırılması (Comparison of 1st Bearing Response Values Obtained)

#	Ansyes FEM	Dyrobex FEM	CTMM
1. Mod Geçiş (RPM)	4378	4400	4393
Kuvvet Genliği (N)	1918	1947	1976
Sehim Genliği (mm)	0,6713	0,6491	0,6587
2. Mod Geçiş (RPM)	37709	37800	37294
Kuvvet Genliği (N)	1967	2036	2083
Sehim Genliği (mm)	0,6432	0,6728	0,6728

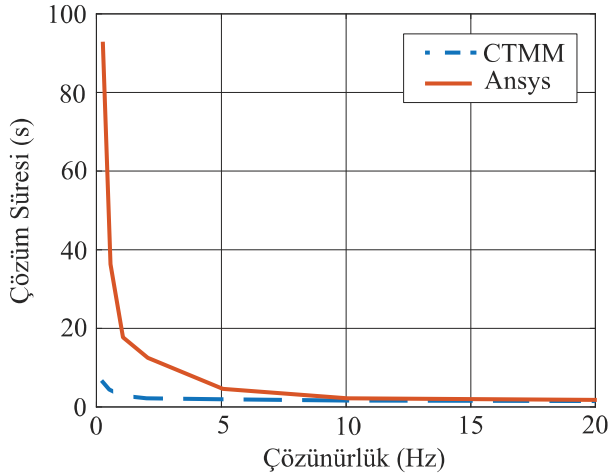
Tablo 6. Farklı Sönüm Değerleri İçin 1. Rulman Tepkisi Ansyes FEM ve CTMM Karşılaştırılması (Comparison of 1. Bearing Response Ansyes FEM and CTMM for Different Damping Values)

#	$C=0,1$ Ns/mm	$C=0,2$ Ns/mm	$C=0,5$ Ns/mm	$C=1$ Ns/mm	$C=2$ Ns/mm	$C=5$ Ns/mm	$C=10$ Ns/mm
F (N)	%0,646	%0,275	%0,412	%0,281	%1,883	%11,726	%7,015
δ (mm)	%0,268	%0,005	%0,007	%0,006	%0,297	%0,451	%0,028
TMM Çözüm Süresi: 52,11 s				Ansyes Çözüm Süresi: 247,60 s			

Sehim ve Kuvvet tepki değeri için üç model kıyaslandığında elde edilen sonuçlar Tablo 5'teki gibidir. Tablo 5 incelendiğinde üç farklı modelin birbirine oldukça yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Tablo 6'de ise farklı sönüm değerleri için Ansyes FEM ve TMM tepki değerleri kıyaslanmıştır. Burada çözüm aralığı 0,05 Hz seçilerek asimptotik olarak sonsuza giden tepki değeri belirli bir değere yakınsatılmıştır. Böylece birbirine daha benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bununla birlikte çözüm süresi de tabloda verildiği gibi olup bu süre tüm sönüm değerlerini kapsayan çözüm süresidir.

Buna ek olarak çözünürlüğün çözüm süresine etkisi oldukça fazladır ve CTMM'nin önemi hassas çözünürlükte daha fazla ortaya çıkmaktadır. Şekil 16'da farklı çözünürlük değerleri için elde edilmiş analiz çözüm süresi sonuçlarının kıyaslanması verilmiştir. Buradan görüldüğü üzere CTMM oldukça hızlı çözüm sağlamaktadır.

**Şekil 16.** Çözünürlüğün Çözüm Süresi Üzerine Etkisi (Effect of Resolution on Solution Time)

6. Simgeler (Symbols)

K	: Direngenlik [N/mm]
C	: Sönüm [Ns/mm]
m	: Disk kütlesi [kg]
I_d	: Alan atalet [kg.m ²]
I_p	: Polar atalet [kg.m ²]
E	: Elastisite modülü [GPa]
G	: Kayma modülü [GPa]
u	: Dengesizlik [g.mm]

ks	: Şekil faktörü
\bar{m}	: Birim uzunluktaki kütle [kg/m]

6.1. Yunan Harfleri (Greek Letters)

δ	: Sehim [mm]
ω	: Doğal frekans [rad-Hz]
Ω	: İşletim hızı [rad]
ρ	: Yoğunluk [kg/m ³]

6.2. Kısaltmalar (Abbreviations)

CTMM	: Kompleks Transfer Matris Yöntemi
FEM	: Sonlu Elemanlar Yöntemi
RPM	: Dakikadaki devir sayısı

7. Sonuçlar (Conclusions)

Oluşturulan rotor dinamiği modelinde disklerin jiroskopik etkisinin ve rulman sönümlerinin dahil edilmesi rotor dinamiği açısından daha kapsayıcı bir şekilde CTMM'nin diğer yöntemlerle kıyaslanmasını sağlamıştır. Ayrıca analitik yöntem sonuçlarının da eklenmesi endüstriyel alanda kullanılan paket programların doğru bir şekilde değerlendirilmesini sağlamıştır. CTMM, FEM gibi yaklaşık yöntem olmasına rağmen ilk üç mod için en fazla %2,97 hata oranı ile analitik yöntemle oldukça yakın sonuç elde etmiştir. Bununla birlikte karmaşık ve zaman alıcı FEM paket programlarına göre ilk üç mod için en fazla %2,86 hata oranı ile sonuç elde etmiştir. Sönüm değerlerinin değiştirilerek gerçekleştirildiği diğer bir karşılaştırmada ise CTMM, FEM'e göre %1'in altında sehim hatası ve %375 daha hızlı bir çözüm sunmuştur.

Bu sonuçlar CTMM'e dayalı rotor dinamiği modelinin güvenilir, hızlı ve matris boyutu büyümemesinden kaynaklı modellenmesinin daha kolay olduğunu ortaya koymaktadır. CTMM'nin hızlı ve hassas çözüm gerçekleştirme yeteneği sayesinde sistem modellenmesinde ön tasarım analizlerini gerçekleştirebilecek nitelikte olduğu söylenebilir. Ayrıca CTMM için oluşturulan rotor dinamiği modelinin hızlı ve hassas sonuç vermesiyle birlikte parametrik çalışmalara izin vermesi de modelin çeşitli optimizasyon problemleri için kullanılabilceğini göstermektedir.

CTMM'e dayalı modern optimizasyon çalışmalarının olmaması nedeniyle bu çalışmanın devamında doğruluğu yukarıdaki şekilde ispatlanan rotor dinamiği modelinin çeşitli popülasyona dayalı optimizasyon teknikleri yardımıyla yatak konumlandırma ve rotor disk konumlandırma gibi çeşitli rotor tasarım optimizasyon problemlerinde kullanılması hedeflenmektedir.

Teşekkür (Acknowledgement)

Bu çalışmada TÜBİTAK 2244 Sanayi Doktora Programı kapsamında, 118C103 numaralı, "Gaz Türbinli Motor Teknolojilerinin Geliştirilmesi" projesi kapsamında verdiği destekten dolayı TÜBİTAK'a ve proje kapsamındaki desteklerinden ve makale kapsamında analizi yapılan programların lisansını sağladığından dolayı TUSAŞ Motor Sanayii A.Ş.'ye teşekkür ederiz. Ayrıca, TUSAŞ Motor Sanayii A.Ş. mühendislerinden İlker Başol, Alican Kılıçaslan ve Barış Çetin'e desteklerinden dolayı teşekkür ederiz.

Kaynaklar (References)

- Rao, J. S., History of rotating machinery dynamics, Springer Science & Business Media, 20, 2011.
- Friswell, M. I., Penny, J. E., Garvey, S. D., Lees, A. W., Dynamics of rotating machines, Cambridge University Press, New York A.B.D., 2010.
- Matsushita, O., Tanaka, M., Kanki, H., Kobayashi, M., Keogh, P., Vibrations of rotating machinery, Springer, Berlin, 2017.
- Yang, W., Liang, M., Wang, L., Yuan, H., Research on unbalance response characteristics of gas turbine blade-disk rotor system, Journal of Vibroengineering, 20 (4), 1676-1690, 2018.
- Ahmadian, M. T., Sadeghi, H., Ghasemalizadeh, O., Bonakdar, M., Analysis of Rotor-Bearing System Using the Transfer Matrix Method, CSC, 265-272, 2007.
- Varney, P., Green, I., Rotordynamic analysis using the Complex Transfer Matrix: An application to elastomer supports using the viscoelastic correspondence principle, Journal of Sound and Vibration, 333 (23), 6258-6272, 2014.
- Deng, H., Fang, X., Wu, H., Ding, Y., Yu, J., Zhang, X., Liu, C., Dynamic analysis of flexible rotor based on transfer symplectic matrix, Shock and Vibration, 2019.
- Behzad, M., Transfer matrix analysis of rotor systems with coupled lateral and torsional vibrations, Doktora Tezi, UNSW Sydney, 1994.
- Gökdağ, H., Kopmaz, O., Free Vibration Analysis of a Monosymmetric and Open Section Euler-Bernoulli Beam with Two Different Methods, Pamukkale University Journal of Engineering Sciences, 14 (2), 2008.
- Taplak, H., Parlak, M., Evaluation of gas turbine rotor dynamic analysis using the finite element method, Measurement, 45 (5), 1089-1097, 2012.
- Yuan, Q., Gao, R., Feng, Z., Wang, J., Analysis of dynamic characteristics of gas turbine rotor considering contact effects and pre-tightening force, Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 43154, 983-988, 2008.
- Maierhofer, J., Kreutz, M., Mulser, T., Thümmel, T., & Rixen, D. J., AMrotor-A MATLAB® toolbox for the simulation of rotating machinery, 12th International Conference, Vibrations in Rotating Machinery, 598-611, CRC Press, 2020.
- Timbó, R., Martins, R., Bachmann, G., Rangel, F., Mota, J., Valério, J., Ritto, T. G., Ross-rotordynamic open source software, Journal of Open Source Software, 5 (48), 2120, 2020.
- Ahmed, K.S., Ahmad, S.M., VibronRotor, an opensource rotordynamic code: Development and benchmarking, Measurement, 131, 546-558., 2019.
- Yıldız, A., Optimum suspension design for non-linear half vehicle model using particle swarm optimization (PSO) algorithm, Vibroengineering Procedia, 27, 43-48, 2019.
- Arslan S., Aslan S., A new lattice based artificial bee colony algorithm for EEG noise minimization. Journal of the Faculty of Engineering & Architecture of Gazi University, 38 (1), 15-28, 2023.
- Yıldız, A., A comparative study on the optimal non-linear seat and suspension design for an electric vehicle using different population-based optimisation algorithms, International Journal of Vehicle Design, 80 (2-4), 241-256, 2019.
- Yıldız, A., Kopmaz, O., Experimental and computational validation of an analytical model of free vibration of a rectangular plate carrying a distributed mass, International Journal of Advances in Engineering & Technology, 10 (2), 233, 2017.
- M.H. Jalali, M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, et al., Dynamic analysis of a high speedrotor-bearing system, Measurement, 53, 1-9, 2014.
- Genta G., Dynamics of Rotating Systems, Springer Science & Business Media, 2007.
- Holzer, H., Die Berechnung der Drehschwingungen, 68, Springer, Berlin, 1921.
- Myklestad, N.O., A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams, Journal of the Aeronautical Sciences, 11 (2), 153-162, 1944.
- Liew, A., A study of a rotor system with ball bearing induced non-linearities; and the development of transfer matrix techniques suitable for analysing such systems, Doktora Tezi, UNSW Sydney, 1977.
- Varney, P., Green, I., Rotordynamic analysis using the Complex Transfer Matrix: An application to elastomer supports using the viscoelastic correspondence principle, Journal of Sound and Vibration, 333 (23), 6258-6272, 2014.
- O'Leary, B. A., Analysis of high-speed rotating systems using Timoshenko beam theory in conjunction with the transfer matrix method, Yüksek Lisans Tezi, Rochester Institute of Technology, 1989.
- Rui, X., Wang, G., Zhang, J., Transfer matrix method for multibody systems: theory and applications, John Wiley & Sons, 2018.
- Meirovitch, L., Analytical methods in vibrations, Macmillan Limited, 1967.